Master CFP
Parcours physique quantique
2005-2006

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 5

---

1 Le paradoxe de Klein

On se propose ici d'étudier comment une particule se réfléchit sur une barrière de potentiel. On considère donc que l'espace est séparé en une région où le potentiel V est nul (pour $z < 0$) et une région où il est positif $A^0 = V = V_0/e > 0$ (pour $z > 0$) où e est la charge de la particule.

1. On se place dans la représentation de Dirac des matrices γ. Montrez que $\psi(t, z) = \exp -i(Et - pz)u(p)$ avec

$$u(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

satisfait l'équation de Dirac dans la région où le potentiel est nul ($z < 0$). Que représente cette onde plane ?

2. Écrivez l'onde plane décrivant une particule se déplaçant vers les z négatifs dans la région $z < 0$. En ce qui concerne l'onde plane transmise dans la région $z > 0$, cherchez une solution dont la partie oscillante est $\exp -i(Et - qz)$. Ces ondes planes font intervenir des coefficients indéterminés pour l'instant...

3. En invoquant un argument de continuité de la fonction d'onde en $z = 0$, exprimez les coefficients indéterminés paramétrisant les ondes transmises et réfléchies.

4. Calculez les courants $j = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$ associés aux ondes incidentes, réfléchies et transmises, et calculez finalement les coefficients de transmission $T = j_t/j_i$ et de réflexion $R = -j_r/j_i$.

5. Étudiez le comportement du système en fonction de l'intensité du potentiel (en particulier pour de forts potentiels).

---

2 L'atome d'hydrogène

Lorsque l'on cherche les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, on doit trouver les valeurs de E telle que l'équation différentielle :

$$\left(-\frac{\Delta}{2m} - \frac{\alpha}{r} - E_{n',l}\right)\psi_{n',l} = 0 \tag{1}$$

avec $\Delta = \partial_r^2 + 2/r\partial_r - L^2/r^2$ et $L^2\psi_{n',l} = l(l+1)\psi_{n',l}$ admette des solutions $\psi_{n',l}$ normalisables. On trouve alors les niveaux d'énergie $E_{n',l} = -m\alpha^2/(2(n' + l + 1)^2)$ où n' compte le nombre de nœuds de la fonction d'onde dans la direction radiale, et doit donc être un entier positif.

1. Réécrivez les niveaux d'énergie en fonction de $n = n' + l + 1$. Quel est alors la dégénérescence du niveau d'énergie E_n ?

2. En utilisant la prescription minimale introduite dans la feuille de TD précédente, qui revient à remplacer P^μ par $P^\mu - eA^\mu$, écrivez l'équation de Klein-Gordon décrivant un électron dans le champ électrique d'un proton.

3. Montrez qu'en introduisant des variables l', E' et α', l'équation de Klein-Gordon se met sous la forme de l'équation (1), dont on connaît la solution. Donnez l'expression des énergies des états liés.

4. Effectuez un développement limité de votre expression en puissance de α jusqu'à l'ordre quatre. On voit alors intervenir les corrections non-relativistes qui lèvent (en partie) la dégénérescence des niveaux d'énergie.
Les corrections relativistes obtenues dans ce cadre ne sont pas en accord avec les expériences. L'électron n'est donc pas bien décrit par l'équation de Klein-Gordon.

5. On va maintenant traiter le même problème dans le cadre de l'équation de Dirac. Pour obtenir un formalisme proche de ce qui a été discuté jusqu'à présent, on part de l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique (en utilisant la prescription minimale). On multiplie cette équation à gauche par $(i\not{\partial} - e\not{A} + m)$. Vous exprimerez le résultat en fonction des matrices $\sigma^{\mu\nu} = i/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

6. On se place dans la représentation chirale des matrices γ, dans laquelle

$$\sigma^{0j} = i \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix}$$

Montrez que l'équation de Dirac se met maintenant sous la forme : $A\psi_\pm = 0$ avec

$$A = -\Delta - \frac{\alpha^2 \pm i\alpha\vec{\sigma}\cdot\hat{r}}{r^2} - \frac{2\alpha E}{r} - (E^2 - m^2)$$

où $\psi_\pm$ correspondent aux spineurs droit et gauche à deux composantes.

7. Écrivez la partie en $1/r^2$ de A (attention, il y a une contribution venant du laplacien...). On peut montrer que $\vec{J} = \vec{L} + \vec{\sigma}/2$ commute avec A et avec L^2. On peut donc se placer dans le sous-espace où J^2, J_z et L^2 ont pour valeurs propres $j(j+1)$, m et $l(l+1)$. Montrez que $l = l_\pm = j \pm \frac{1}{2}$. On veut écrire la partie de A en $1/r^2$ dans le sous espace spécifié au-dessus (vous devez obtenir une matrice 2×2). Dans ce sous-espace, on peut représenter $\sigma\cdot\hat{r}$ par la matrice σ_x. Montrez que les valeurs propres de cette matrice sont : $\lambda(\lambda+1)$ avec $\lambda = ((j+1/2)^2 - \alpha^2)^{1/2}$ et $\lambda = ((j+1/2)^2 - \alpha^2)^{1/2} - 1$.

8. On peut finalement trouver les niveaux d'énergie autorisés en suivant la méthode décrite dans la question **3.**

9. Faites un développement limité de votre solution à l'ordre 4 en α, et trouvez la différence d'énergie entre les niveaux $2P_{1/2}$ et $2P_{3/2}$.