Master CFP
Parcours physique quantique
2005-2006

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 3

---

1 Formules utiles

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_i\ \sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Transformation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ générale : $\Lambda = \exp(i\vec{\phi}\cdot\vec{K} + i\vec{\theta}\cdot\vec{J})$
Pour des quadrivecteurs,

$$\omega^\mu{}_\nu = (i\vec{\phi}\cdot\vec{K} + i\vec{\theta}\cdot\vec{J})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\phi_1 & -\phi_2 & -\phi_3 \\ -\phi_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\phi_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ -\phi_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algèbre de Lie du groupe de Lorentz restreint : deux su(2) indépendants dont les générateurs sont $\vec{N}_\pm = (\vec{J} \pm i\vec{K})/2$.
Générateur des rotations (pour éviter des confusions, on note ces matrices 3×3 en minuscule) : $(j_k)_{ij} = -i\epsilon_{ijk}$.

---

2 Représentations du groupe de Lorentz restreint I

On se propose ici d'étudier les représentations de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ de dimension 2.

1. Exprimez J_i et K_i en fonction des matrices de Pauli pour la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ et pour la représentation $(0, \frac{1}{2})$.

2. Écrivez la matrice $M_L(\vec{\theta}, \vec{\phi})$ associée à une transformation générale de Lorentz restreint dans la représentation $(\frac{1}{2}, 0)$ (Il faut utiliser l'exponentielle d'une transformation infinitésimale). De la même façon, écrivez la matrice $M_R(\vec{\theta}, \vec{\phi})$ pour la représentation $(0, \frac{1}{2})$. Rem : les indices R et L signifient *gauche* et *droite*. On sent que la parité doit avoir un rôle dans cette histoire...

3. Ces deux représentations sont-elle équivalentes ? Pour répondre à cette question, il suffit d'étudier le voisinage de l'identité...

4. Montrez que $M_R = (M_L^\dagger)^{-1}$.

5. On considère les spineurs ψ_L et χ_R (vecteurs colonnes à deux entrées complexes) se transformant sous une transformation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ par action des matrice M_L et M_R. Comment se transforme $\psi_L^\dagger \cdot \chi_R$?

6. Comment se transforme $\psi_L^\star$? En utilisant l'égalité (que vous démontrerez) $\sigma_2\sigma_i\sigma_2 = -\sigma_i^\star$ valable pour tout i, montrez que $\sigma_2\psi_L^\star$ se transforme comme un spineur *droit*. Qu'en est-il de $\sigma_2\chi_R^\star$? On dispose ainsi d'une opération (appelée conjugaison de charge[1]) pour construire un spineur *gauche* à partir d'un spineur *droit* : $\psi_R = \psi_L^C = i\sigma_2\psi_L^\star$ et qui transforme réciproquement un spineur *droit* en un spineur *gauche* : $\chi_L = \chi_R^C = -i\sigma_2\chi_R^\star$

[1] pour des raisons qui s'éclaireront dans la suite du cours...

3 Comment construire des quadrivecteurs à base de spineurs

On considère les spineurs gauche ψ_L χ_L et les spineurs droit ψ_R et χ_R.

1. Comment se transforme $\psi_L^\dagger$?

2. Comment se transforme $\psi_L^\dagger \widetilde{\Sigma}^\mu \chi_L$, où $\widetilde{\Sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma_i)$ (considérez une transformation proche de l'identité...) ? Et $\psi_R^\dagger \Sigma^\mu \chi_R$ avec $\Sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma_i)$?

4 Les tenseurs antisymétriques

On souhaite ici étudier les représentations $(1,0)$ et $(0,1)$.

1. Quelle est la dimension de cette représentation ?

2. Pour la représentation $(1,0)$, exprimez $\vec{J}$ et $\vec{K}$ en fonction des matrices j_i. Quelle est la matrice associée à une transformation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$? Et pour une transformation proche de l'identité ?

3. Ces matrices agissent sur des vecteurs à 3 composantes, que l'on décompose en partie réelle et partie imaginaire : $R_i + i\, C_i$. Comment changent les composantes de $\vec{R}$ et $\vec{C}$ lors d'une transformation proche de l'identité ?

4. On souhaite montrer que ces transformations coïncident avec celles d'un tenseur antisymétrique. Pour être concret, considérons le tenseur du champ électromagnétique F :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comment se transforment les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ lors d'une transformation de Lorentz proche de l'identité ?

5. Montrez que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ se transforment comme $\vec{R}$ et $\vec{C}$. On en déduit que $(1,0)$ est la représentation associée aux tenseurs antisymétriques réels.

6. Que se passe-t'il pour la représentation $(0,1)$?

5 Parité

L'étude précédente a été menée sur le groupe de Lorentz restreint. On veut maintenant comprendre ce qui se passe sous lors de l'opération de parité P (changement de signe des composantes spatiales).

1. Calculez $P\Lambda P$ pour une transformation de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ proche de l'identité.

2. En exponentiant cette formule, trouvez $P\Lambda P$ pour une transformation quelconque.

3. À la lumière de la question précédente, comment peut-on interpréter la différence entre M_L et M_R de l'exercice 2 ?

4. Afin de représenter l'action de la parité, on associe à chaque spineur gauche ψ_L un spineur droit ψ_R. L'action de la parité est d'échanger ces spineurs. À l'aide de ψ_L, ψ_R et χ_L χ_R, construisez un scalaire et un pseudo-scalaire sous le groupe de Lorentz ortochrone (le second change de signe sous parité, le premier non).

5. Construisez un quadrivecteur et un pseudo-quadrivecteur à partir des deux spineurs.

6 Relation entre Lorentz restreint et SL$(2, \mathbb{C})$

On se propose ici d'étudier la relation entre $\mathrm{SO}(3,1)$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Cet exercice ressemble beaucoup à celui sur la relation entre SO(3) et SU(2). On va explicitement construire une application de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SO}(3,1)$ et vérifier que cette application préserve la loi de composition (homomorphisme). On verra qu'en fait, il existe deux représentations inéquivalentes de $\mathrm{SO}(3,1)$.

1. On définit $\Sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma_i)$ et $\widetilde{\Sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma_i)$. On peut comme d'habitude faire descendre les indices à l'aide du tenseur $g_{\mu\nu}$. Montrez que $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Sigma^\mu\widetilde{\Sigma}^\nu = g^{\mu\nu}$.

2. On considère l'ensemble des matrices hemitiennes ($U^\dagger$=U). Avec combien de réels peut-on paramétrer cet ensemble ? Montrez que l'on peut écrire toute matrice hermitienne sous la forme $X = x^\mu\Sigma_\mu$.

3. Exprimez $\det X$ en terme des x^μ.

4. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est le groupe des matrices 2×2 de déterminant unité. Avec combien de réels peut-on paramétrer ce groupe ?

5. Si M est une matrice de ce groupe, montrez que $MXM^\dagger$ est hermitique, et peut donc être décomposé sur les matrices Σ^μ : $MXM^\dagger = x'^\mu\Sigma_\mu$. Montrez que $x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu$. Quel est le groupe engendré par ces transformations ?

6. On exprime le changement de coordonnées sous la forme $x'^\mu = \Lambda(M)^\mu{}_\nu x^\nu$. Vérifiez que cette application est un homomorphisme (respecte la structure de groupe).

7. Exprimez $\Lambda(M)^\mu{}_\nu$ en fonction de la matrice M. Observez que cette application associe la même transformée de Lorentz aux matrices M et $-M$. Ceci justifie la relation $\mathcal{L}_+^\uparrow$ $=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

8. Vérifiez que l'homomorphisme que vous avez construit est compatible avec l'application $M_L(\vec{\theta}, \vec{\phi})$. Il vous suffit de regarder les transformations proches de l'identité... On notera dans la suite cette application $\Lambda_L(M)$.

9. Qu'en est-il de $M_R(\vec{\theta}, \vec{\phi})$? En fait, on peut refaire toute la discussion précédente en intervertissant les Σ^μ et les $\tilde{\Sigma}^\mu$ (convainquez-vous en). On construit ainsi l'application $\Lambda_R(M)$ (que vous écrirez). Vérifiez que cette application est compatible (au voisinage de l'identité) avec $M_R(\vec{\theta}, \vec{\phi})$.

7 Autres représentations de SO(3) ?

1. On associe à une rotation d'angle θ autour du vecteur $\hat{n}$ la matrice de SO(3) $T(\theta, \hat{n}) = \exp(-i\theta\hat{n} \cdot \vec{J})$ (attention au signe !) avec la même définition des J que dans les exercices précédents $(J(_k)_{ij} = -i\epsilon_{ijk})$. Est-ce que cette application engendre une représentation du groupe des rotations ?

2. On considère les trois matrices $\tau_i = -\sigma_i^\star$ obtenues en prenant le complexe conjugué des matrices de Pauli. Trouvez les relations de commutation des τ_i. Est-ce que $\exp(i\frac{\theta}{2}\hat{n} \cdot \vec{\tau}) = \{\exp(i\frac{\theta}{2}\hat{n} \cdot \vec{\sigma})\}^\star$ engendre une représentation du groupe des rotations ?

3. Cette représentation est-elle indépendante (inéquivalente) de celle engendrée par $\exp(i\frac{\theta}{2}\hat{n} \cdot \vec{\sigma})$?