

## 1 Représentations du groupe de Poincaré

Pour trouver les représentations irréductibles du groupe de Poincaré, il faut d'abord déterminer les représentations du petit groupe<sup>1</sup> associé à la quadri-impulsion de la particule associée à cette représentation.

1. Pour les particules massives, on peut se mettre dans le référentiel du centre de masse. Quel est le quadri-vecteur impulsion de la particule dans ce référentiel ?
2. Quel est le petit groupe associé à cette impulsion (considérez les transformations proches de l'identité) ? Quelles sont les représentation irréductibles de ce petit groupe ?
3. Pour une particule de masse nulle, on ne peut pas se mettre dans un "référentiel au repos". On considère une quadri-impulsion dont la partie spatiale pointe dans la direction  $z$ . Quelle est la forme de cette quadri-impulsion ?
4. Quel est le petit groupe associé à cette quadri-impulsion (considérez uniquement les transformations proches de l'identité) ? Combien y-a-t'il de générateurs ? Quelles sont les relations de commutation de ces générateurs ?
5. Pouvez-vous trouver un opérateur de Casimir de ce petit groupe ?
6. Montrez que l'algèbre de Lie du petit groupe est celle du groupe Euclidien  $E(2)$  des isométries du plan : translation  $p_x$  et  $p_y$  et rotation  $r_z$ .

## 2 Spin du photon et du graviton

Pour décrire les degrés de liberté interne d'une particule de masse nulle, on utilise l'hélicité  $h$  qui correspond à la projection du spin le long de l'impulsion (tridimensionnelle) de la particule.

1. Dans la jauge de Lorentz, le quadrivecteur potentiel satisfait la relation  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Dans cette jauge, l'équation dynamique pour  $A$  s'écrit  $\square A^\mu = J^\mu$ . Quelle relation doit satisfaire  $J^\mu$  pour que les deux équations précédentes soient compatibles ? Quelle est l'interprétation de cette relation ?
2. Trouvez la solution de l'équation de propagation correspondant à une onde monochromatique planaire se propageant dans la direction  $\vec{e}_3$ . Montrez que par un changement de jauge, on peut s'affranchir des composantes temporelle et spatiale dans la direction de propagation du quadripotentiel. Exprimez votre solution en terme des vecteurs  $\vec{e}_\pm = \vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2$ .
3. On effectue une rotation d'angle  $\theta$  dans la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Comment se transforme  $A$  ? Quelles sont les hélicités de l'onde électromagnétique ? Caractériser les états d'hélicité bien définie (états propres de la rotation). À quel type de polarisation correspondent-ils ?
4. Dans le cadre de la relativité générale, on décrit l'interaction gravitationnelle comme une courbure de l'espace-temps, courbure codée dans un tenseur métrique  $g_{\mu\nu}(x)$  non uniforme dans l'espace-temps. La dynamique du tenseur métrique est donnée par l'équation d'Einstein :  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$  où  $G$  est le tenseur d'Einstein qui dépend (de manière non-linéaire) du tenseur métrique et  $T$  est le tenseur énergie-impulsion, qui joue le rôle de sources pour le champ gravitationnel. On peut linéariser cette équation dans la limite des petites déformations de l'espace-temps :  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  avec  $h$  symétrique. On introduit finalement  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  et  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu}$ . Les équations linéarisées présentent

<sup>1</sup>Le petit groupe associé à un quadri-vecteur est le sous-groupe de Lorentz qui laisse ce quadrivecteur inchangé.

une invariance de jauge (du même type qu'en électromagnétisme). On peut fixer la jauge en imposant la relation  $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ . L'équation dynamique pour  $\bar{h}$  prend alors la forme :  $\square \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi G T^{\alpha\beta}$ . Que peut-on dire de la trace de  $\bar{h}$ ? Quelle relation doit satisfaire  $T$  pour que les deux équations précédentes soient compatibles? On reviendra dans la suite sur la signification de cette relation.

5. Trouvez la solution de l'équation de propagation dans le vide correspondant à une onde plane monochromatique se propage dans la direction  $\vec{e}_3$ . Comme dans le cas de l'onde électromagnétique, par un changement de jauge on peut décomposer l'onde sur deux polarisations caractérisées par des matrices  $M_+$  et  $M_\times$  définies par  $M_{+,11} = -M_{+,22} = 1$  et  $M_{\times,21} = M_{\times,12} = 1$ , les autres composantes étant nulles.

6. On effectue une rotation d'angle  $\theta$  dans la direction du vecteur d'onde. Comment se transforme  $\bar{h}$ ? Quelles sont les hélicités du champ gravitationnel? Que peut-on dire du spin du graviton?

### 3 Équation de Dirac, canal historique

Historiquement, la première équation de la mécanique quantique relativiste pour une particule libre est l'équation de Klein-Gordon<sup>2</sup> :  $(\square + m^2)\psi = 0$ , que l'on obtient facilement en identifiant  $P^\mu = i\partial^\mu$ . Cette équation n'est toutefois pas satisfaisante pour décrire l'électron. En particulier, elle ne reproduit pas la structure fine de l'atome d'hydrogène. D'autre part, dans l'interprétation habituelle de la mécanique quantique,  $\psi$  doit nous permettre de calculer une densité de probabilité, qui satisfait une équation de continuité :  $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ .

1. Montrez que dans l'équation de Schrödinger  $|\psi|^2$  satisfait une équation de continuité, avec un courant de probabilité  $\vec{j}$  que vous déterminerez.

2. Pour l'équation de Klein-Gordon, montrez que  $\rho = \frac{i}{2m}(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*)$  et  $\vec{j} = -\frac{i}{2m}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$  satisfont l'équation de continuité. Le problème ici est que  $\rho$  n'est pas forcément positif, donc on ne peut pas l'interpréter comme une densité de probabilité...

3. Dirac comprit que ce problème vient du fait qu'une dérivée seconde par rapport au temps intervient dans l'équation de Klein-Gordon. D'où son idée de réécrire cette équation sous la forme :  $i\partial_t \psi = \mathcal{H}\psi$ .  $\mathcal{H}$  doit être choisi de telle sorte que si l'on dérive par rapport au temps cette équation, on retrouve l'équation de Klein-Gordon. Afin que l'équation soit invariante sous Lorentz, il est nécessaire que  $\mathcal{H}$  fasse intervenir des dérivées premières par rapport aux coordonnées d'espace. On paramétrise donc  $\mathcal{H} = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m$ . Quelles relations doivent satisfaire  $\alpha_i$  et  $\beta$ ?

4. On introduit  $\gamma^0 = \beta$ ,  $\gamma^i = \beta \alpha_i$ . Montrez que l'anticommutateur  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ . Montrez que  $\psi$  satisfait l'équation  $(i\partial - m)\psi = 0$  où  $\mathcal{X} = A_\mu \gamma^\mu$ . On retrouve ainsi l'équation de Dirac.

### 4 Covariance de l'équation de Dirac

La physique étant invariante sous les transformations de Lorentz, l'équation de Dirac doit être covariante : si dans un référentiel  $(i\partial - m)\psi(x) = 0$ , alors dans un autre référentiel obtenu par la transformation de Lorentz  $\Lambda$ ,  $(i\partial' - m)\psi'(x') = 0$ , où  $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ .

1. Quelle relation doit satisfaire  $S(\Lambda)$  pour une transformation de Lorentz quelconque?

2. Pour une transformation de Lorentz proche de l'identité,  $S(\Lambda = \mathbb{1} + \omega) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$  avec  $\sigma^{\mu\nu}$  antisymétrique. Quelles relations doivent satisfaire les  $\sigma^{\mu\nu}$ ?

3. Montrez que  $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$  satisfait cette relation.

<sup>2</sup>Schrödinger étudia d'abord cette équation relativiste (avant Klein et Gordon), avant de considérer sa limite non relativiste : l'équation de Schrödinger...

4. Dans la représentation chirale des matrices  $\gamma$  :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez  $\sigma_{0i}$  et  $\sigma_{ij}$ .

5. Déterminez les matrices associées à une rotation et à un boost infinitésimal.

## 5 Dirac et le couplage au champ électromagnétique

Il existe une façon très simple d'introduire dans l'équation de Dirac une interaction au champ électromagnétique : la prescription minimale, qui revient à remplacer  $P^\mu$  par  $P^\mu - eA^\mu$ .

1. Écrivez l'équation de Dirac pour un électron dans un champ électromagnétique. Écrivez cette équation sous la forme  $i\partial_t\psi = \dots$ .

2. On veut maintenant trouver la limite non relativiste de cette équation. Pour ce faire, il est plus commode d'utiliser la représentation de Dirac des matrices  $\gamma$  :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

et l'on décompose les spineurs  $\psi$  à 4 composantes en deux spineurs  $\phi$  et  $\chi$  à 2 composantes. Écrivez les équations d'évolution pour  $\phi$  et  $\chi$ .

3. On cherche à décrire des particules de masse  $m$  dont les énergies sont proches de leur énergie de masse. les fonctions d'onde ont de fortes oscillations temporelles, typiquement comme  $\exp(imt)$ . On introduit les nouveaux spineurs  $\Phi = \exp(imt)\phi$  et  $X = \exp(imt)\chi$  dont les oscillations sont réduites. Trouvez les équations d'évolution pour  $\Phi$  et  $X$ . En supposant que  $eA_0 \ll m$ , montrez que  $X$  est proportionnel à  $\Phi$ .

4. On peut maintenant dériver une équation fermée donnant l'évolution de  $\Phi$  :  $i\partial_t\Phi = \dots$ . Dans le membre de droite de cette équation, on trouve une partie proportionnelle à l'identité (par rapport aux indices de spin), et une partie qui ne l'est pas. Réécrivez cette partie en fonction du champ magnétique. Ce dernier terme correspond au couplage du spin de l'électron au champ magnétique, et donne un rapport gyromagnétique de 2.