Master CFP
Parcours physique quantique
2006-2007

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 8

---

1 Observables locales

On considère un champ massif scalaire $\phi = \int \widetilde{dk}(a_k^\dagger e^{-i\boldsymbol{kx}} + a_k e^{i\boldsymbol{kx}})$ où $\widetilde{dk} = d^3\boldsymbol{k}/(2\pi)^3/(2\omega_k)$ avec $\omega_k = (k^2+m^2)^{1/2}$. Les opérateurs d'annihilation et de création satisfont aux relations de commutation $[a_k, a_{k'}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})$.

1. Comment se transforme $\widetilde{dk}$ lors d'une transformation spéciale de Lorentz ?

2. On souhaite construire un ket $|\boldsymbol{q}\rangle = F(\boldsymbol{q})a_q^\dagger|0\rangle$ tel que $\langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q'}\rangle = \delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q'})$. Que faut-il choisir pour $F(\boldsymbol{q})$?

3. Construisez maintenant un ket $|\boldsymbol{r}\rangle$ à l'aide de la transformée de Fourier. Que vaut alors $\langle\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r'}\rangle$?

4. On peut maintenant construire un "paquet d'onde" $\int dr\ f(r)|\boldsymbol{r}\rangle$. Dans la suite, on choisira pour f une gaussienne centrée à l'origine, de largeur b, et on notera cet état (correctement normalisé) $|b\rangle$. Calculez $\langle b|N|b\rangle$ et $\langle b|N^2|b\rangle$ où $N = \int \widetilde{dk}\ a_k^\dagger a_k$ est l'opérateur nombre de particules. Conclusions ?

5. Calculez maintenant $\langle b|H|b\rangle$ où $H = \int \widetilde{dk}\ \omega_k a_k^\dagger a_k$ est l'opérateur Hamiltonien (dans l'ordre normal). Évaluez cette énergie dans les limites $mb \ll 1$ et $mb \gg 1$ (vous pourrez également calculer $\langle b|H^2|b\rangle$ dans ces deux limites).

6. On souhaite maintenant étudier comment se répartit l'énergie et la densité de particules dans l'espace. Pour cela, on introduit les opérateurs $N(\boldsymbol{x}) = 2\int \widetilde{dk}\widetilde{dk'}\ (\omega_k\omega_{k'})^{1/2} a_k^\dagger a_{k'} e^{i(\boldsymbol{k'}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}}$ et $H(\boldsymbol{x}) = 2\int \widetilde{dk}\widetilde{dk'}\ \omega_k\omega_{k'} a_k^\dagger a_{k'} e^{i(\boldsymbol{k'}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}}$. Vérifiez que l'intégrale dans l'espace de ces densités redonne bien les expressions introduites précédemment.

7. Calculez $\langle\boldsymbol{r}|N(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{r'}\rangle$ et $\langle\boldsymbol{r}|N(\boldsymbol{x'})N(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{r'}\rangle$. Que peut-on dire de la répartition de particule dans l'espace ? Ce résultat nous conforte dans notre interprétation de $|\boldsymbol{r}\rangle$ décrivant une particule à la position $\boldsymbol{r}$.

8. On s'intéresse maintenant à $\langle\boldsymbol{r}|H(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{r'}\rangle$. L'intégrale obtenue est maintenant divergente, mais, pour lui donner un sens, on peut calculer la dérivée par rapport à m^2 (convergente), puis intégrer le résultat. Trouvez le comportement à x grand pour $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'}$. On déduit de ceci que l'énergie n'est pas localisée. On voit ainsi qu'en physique quantique relativiste, on ne peut pas localiser simultanément énergie et densité, sur des échelles plus petites que la longueur de Compton. La notion de particule localisée avec une précision arbitraire perd son sens. Le mieux qu'on puisse faire, c'est de localiser énergie et densité dans un volume dont l'extension spatiale est donnée par la longueur de Compton.

9. Construisez maintenant un état à 2 "particules" : $|\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q'}\rangle$, puis $|\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}\rangle$. Construisez à partir de là un état correspondant à la superposition de deux paquets d'onde gaussiens centrés en $\boldsymbol{r_a}$ et $\boldsymbol{r_b}$, et d'extension spatiale b. Calculez la valeur moyenne de $N(x)$ dans cet état. Conclusions ?