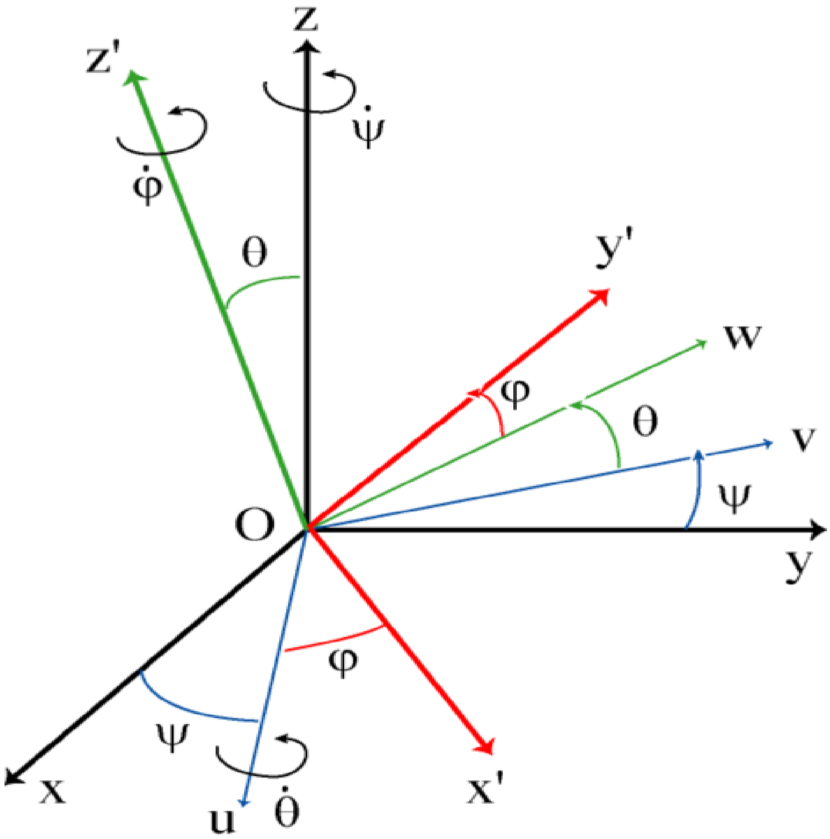
Angles d'Euler et quaternions



Définitions

restart; *with*(*LinearAlgebra*) :
Pour illustrer (et vérifier) l'action des matrices de rotation, on prendra comme corps solide une molécule d'eau de type HOD
Au départ HOD est dans le plan Oxy : O est en (0,0,0), H est en (l_H,0,0) et D est en (l_{Dx},l_{Dy}, 0).

$OH := \langle l_H, 0, 0\rangle = \begin{bmatrix} l_H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $OD := \langle l_{Dx}, l_{Dy}, 0\rangle = \begin{bmatrix} l_{Dx} \\ l_{Dy} \\ 0 \end{bmatrix}$

On introduit un troisième vecteur perpendiculaire à HOD : $Perp := \langle 0, 0, l_P\rangle$; $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_P \end{bmatrix}$

Première rotation d'un angle ψ autour de l'axe z.

La matrice de rotation et son inverse sont :

$$M_z := \langle\langle \cos(\psi) | -\sin(\psi) | 0\rangle, \langle \sin(\psi) | \cos(\psi) | 0\rangle, \langle 0|0|1\rangle\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Mm1_z := simplify(MatrixInverse(M_z)) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OD}$ devienent respectivement $\overrightarrow{OH_1}$ et $\overrightarrow{OD_1}$:

$$OH_1 := M_z.OH; = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\, l_H \\ \sin(\psi)\, l_H \\ 0 \end{bmatrix} \quad OD_1 := M_z.OD; = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\, l_{Dx} - \sin(\psi)\, l_{Dy} \\ \sin(\psi)\, l_{Dx} + \cos(\psi)\, l_{Dy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vérifications

Le produit scalaire de $\overrightarrow{OH_1}$ et $\overrightarrow{OD_1}$ est conservé : $Multiply(Transpose(OH_1), OD_1);$

$$(\cos(\psi)\, l_{Dx} - \sin(\psi)\, l_{Dy}) \cos(\psi)\, l_H + (\sin(\psi)\, l_{Dx} + \cos(\psi)\, l_{Dy}) \sin(\psi)\, l_H \quad \textbf{(2.1.1)}$$

$simplify(\%);$ $l_H\, l_{Dx}$

$\overrightarrow{Perp}$ ne bouge pas : $Perp_1 := M_z.Perp; = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_P \end{bmatrix}$

Deuxième rotation d'un angle θ autour de l'axe *u* déduit de l'axe *x* dans la rotation précédente.

La matrice de rotation dans les axes uvz est :

$$M_u := \langle\langle 1|0|0\rangle, \langle 0|\cos(\theta)|-\sin(\theta)\rangle, \langle 0|\sin(\theta)|\cos(\theta)\rangle\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

et dans les axes fixes : $M_2 := M_z.M_u.Mm1_z; =$

$$[[\cos(\psi)^2 + \sin(\psi)^2 \cos(\theta), \cos(\psi)\sin(\psi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\psi), \sin(\psi)\sin(\theta)],$$
$$[\cos(\psi)\sin(\psi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\psi), \sin(\psi)^2 + \cos(\psi)^2\cos(\theta), -\cos(\psi)\sin(\theta)],$$
$$[-\sin(\psi)\sin(\theta), \cos(\psi)\sin(\theta), \cos(\theta)]]$$

Inverse : $Mm1_2 := simplify(MatrixInverse(M_2)) =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) - \cos(\psi)^2 \cos(\theta) + \cos(\psi)^2 & -\cos(\psi) \sin(\psi) (\cos(\theta) - 1) & -\sin(\psi) \sin(\theta) \\ -\cos(\psi) \sin(\psi) (\cos(\theta) - 1) & \cos(\psi)^2 \cos(\theta) + 1 - \cos(\psi)^2 & \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\psi) \sin(\theta) & -\cos(\psi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Combinaison des deux rotations dans les axes xyz $M_{12} := simplify(M_2.M_z);$ =

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \cos(\theta) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\psi) & \cos(\theta) \cos(\psi) & -\cos(\psi) \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

et son inverse : $= Mm1_{12} := simplify(MatrixInverse(M_{12}))$;;

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) \cos(\theta) & \cos(\theta) \cos(\psi) & \sin(\theta) \\ \sin(\psi) \sin(\theta) & -\cos(\psi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

La transformée de $\overrightarrow{OH}$ ne doit pas dépendre de θ dans cette double rotation. En effet :

$$OH_2 := M_{12}.OH; = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\, l_H \\ \sin(\psi)\, l_H \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par contre $\overrightarrow{OD_1}$ devient : $OD_2 := simplify(M_{12}OD); = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\, l_{Dx} - \sin(\psi) \cos(\theta)\, l_{Dy} \\ \sin(\psi)\, l_{Dx} + \cos(\theta) \cos(\psi)\, l_{Dy} \\ \sin(\theta)\, l_{Dy} \end{bmatrix}$

et $\overrightarrow{Perp_1}$ devient : $Perp_2 := simplify(M_{12}.Perp); = \begin{bmatrix} \sin(\psi) \sin(\theta)\, l_P \\ -\cos(\psi) \sin(\theta)\, l_P \\ \cos(\theta)\, l_P \end{bmatrix}$

Vérifications

$\overrightarrow{Perp_2}$ est évidemment perpendiculaire à $\overrightarrow{OH_2}$. On vérifie ci-dessous qu'il est aussi perpendiculaire à $\overrightarrow{OD_2}$:

$Multiply(Transpose(Perp_2), OD_2);$ =

$$(\cos(\psi)\, l_{Dx} - \sin(\psi) \cos(\theta)\, l_{Dy}) \sin(\psi) \sin(\theta)\, l_P - (\sin(\psi)\, l_{Dx} + \cos(\theta) \cos(\psi)\, l_{Dy}) \cos(\psi) \sin(\theta)\, l_P + \sin(\theta)\, l_{Dy} \cos(\theta)\, l_P$$

$simplify(\%); = 0$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OD}$ est conservé : $Multiply(Transpose(OH_2), OD_2);$ =

$(\cos(\psi)\, l_{Dx} - \sin(\psi)\cos(\theta)\, l_{Dy})\cos(\psi)\, l_H + (\sin(\psi)\, l_{Dx} + \cos(\theta)\cos(\psi)\, l_{Dy})\sin(\psi)\, l_H$

$simplify(\%);$ $l_H\, l_{Dx}$

Troisième rotation d'un angle φ autour de l'axe *z1* déduit de l'axe *z* dans la rotation précédente.

La matrice de rotation dans les axes $u_2 v_2 z_1$ est :

$$M_{z1} := \langle\langle\cos(\varphi)|-\sin(\varphi)|0\rangle, \langle\sin(\varphi)|\cos(\varphi)|0\rangle, \langle 0|0|1\rangle\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et dans les axes xyz : $M_3 := simplify(M_{12}.M_{z1}.Mm1_{12});$

$$\begin{aligned}
&[[\cos(\phi)\cos(\psi)^2 + \cos(\phi)\cos(\theta)^2 - \cos(\psi)^2\cos(\theta)^2\cos(\phi) + 1 - \cos(\theta)^2 - \cos(\psi)^2 \\
&\quad + \cos(\psi)^2\cos(\theta)^2, \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi) \\
&\quad - \cos(\psi)\cos(\theta)^2\sin(\psi)\cos(\phi) - \cos(\psi)\sin(\psi) + \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\theta)^2, \\
&\quad -\sin(\theta)\,(\cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta))], \\
&\quad [\sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) - \cos(\psi)\cos(\theta)^2\sin(\psi)\cos(\phi) \\
&\quad - \cos(\psi)\sin(\psi) + \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\theta)^2, \cos(\phi) - \cos(\phi)\cos(\psi)^2 \\
&\quad + \cos(\psi)^2\cos(\theta)^2\cos(\phi) + \cos(\psi)^2 - \cos(\psi)^2\cos(\theta)^2, \sin(\theta)\,(-\sin(\psi)\sin(\phi) \\
&\quad + \cos(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\cos(\psi))], \\
&\quad [-\sin(\theta)\,(-\cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)), \\
&\quad \sin(\theta)\,(\sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\cos(\psi)), \cos(\phi) \\
&\quad - \cos(\phi)\cos(\theta)^2 + \cos(\theta)^2]]
\end{aligned}$$

Inverse : $Mm1_3 := simplify(MatrixInverse(M_3));$

$$\begin{aligned}
&[[\cos(\phi)\cos(\psi)^2 + \cos(\phi)\cos(\theta)^2 - \cos(\psi)^2\cos(\theta)^2\cos(\phi) + 1 - \cos(\theta)^2 - \cos(\psi)^2 \\
&\quad + \cos(\psi)^2\cos(\theta)^2, \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi) \\
&\quad - \cos(\psi)\cos(\theta)^2\sin(\psi)\cos(\phi) - \cos(\psi)\sin(\psi) + \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\theta)^2, \\
&\quad -\sin(\theta)\,(-\cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta))], \\
&\quad [\sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi) - \cos(\psi)\cos(\theta)^2\sin(\psi)\cos(\phi) \\
&\quad - \cos(\psi)\sin(\psi) + \sin(\psi)\cos(\psi)\cos(\theta)^2, \cos(\phi) - \cos(\phi)\cos(\psi)^2 \\
&\quad + \cos(\psi)^2\cos(\theta)^2\cos(\phi) + \cos(\psi)^2 - \cos(\psi)^2\cos(\theta)^2, \sin(\theta)\,(\sin(\psi)\sin(\phi) \\
&\quad + \cos(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\cos(\psi))], \\
&\quad [-\sin(\theta)\,(\cos(\psi)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)), \sin(\theta)\,(
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$-\sin(\psi)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi) - \cos(\theta)\cos(\psi)), \cos(\phi)$
$- \cos(\phi)\cos(\theta)^2 + \cos(\theta)^2]]$

Combinaison des trois rotations dans les axes xyz : $M_{123} := simplify(M_3 M_2 . M_z);\ =$

$$[[\cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - \cos(\psi)\sin(\phi), \sin(\psi)\sin(\theta)], [\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\phi), \cos(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\sin(\phi), -\cos(\psi)\sin(\theta)], [\sin(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)]]$$

On vérifie facilement à la main que la transformée de $\overrightarrow{OH}$ dans cette triple rotation est :

$$OH_3 := M_{123}.OH;\ = \begin{bmatrix} (\cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi))\, l_H \\ (\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\phi))\, l_H \\ \sin(\theta)\sin(\phi)\, l_H \end{bmatrix}$$

Par contre $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{Perp}$ deviennent : $OD_3 := simplify(M_{123} OD);\ =$

$$[[l_{Dx}\cos(\psi)\cos(\phi) - l_{Dx}\sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) - l_{Dy}\sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - l_{Dy}\cos(\psi)\sin(\phi)], [l_{Dx}\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) + l_{Dx}\sin(\psi)\cos(\phi) + l_{Dy}\cos(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi) - l_{Dy}\sin(\psi)\sin(\phi)], [\sin(\theta)(\sin(\phi)\, l_{Dx} + \cos(\phi)\, l_{Dy})]]$$

$$Perp_3 := simplify(M_{123} Perp);\ = \begin{bmatrix} \sin(\psi)\sin(\theta)\, l_P \\ -\cos(\psi)\sin(\theta)\, l_P \\ \cos(\theta)\, l_P \end{bmatrix}$$

Vérifications

Orthogonalité : $Multiply(Transpose(Perp_3), OH_3);$

$$(\cos(\psi)\cos(\phi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi))\, l_H \sin(\psi)\sin(\theta)\, l_P - (\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) + \sin(\psi)\cos(\phi))\, l_H \cos(\psi)\sin(\theta)\, l_P + \sin(\theta)\sin(\phi)\, l_H \cos(\theta)\, l_P \tag{4.1.1}$$

$simplify(\%);\ = 0$

$Multiply(Transpose(Perp_3), OD_3);\ =$

$$(l_{Dx}\cos(\psi)\cos(\phi) - l_{Dx}\sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) - l_{Dy}\sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi) - l_{Dy}\cos(\psi)\sin(\phi))\sin(\psi)\sin(\theta)\, l_P - (l_{Dx}\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) + l_{Dx}\sin(\psi)\cos(\phi) + l_{Dy}\cos(\theta)\cos(\psi)\cos(\phi) - l_{Dy}\sin(\psi)\sin(\phi))\cos(\psi)\sin(\theta)\, l_P$$

$+\sin(\theta)\left(\sin(\phi)\,l_{Dx}+\cos(\phi)\,l_{Dy}\right)\cos(\theta)\,l_P$

$simplify(\%);\ = 0$

Produit scalaire de $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OD}$ est conservé : $Multiply\left(Transpose\left(OH_3\right), OD_3\right);\ =$

$simplify(\%);\ = l_H\, l_{Dx}$

Quaternion associé à la matrice M_z

Un quaternion est composé de 4 éléments : le premier est le cosinus du demi angle de la rotation ; les trois autres sont les coordonnées de l'axe de la rotation qui sont définies à un facteur multiplicatif près.
Souvent on réduit à 3 les variables indépendantes en imposant que la norme du quaternion soit égale à 1.

On commence par le cas simple d'une rotation autour de l'axe z. La matrice de rotation est :

$$M_z = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour calculer le quaternion associé il faut déterminer si la trace est positive
- on considèrera ce cas plus tard - sinon il faut déterminer d'abord
quel est l'élément le plus grand dans la diagonale principale, ici $M_{z_{3,3}} = 1$

On obtient alors le quaternion (W, X, Y, Z) par les formules :

$$S := 2\cdot\sqrt{1 - M_{z_{1,1}} - M_{z_{2,2}} + M_{z_{3,3}}} = 2\sqrt{2 - 2\cos(\psi)}$$

$$X := \left(M_{z_{1,3}} - M_{z_{3,1}}\right)\cdot S = 0$$

$$Y := \left(M_{z_{2,3}} - M_{z_{3,2}}\right)\cdot S = 0$$

$$Z := \frac{1}{2\cdot S} = \frac{1}{4\sqrt{2 - 2\cos(\psi)}}$$

$$W := \frac{M_{z_{1,2}} - M_{z_{2,1}}}{S} = -\frac{\sin(\psi)}{\sqrt{2 - 2\cos(\psi)}}$$

Vérification : l'axe de rotation est évidemment suivant l'axe z
et W est bien le cosinus du demi angle de rotation :

$assume(\psi, real); assume(\varphi, real); W := subs(\psi = 2\,\varphi, W) = -\dfrac{\sin(2\,\phi\sim)}{\sqrt{2 - 2\cos(2\,\phi\sim)}}$

$expand(\%) = -\dfrac{2\sin(\phi\sim)\cos(\phi\sim)}{\sqrt{4 - 4\cos(\phi\sim)^2}}$

$W := simplify(\ \%) = -\mathrm{signum}(\sin(\phi\sim))\cos(\phi\sim)$

Problème inverse : trouver M_z à partir du quaternion associé

Sachant que W est en $\cos(\varphi)$, pour normaliser le quaternion, il faut prendre Z en $\sin(\varphi)$:
le quaternion s'écrit alors ainsi :

$$Q := [\cos(\varphi), 0, \ 0, \sin(\varphi)\ ] = [\cos(\phi\sim), 0, 0, \sin(\phi\sim)]$$

et donc

$$W := \cos(\varphi) = \cos(\phi\sim)$$

$$Z := \sin(\varphi) = \sin(\phi\sim)$$

La matrice de rotation correspondante est obtenue par la procédure g :

g :=**proc**(Q)
  description "Procédure donnant la matrice de rotation associée à un quaternion";
  global Mq; **local** W, X, Y, Z;
  $W := Q_1;\ X := Q_2;\ Y := Q_3;\ Z := Q_4;$
  $Mq :=$
$\langle\langle 1-2Y^2-2Z^2 \,|\, 2X\cdot Y-2Z\cdot W | 2X\cdot Z+2Y\cdot W\rangle, \langle 2X\cdot Y+2Z\cdot W | 1-2X^2-2Z^2 | 2Y\cdot Z-2X\cdot W\rangle, \langle 2X\cdot Z-2Y\cdot W | 2Y\cdot Z+2X\cdot W | 1-2X^2-2Y^2\rangle\rangle$
end proc:

$$MM := g(Q) = \begin{bmatrix} 1-2\sin(\phi\sim)^2 & -2\sin(\phi\sim)\cos(\phi\sim) & 0 \\ 2\sin(\phi\sim)\cos(\phi\sim) & 1-2\sin(\phi\sim)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M1 := combine(MM, rtable); = \begin{bmatrix} \cos(2\phi\sim) & -\sin(2\phi\sim) & 0 \\ \sin(2\phi\sim) & \cos(2\phi\sim) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$subs\left(\varphi = \frac{\psi}{2}, M1\right) = \begin{bmatrix} \cos(\psi\sim) & -\sin(\psi\sim) & 0 \\ \sin(\psi\sim) & \cos(\psi\sim) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quaternion associé à M_{12} (rotations ψ et θ)

$$AAA := M_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\psi\sim) & -\sin(\psi\sim)\cos(\theta) & \sin(\psi\sim)\sin(\theta) \\ \sin(\psi\sim) & \cos(\theta)\cos(\psi\sim) & -\cos(\psi\sim)\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

On introduit une matrice 4x4 associée :

$A12 := \langle\langle AAA_{1,1} | AAA_{1,2} | AAA_{1,3} | 0\rangle, \langle AAA_{2,1} | AAA_{2,2} | AAA_{2,3} | 0\rangle, \langle AAA_{3,1} | AAA_{3,2} | AAA_{3,3} | 0\rangle, \langle 0|0|0|1\rangle\rangle$

=

$[[\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim) - \sin(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim), -\sin(\psi\sim)\cos(\theta)\cos(\phi\sim) - \cos(\psi\sim)\sin(\phi\sim), \sin(\psi\sim)\sin(\theta), 0],$

$[\cos(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim)+\sin(\psi\sim)\cos(\phi\sim), \cos(\theta)\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)$
$-\sin(\psi\sim)\sin(\phi\sim), -\cos(\psi\sim)\sin(\theta), 0],$
$[\sin(\theta)\sin(\phi\sim), \sin(\theta)\cos(\phi\sim), \cos(\theta), 0],$
$[0, 0, 0, 1]]$

$f :=$**proc**$(A :: Matrix)$ **global** Q; **local** w, x, y, z, T, S;
description " Procédure donnant le quaternion à partir d'une matrice 4x4 quand la trace est positive. ";

$$T := Trace(A);$$
$$S := \frac{1}{2\,\mathrm{sqrt}(T)};$$
$$w := \frac{1}{4\,S};$$
$$x := (A_{3,2} - A_{2,3})\cdot S;$$
$$y := (A_{1,3} - A_{3,1})\cdot S;$$
$$z := (A_{2,1} - A_{1,2})\cdot S;$$
$$Q := [w, x, y, z];$$

end proc:
$f(\mathrm{A12})$

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}, \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)+\cos(\psi\sim)\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}}, \frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}}, \frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)+\sin(\psi\sim)\cos(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}}\right] \tag{7.1}$$

On vérifie que la fonction retourne bien la valeur de Q :
$Q=$

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}, \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)+\cos(\psi\sim)\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}}, \frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}}, \frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)+\sin(\psi\sim)\cos(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}}\right]$$

On prend le cas particulier où $\theta = 0$:

$subs(\theta=0, Q) =$

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(0)\cos(\psi\sim)+\cos(0)},\right.$$
$$\frac{1}{2}\frac{\sin(0)+\cos(\psi\sim)\sin(0)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(0)\cos(\psi\sim)+\cos(0)}},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)\sin(0)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(0)\cos(\psi\sim)+\cos(0)}},$$
$$\left.\frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)+\sin(\psi\sim)\cos(0)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(0)\cos(\psi\sim)+\cos(0)}}\right]$$

$$eval(\%) = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(\psi\sim)}, 0, 0, \frac{\sin(\psi\sim)}{\sqrt{2+2\cos(\psi\sim)}}\right]$$

$assume(\chi, real)$

$$subs(\psi=2\chi, \%) = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(2\chi)}, 0, 0, \frac{\sin(2\chi)}{\sqrt{2+2\cos(2\chi)}}\right]$$

$$expand(\%) = \left[\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{\cos(\chi)^2}, 0, 0, \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4}\sin(\chi)\cos(\chi)}{\sqrt{\cos(\chi)^2}}\right]$$

On obtient bien un quaternion de rotation autour de l'axe z et de demi angle χ :

$Q1 := simplify(\%) = [\mathrm{csgn}(\cos(\chi))\cos(\chi), 0, 0, \mathrm{csgn}(\cos(\chi))\sin(\chi)]$

On finit en supposant qu'on est dans le cas où $cos(\chi) > 0$:

$Q11 := [\cos(\chi), 0, 0, \sin(\chi)] = [\cos(\chi), 0, 0, \sin(\chi)]$

$$Mn := g(Q11) = \begin{bmatrix} 1-2\sin(\chi)^2 & -2\sin(\chi)\cos(\chi) & 0 \\ 2\sin(\chi)\cos(\chi) & 1-2\sin(\chi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Mn.\langle\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \langle 0\rangle\rangle = \begin{bmatrix} 1-2\sin(\chi)^2 \\ 2\sin(\chi)\cos(\chi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$combine(\%) = \begin{bmatrix} \cos(2\chi) \\ \sin(2\chi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

On prend le cas particulier où $\psi = 0$:

$Q =$

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)},\right.$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)+\cos(\psi\sim)\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}},$$
$$\left.\frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)+\sin(\psi\sim)\cos(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}}\right]$$

$$subs(\psi=0, Q)=\left[\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(\theta)}, \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2+2\cos(\theta)}}, 0, 0\right]$$
$$eval(\%)=\left[\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(\theta)}, \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2+2\cos(\theta)}}, 0, 0\right]$$
$$subs(\theta=2\chi, \%)=\left[\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(2\chi)}, \frac{\sin(2\chi)}{\sqrt{2+2\cos(2\chi)}}, 0, 0\right]$$
$$expand(\%)=\left[\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{\cos(\chi)^2}, \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4}\sin(\chi)\cos(\chi)}{\sqrt{\cos(\chi)^2}}, 0, 0\right]$$
$$simplify(\%)=[\mathrm{csgn}(\cos(\chi))\cos(\chi), \mathrm{csgn}(\cos(\chi))\sin(\chi), 0, 0]$$

On finit en supposant qu'on est dans le cas où $cos(\chi)>0$:

$$Q11 := [\cos(\chi), \sin(\chi), 0, 0]=[\cos(\chi), \sin(\chi), 0, 0]$$
$$Mn := g(Q11)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-2\sin(\chi)^2 & -2\sin(\chi)\cos(\chi)\\ 0 & 2\sin(\chi)\cos(\chi) & 1-2\sin(\chi)^2\end{bmatrix}$$
$$combine(\%)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(2\chi) & -\sin(2\chi)\\ 0 & \sin(2\chi) & \cos(2\chi)\end{bmatrix}$$

Exemple numérique : $\psi = \pi/3$ et $\theta = \pi/4$

$Q=$

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)},\right.$$
$$\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta)+\cos(\psi\sim)\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)\sin(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}},$$
$$\left.\frac{1}{2}\frac{\sin(\psi\sim)+\sin(\psi\sim)\cos(\theta)}{\sqrt{1+\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)+\cos(\theta)}}\right]$$

$$Q1 := subs\left(\psi = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{\mathrm{Pi}}{4}, Q\right)$$

$Qval := evalf(\%)$ $[0.80010, 0.33141, 0.19134, 0.46194]$

$$g(Qval) = \begin{bmatrix} 0.50000 & -0.61237 & 0.61237 \\ 0.86603 & 0.35355 & -0.35355 \\ 2.\ 10^{-10} & 0.70711 & 0.70711 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\psi\sim) & -\sin(\psi\sim)\cos(\theta) & \sin(\psi\sim)\sin(\theta) \\ \sin(\psi\sim) & \cos(\theta)\cos(\psi\sim) & -\cos(\psi\sim)\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$m1 := subs\left(\theta = \frac{\mathrm{Pi}}{4}, \%\right) = \begin{bmatrix} \cos(\psi\sim) & -\frac{1}{2}\sin(\psi\sim)\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sin(\psi\sim)\sqrt{2} \\ \sin(\psi\sim) & \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\psi\sim) & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\psi\sim) \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$rtable_{eval}(m1)$

$$m2 := evalf(m1) = \begin{bmatrix} \cos(\psi\sim) & -0.70711\sin(\psi\sim) & 0.70711\sin(\psi\sim) \\ \sin(\psi\sim) & 0.70711\cos(\psi\sim) & -0.70711\cos(\psi\sim) \\ 0.00000 & 0.70711 & 0.70711 \end{bmatrix}$$

$m3 := rtable_{eval}(m2)$

$$subs\left(\psi = \frac{\mathrm{Pi}}{3}, m3\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -0.35355\sqrt{3} & 0.35355\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0.35355 & -0.35355 \\ 0.00000 & 0.70711 & 0.70711 \end{bmatrix}$$

$$m4 := evalf(\%) = \begin{bmatrix} 0.50000 & -0.61237 & 0.61237 \\ 0.86603 & 0.35355 & -0.35355 \\ 0.00000 & 0.70711 & 0.70711 \end{bmatrix}$$

la matrice de rotation $m4$ est bien identique à $g(Qval)$ cidessus.
On vérifie ci dessous que les trois dernières coordonnées de $Qval$ sont les coordonnées de l'axe de rotation

$$axe := \langle\langle Qval_2\rangle, \langle Qval_3\rangle, \langle Qval_4\rangle\rangle = \begin{bmatrix} 0.33141 \\ 0.19134 \\ 0.46194 \end{bmatrix}$$

$$m4.axe = \begin{bmatrix} 0.33141 \\ 0.19134 \\ 0.46194 \end{bmatrix}$$

Quaternion associé à M_{123} (rotations ψ, θ, φ)

Come dans le cas (ψ, θ) il faudra introduire une matrice de rotation 4x4 :

$AAA := M_{123} =$

$$[[\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim) - \sin(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim), -\sin(\psi\sim)\cos(\theta)\cos(\phi\sim) - \cos(\psi\sim)\sin(\phi\sim), \sin(\psi\sim)\sin(\theta)], [\cos(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim) + \sin(\psi\sim)\cos(\phi\sim), \cos(\theta)\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim) - \sin(\psi\sim)\sin(\phi\sim), -\cos(\psi\sim)\sin(\theta)], [\sin(\theta)\sin(\phi\sim), \sin(\theta)\cos(\phi\sim), \cos(\theta)]]$$

The rtable_eval(A) command, where A is an Array, Matrix, or Vector, returns either a copy of A, or the original input A depending if evaluation is needed. It also changes the way elements are evaluated when the returned rtable is subsequently referenced. *Autrement les évaluations numériques suivantes ne veulent pas s'effectuer complètement*

$m1 := rtable_{eval}(M_{123}) =$

$$[[\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim) - \sin(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim), -\sin(\psi\sim)\cos(\theta)\cos(\phi\sim) - \cos(\psi\sim)\sin(\phi\sim), \sin(\psi\sim)\sin(\theta)], [\cos(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim) + \sin(\psi\sim)\cos(\phi\sim), \cos(\theta)\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim) - \sin(\psi\sim)\sin(\phi\sim), -\cos(\psi\sim)\sin(\theta)], [\sin(\theta)\sin(\phi\sim), \sin(\theta)\cos(\phi\sim), \cos(\theta)]]$$

$subs\left(\psi = \frac{\mathrm{Pi}}{3}, \theta = \frac{\mathrm{Pi}}{4}, \varphi = \frac{\mathrm{Pi}}{5}, \mathrm{m1}\right) =$

$$\left[\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right), -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right), \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}\right], \left[\frac{1}{4}\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right), \frac{1}{4}\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right), -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right], \left[\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right), \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right), \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]\right]$$

$$m2 := evalf(\%) = \begin{bmatrix} 0.04457 & -0.78931 & 0.61237 \\ 0.90844 & -0.22301 & -0.35355 \\ 0.41563 & 0.57206 & 0.70711 \end{bmatrix}$$

On introduit une matrice 4x4 associée à M_123 :

$A123 := \langle\langle AAA_{1,1}|AAA_{1,2}|AAA_{1,3}|0\rangle, \langle AAA_{2,1}|AAA_{2,2}|AAA_{2,3}|0\rangle, \langle AAA_{3,1}|AAA_{3,2}|AAA_{3,3}|0\rangle, \langle 0|0|0$

$|1\rangle\rangle$

$quaternion := f(\mathrm{A123}) =$

$$\left[\frac{1}{2}\left(1+\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)-\sin(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)\right.\right.$$
$$\left.-\sin(\psi\sim)\sin(\phi\sim)+\cos(\theta)\right)^{1/2}, \frac{1}{2}\left(\sin(\theta)\cos(\phi\sim)+\cos(\psi\sim)\sin(\theta)\right)\Big/$$
$$\left(1+\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)-\sin(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)\right.$$
$$\left.-\sin(\psi\sim)\sin(\phi\sim)+\cos(\theta)\right)^{1/2}, \frac{1}{2}\left(\sin(\psi\sim)\sin(\theta)-\sin(\theta)\sin(\phi\sim)\right)\Big/$$
$$\left(1+\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)-\sin(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)\right.$$
$$\left.-\sin(\psi\sim)\sin(\phi\sim)+\cos(\theta)\right)^{1/2}, \frac{1}{2}\left(\cos(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim)+\sin(\psi\sim)\cos(\phi\sim)\right.$$
$$\left.+\sin(\psi\sim)\cos(\theta)\cos(\phi\sim)+\cos(\psi\sim)\sin(\phi\sim)\right)\Big/$$
$$\left(1+\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)-\sin(\psi\sim)\cos(\theta)\sin(\phi\sim)+\cos(\theta)\cos(\psi\sim)\cos(\phi\sim)\right.$$
$$\left.\left.-\sin(\psi\sim)\sin(\phi\sim)+\cos(\theta)\right)^{1/2}\right]$$

$subs\left(\psi=\frac{\mathrm{Pi}}{3}, \theta=\frac{\mathrm{Pi}}{4}, \varphi=\frac{\mathrm{Pi}}{5}, quaternion\right) =$

$$\left[\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)\right.\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)^{1/2},$$
$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)+\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)\Big/$$
$$\left(1+\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)^{1/2},$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)\right)\Big/$$

$$\left(1+\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)^{1/2},$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)+\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)+\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)\right)\Big/$$
$$\left(1+\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{5}\pi\right)-\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\sin\left(\frac{1}{5}\pi\right)+\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)^{1/2}\Bigg]$$

$Q123 := evalf(\%) = [0.61820, 0.37432, 0.07956, 0.68658]$

La matrice de rotation se déduit du quaternion par la fonction g :

$$g(Q123)=\begin{bmatrix}0.04457 & -0.78931 & 0.61237\\ 0.90844 & -0.22301 & -0.35355\\ 0.41563 & 0.57206 & 0.70711\end{bmatrix}$$

Vérification :

$$m2=\begin{bmatrix}0.04457 & -0.78931 & 0.61237\\ 0.90844 & -0.22301 & -0.35355\\ 0.41563 & 0.57206 & 0.70711\end{bmatrix}$$

fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin fin $= fin^{22}$

Sources

http://jeux.developpez.com/faq/matquat/?page=quaternions#Q56

http://jeux.developpez.com/faq/matquat/?page=transformations

On y trouve des petits programmes en C
que j'ai repris ci-dessus en Maple

finale

$$finale \tag{9.1}$$