Master CFP
Parcours physique quantique
2005-2006

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 7

---

1 Effet Casimir

On considère deux plaques métalliques dans le vide, proches l'une de l'autre. Elles subissent alors une force qui les attirent. Cette force est due aux fluctuations du champ électromagnétique.

1. On considère pour l'instant un problème unidimensionnel (l'espace est une droite). Déterminez par analyse dimensionnelle l'expression de la force (à une constante multiplicative près) s'exerçant entre deux "plaques" (qui sont en fait des points dans notre monde unidimensionnel) distantes de a.

2. Le hamiltonien s'exprime sous la forme $H = \sum \omega_k(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})$ (on se place dans les unités où $\hbar = c = 1$). Quelle est l'énergie du vide $E(a)$ (c'est à dire $\langle 0|H|0\rangle$) ? La présence des plaques impose au champ d'être nul au niveau des plaques. Ceci nous sélectionne certaines valeurs de ω dans la somme précédente.

3. Remarquez que la somme précédente n'est pas convergente. On trouve donc une énergie infinie... Pour donner un sens à notre expression, on va soustraire une partie divergente de notre expression (après tout, l'énergie est définie à une constante additive près). Pour cela, calculez l'énergie du vide $E_0(a)$ en l'absence des plaques dans un segment de longueur a. Cette énergie est également infinie. En fait, la présence des plaques change l'énergie de

$$\Delta E(a) = E(a) - E_0(a) = \frac{\pi}{2a}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} n - \int_0^\infty n\, dn\right\} \tag{1}$$

différence de deux termes infinis qui (avec un peu de chance) est finie. On va maintenant donner un sens à cette expression.

4. La méthode utilisée pour calculer la différence de deux termes infinis est :
a) régulariser les expressions, c'est à dire introduire un paramètre δ tel que pour δ fini, chaque terme est fini et pour $\delta = 0$, on retrouve les expressions initiales ;
b) En présence de cette régularisation, on calcule chaque terme, puis on fait la limite $\delta \to 0$.
Ici, les divergences proviennent du comportement à grande fréquence. Pour régulariser nos expressions, on multiplie la fonction à sommer (intégrer) par une fonction de coupure : $n \to n\, f_\delta(n)$. La fonction de coupure décroit rapidement à quand sont argument est grand, et est proche de 1 pour des arguments petits. Montrez que si $f_\delta(n) = \exp(-\delta n)$ on sait calculer chaque terme et que, dans la limite $\delta \to 0$, la différence des deux termes est finie.

5. On peut vérifier que le résultat obtenu est indépendant de la fonction de coupure choisie. Pour cela on utilise la formule d'Abel-Plana[1] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty F(n)dn = \frac{1}{2}F(0) + i\int_0^\infty \frac{dt}{\exp(2\pi t) - 1}(F(it) - F(-it)) \tag{2}$$

Remarquez que, dans le membre de droite, on peut effectuer la limite $\delta \to 0$ avant d'effectuer l'intégrale car l'exponentielle au dénominateur fait converger l'intégrale. On donne la avaleur de l'intégrale $\int_0^\infty t/(\exp(2\pi t) - 1)dt = 1/24$.

6. Déterminez la force qui s'exerce entre les plaques en calculant la dérivée de l'énergie par rapport à a.

7. Considérons maintenant le problème tridimensionnel : deux plaques de surface S sont mises en vis-à-vis à une distance a l'une de l'autre ($a^2 \ll S$). Les plaques métalliques sont conductrices, ce

[1] Cette équation s'obtient en utilisant le théorème des résidus

qui impose, en particulier, que la composante du champ électrique normale aux plaques s'annule sur les plaques. On s'attend à ce que la force s'exerçant sur les plaques soit proportionnelle à la surface. Déterminez par analyse dimensionnelle l'expression de la force (à une constante multiplicative près) s'exerçant entre les deux plaques.

8. Exprimez l'énergie du vide entre les deux plaques $E(a)$, ainsi que l'énergie du vide $E_0(a)$ dans le même volume en l'absence de plaque.

9. On régularise les deux énergies précédentes en multipliant la fonction à intégrer (à sommer) par une fonction de coupure $f_\delta(n)$. En utilisant la formule d'Abel-Plana (2), déterminez la différence $E(a) - E_0(a)$ dans la limite où $\delta \to 0$. On donne la avaleur de l'intégrale $\int_0^\infty t^3/(\exp(2\pi t) - 1)dt = 1/240$. Déterminez la force s'exerçant sur les plaques.

---

2 Electrodynamique scalaire

On considère un champ scalaire complexe ϕ couplé à un champ vectoriel A_μ. Le lagrangien de ce problème est donné par :

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\star (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\star \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{3}$$

avec, comme d'habitude $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, et $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

1. Vérifiez que le lagrangien est invariant sous la transformation de jauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, $\phi \to \phi \exp(-ie\Lambda)$, où Λ est une fonction arbitraire.

2. Quel est le courant de Nœther J associé à une transformation de jauge avec une fonction Λ uniforme et infinitésimale ? On notera $J = \Lambda j$

3. Déterminez les équations du mouvement associé aux champs ϕ, $\phi^\star$ et A_μ et exprimez cette dernière en fonction du courant de Nœther trouvé à la question précédente. Conclusion ?