

## 1 Champ complexe

On considère un champ scalaire complexe  $\phi$  dont le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \quad (1)$$

$\phi$  et  $\phi^*$  seront considérés comme deux variables indépendantes.

1. Montrez que ce lagrangien est invariant sous les transformations du groupe de Poincaré et sous la transformation simultanée  $\phi \rightarrow \exp(i\theta)\phi$ ,  $\phi^* \rightarrow \exp(-i\theta)\phi^*$ . Quels autres termes préservant ces symétries pourrait-on mettre dans le lagrangien ?

2. Dans la suite on ne considère que le lagrangien (1). Donnez les équations du mouvement pour le champ. Voyez-vous pourquoi  $m$  représente la masse du champ ?

3. Calculez le courant de Noether associé au changement de phase du champ.

4. Vérifiez que ce courant satisfait une équation de conservation (vous utiliserez les équations du mouvement pour le champ).

5. Calculez le courant de Noether associé à une translation  $\delta x^\mu = a^\mu$ . Le tenseur énergie-impulsion<sup>1</sup> est défini par  $J^\mu = -a_\nu T^{\mu\nu}$ . Donnez l'expression de ce tenseur.

6. En utilisant les équations du mouvement, vérifiez que l'équation de continuité pour  $T$  est satisfaite.

7. Calculez  $T^{00}$  et  $T^{0i}$  qui s'interprètent comme des densités d'énergie et d'impulsion respectivement.

## 2 Dirac

On considère un spineur de Dirac  $\psi$ . Le lagrangien de la particule libre est :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (2)$$

1. Donnez les équations du mouvement du champ  $\psi$ . Que peut-on dire de  $\mathcal{L}$  pour un champ solution des équations du mouvement ?

2. Calculez le courant de Noether associé à une translation  $\delta x^\mu = a^\mu$ . Donnez l'expression du tenseur énergie-impulsion canonique. Vérifiez que les courants satisfont à l'équation de continuité.

3. Calculez  $T^{00}$  et  $T^{0i}$  qui s'interprètent comme des densités d'énergie et d'impulsion respectivement.

<sup>1</sup>Lorsqu'il est défini ainsi,  $T$  est appelé tenseur énergie-impulsion canonique

### 3 Rayonnement électromagnétique

On veut déterminer le tenseur énergie-impulsion du rayonnement électromagnétique dans le vide. Le lagrangien s'exprime en fonction du tenseur de champ électromagnétique :  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

1. Rappelez (retrouvez) les équations du mouvement du champ.
2. Calculez le courant de Noether  $J^\mu$  associé à une translation  $\delta x^\mu = a^\mu$  et déterminez le tenseur énergie-impulsion canonique.
3. Ce tenseur n'est pas symétrique (problématique quand on fait de la gravitation) et pas invariant de jauge. On souhaite donc trouver un autre tenseur énergie-impulsion  $\tilde{T}^{\mu\nu}$  ayant ces deux propriétés. Pour cela, montrez que si  $\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$  avec  $X^{\mu\rho\nu} = -X^{\rho\mu\nu}$  alors l'équation de conservation  $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$  est satisfaite et les charges associées à  $T$  et  $\tilde{T}$  sont identiques.
4. Montrez que  $X^{\rho\mu\nu} = -F^{\rho\mu}A^\nu$  est un choix acceptable, qui nous permet d'obtenir un tenseur  $\tilde{T}$  symétrique et invariant de jauge.
5. Calculez  $\tilde{T}^{00}$  et  $\tilde{T}^{0i}$  (on rappelle que  $F^{01} = -E_x$  et  $F^{12} = -B_z$ ). Ces quantités s'identifient à la densité d'énergie du rayonnement électromagnétique et au vecteur de Poynting.

### 4 Belinfante

Dans l'exercice précédent, on a réussi à symétriser le tenseur énergie-impulsion canonique en ajoutant une contribution  $\partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$ . Il existe une méthode permettant de systématiser cette procédure, méthode que l'on propose d'étudier dans cet exercice. Considérons un champ scalaire  $\phi_a$  à plusieurs composantes, engendrant une représentation du groupe de Poincaré. Lors d'une transformation de Lorentz  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  avec  $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$ , la transformation des composantes du champ s'écrit :  $\phi'^a = \phi^a - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\Sigma_{\mu\nu})^{ab}\phi_b$  avec  $\Sigma_{\mu\nu}$  antisymétrique.

1. Calculez le courant de Noether associé à la transformation de Lorentz caractérisée plus haut. Écrivez ce courant en terme de  $M^{\mu\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu\rho}$  avec  $\Delta^{\mu\rho\nu} = -\Delta^{\mu\nu\rho}$ .
2. Quelle équation de conservation pour  $M^{\mu\nu\rho}$  pouvez-vous écrire ? Déduisez-en une relation entre la partie antisymétrique de  $T$  et  $\Delta$  (souvenez-vous que  $T$  satisfait lui-même une équation de conservation).
3. Comme dans l'exercice précédent, on introduit  $\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$  avec  $X^{\mu\rho\nu} = -X^{\rho\mu\nu}$ , ce qui n'altère ni l'équation de conservation, ni les charges de Noether associées. Vérifiez que  $X^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Delta^{\rho\mu\nu} - \Delta^{\mu\rho\nu} - \Delta^{\nu\rho\mu})$  est un choix licite et montrez qu'il conduit à un  $\tilde{T}$  symétrique.
4. On veut maintenant faire le lien avec notre exercice sur le champ électromagnétique. Pour cela, montrez que si  $\phi_a$  représente le quadri-potential  $A_\mu$ , alors  $(\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta})$ . Calculez  $X$  et comparez à ce qu'on a fait dans l'exercice sur le rayonnement électromagnétique.
5. Et pour les spineurs de Dirac ? Quelle est l'expression de  $(\Sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}$  ? Quelle est l'expression du tenseur énergie-impulsion symétrisé ?