Master CFP
Parcours physique quantique
2005-2006

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Feuille 1

---

1 Espace euclidien à 3 dimensions

On utilisera très souvent la convention d'Einstein de sommation implicite sur un indice répété (ce qui permet d'écrire de façon concise des expressions tensorielles). Ainsi par exemple, si x_i et y_i représentent les composantes des vecteurs à trois composantes $\vec{x}$ et $\vec{y}$, alors $x_i y_i = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = \vec{x} \cdot \vec{y}$ est le produit scalaire des deux vecteurs.
On introduit le symbole de Kronecker δ_{ij} (δ_{ij} vaut 1 si $i = j$, 0 si non) et le tenseur totalement antisymétrique ϵ_{ijk} (avec $\epsilon_{123} = +1$).

1. Calculez δ_{ii}, $\delta_{ik}\delta_{kj}$ et ϵ_{iik}.

2. Exprimez $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$, puis $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}$ en fonction de symboles de Kronecker. Calculez $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$.

3. Écrivez $\vec{x} \times \vec{y}$ et $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$ dans cette notation. Prouvez la cyclicité de cette dernière expression.

4. Soient A et B deux matrices. Que représentent A_{ii}, $A_{ij}B_{jk}$, $A_{ij}B_{ij}$, $\frac{1}{6}A_{il}A_{jm}A_{kn}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}$?

5. Soient S et A deux matrices, respectivement symétrique et antisymétrique. Montrez que $A_{ij}S_{ij} = 0$, $\epsilon_{ijk}S_{jk} = 0$.

6. Soient $V(\vec{x})$ et $\vec{A}(\vec{x})$ des champs scalaire et vectoriel. On note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Écrivez dans ces notations $\vec{\nabla}V$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, ΔV et $\Delta \cdot \vec{A}$.

7. Montrez que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = \vec{0}$, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

---

2 Transformations de Lorentz

Dans un espace de Minkowski pourvu d'un référentiel inertiel (on se place dans des unités où la vitesse de la lumière $c = 1$), on repère un évènement par un vecteur position à trois composantes $\vec{x}$, et un temps t, que l'on regroupe dans un quadrivecteur $\underline{x}$. Les composantes contravariantes de ce quadrivecteur sont notées x^μ ; $\mu = 0$ correspond à la coordonnée temporelle, $\mu = 1, 2, 3$ aux cordonnées spatiales.
On introduit l'intervalle de temps propre $d\tau$ entre deux évènements séparés par le quadrivecteur $d\underline{x}$: $d\tau^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$, que l'on réécrit dans la convention d'Einstein : $d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ (attention, dans l'espace de Minkowski, on ne somme que des indices qui ne sont pas à la même altitude : un en haut, l'autre en bas). Les composantes du tenseur métrique sont : $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ et $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ dans tous les référentiels inertiels.
Le tenseur métrique permet également de définir les composantes covariantes $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ d'un quadrivecteur. On utilise également $g^{\mu\nu}$ qui permet de faire la transformation inverse : $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$.

1. Écrivez les composantes $g^{\mu\nu}$.

2. On s'intéresse aux transformations $dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$ qui laissent inchangées l'intervalle de temps propre. En termes physiques, ce changement de coordonnées correspond à un changement de référentiel inertiel par rapport auquel on détermine les coordonnées d'espace-temps des évènements. L'ensemble de ces transformations forme le groupe de Lorentz. Quelle relation satisfait $\Lambda^\mu{}_\nu$?

3. Écrivez la relation précédente sous forme matricielle. Que peut-on dire sur le déterminant de $\Lambda^\mu{}_\nu$? Montrez d'autre part que soit $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ soit $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Remarquez que le groupe de Lorentz se décompose en différents sous-espaces non connexes : d'une part les transformations propres ($\det\Lambda = 1$, noté $\mathcal{L}_+$) et impropres ($\det\Lambda = -1$, noté $\mathcal{L}_-$), d'autre part les transformation orthochrones ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$, noté $\mathcal{L}^\uparrow$) et non-orthochrones ($\Lambda^0{}_0 \leq 1$, noté $\mathcal{L}^\downarrow$). On peut limiter l'étude du groupe de Lorentz à

$\mathcal{L}_+^\uparrow$, car on génère les autres couches en utilisant les opérateurs renversement du temps T ($x^0 \to -x^0$, $\vec{x} \to \vec{x}$) et parité P ($x^0 \to x^0$, $\vec{x} \to -\vec{x}$).

4. Exprimez $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ en fonction de $\Lambda^\mu{}_\nu$ (cette expression devient très simple si l'on se souvient que $g^{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ servent à monter et descendre les indices).

5. Montrez que $\mathcal{L}_+$, $\mathcal{L}^\uparrow$ et $\mathcal{L}_+^\uparrow$ forment des sous-groupes de $\mathcal{L}$ (il est utile de montrer avant que $\vec{A} = (\Lambda^i{}_0)$ et $\vec{B} = (\Lambda^0{}_i)$ sont des vecteurs de norme inférieure à $|\Lambda^0{}_0|$).

6. Comment se transforment les composantes covariantes du quadrivecteur $\underline{x}$?

7. On considère deux quadrivecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$, et un tenseur A, dont les composantes contravariantes se transforment comme $A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta A^{\alpha\beta}$ Comment se transforme $x_\mu y^\mu$? $A^{\mu\nu} x_\nu$? $A_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$? Discutez l'intérêt, dans la convention d'Einstein, de sommer sur des indices à des "altitudes" différentes (une fois co- une fois contra-variants).

8. On introduit l'opérateur différentiel $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Comment se transforment les composantes de cet opérateur lors d'une transformation de Lorentz ?

9. On considère les transformations infinitésimales $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ avec $\omega^\mu{}_\nu \ll 1$. Quelles propriété doit satisfaire $\omega^\mu{}_\nu$? Combien de paramètres indépendants existe-t'il ? À quel type de changement de référentiel correspond chacun de ces paramètres ?

10. On considère maintenant une transformation non-infinitésimale de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. On se spécialise (pour simplifier) aux transformations qui mélangent uniquement la composante temporelle x^0 et la composante spatiale x^1. Donnez la forme la plus générale d'une telle transformation, qui dépend d'un paramètre libre. Reliez ce paramètre à la vitesse relative entre les deux référentiels.

---

3 Dérivées fonctionnelles

On considère un système de N particules ponctuelles de masse m contraintes à se déplacer le long d'un rail linéaire. Chaque masse est reliée aux deux masses voisines par des ressorts de constante de raideur k. La première et la dernière masse sont reliées par des ressorts à des murs. On repère la position de la i$^\text{e}$ particule à l'instant t par la variable $\phi_i(t)$. À l'équilibre, les masses sont séparées d'une distance a, et $\phi_i = 0$.

1. Écrivez le Lagrangien et l'action du système.

2. Dérivez les équations du mouvement en utilisant le principe variationnel. Pour cela, calculez l'action pour une configuration de champ $\phi_i + \delta\phi_i$, et développez au premier ordre en $\delta\phi_i$.

3. On veut maintenant trouver la limite continue de cette équation du mouvement. On fera intervenir la fonction continue $\phi(x,t)$, la masse linéique $\mu = m/a$ et le module d'Young $Y = ka$.

4. Retrouvez ce résultat en faisant d'abord la limite continue de l'action (il faudra faire intervenir une intégrale sur la variable x), puis en invoquant le principe variationnel.

5. On appelle fonctionnelle une fonction qui à une fonction associe un nombre (par exemple, l'action $S[\phi]$ est une fonctionnelle). La dérivée fonctionnelle est définie comme :

$$\frac{\delta A}{\delta\phi(x,t)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{A[\phi(x',t') + \epsilon\delta(x-x')\delta(t-t')] - A[\phi(x',t')]}{\epsilon}$$

On peut alors écrire :

$$S[\phi+\delta\phi] - S[\phi] = \int dx\ dt \frac{\delta A}{\delta\phi(x,t)} \delta\phi(x,t) + o(\delta\phi^2)$$

Par conséquent, les équations du mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x,t)} = 0$$

Calculez les dérivées fonctionnelles de $\int dx\ dt\ \phi(x,t)$, $\int dx\ dt\ \phi(x,t)^n$, $\int dx\ dt\ \phi(x,t)^o \partial_t^m \partial_x^n \phi(x,t)$ et $\int dx\ dt\ (\partial_t \phi(x,t))^2$ par rapport à $\phi(x',t')$. On retrouve ces résultats avec la règle :

$$\frac{\delta\phi(x,t)}{\delta\phi(x',t')} = \delta(t-t')\delta(x-x')$$

et en utilisant le fait que la dérivée fonctionnelle agissant dans l'espace des fonctions alors que ∂_t, ∂_x, $\int\ dx\ dt$ etc... jouent dans l'espace-temps, ces opérations commutent. Armés de ces deux remarques, on peut calculer simplement les dérivées fonctionnelles.

6. Calculez la dérivée fonctionnelle de l'action par rapport à $\phi(x,t)$, et retrouvez les équations du mouvement.

7. Les masses sont en outre attachées à des ressorts de constante de raideur k', dont l'extrémité est attachée au rail, et dont la position d'équilibre est à nouveau $\phi_i = 0$. Trouvez le Lagrangien de ce problème.

8. En utilisant le principe variationnel, trouvez les équations du mouvement, dont vous donnerez la limite continue.

9. Trouvez la limite continue de l'action, et déterminez les équations du mouvement en utilisant la dérivée fonctionnelle.

---

4 Équations de Maxwell

On introduit le quadrivecteur potentiel $\underline{A}$, dont les composantes contravariantes sont : $A^\mu = (V, \vec{A})$. Le tenseur de champ électromagnétique est défini comme : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

1. Exprimez les composantes $F^{\mu\nu}$ en fonction des composantes du champ électrique et du champ magnétique.

2. Déterminez comment se transforment les composantes des champs électrique et magnétiques lors d'un boost dans la direction x.

3. On introduit le tenseur dual $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, où $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur[1] de Levi-Civita complètement antisymétrique avec $\epsilon^{0123} = +1$. Exprimez les composantes de $\tilde{F}^{\mu\nu}$ en fonction des composantes des champs électriques et magnétiques.

4. Calculez $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$ et $\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$. Comment se transforment ces quantités sous les transformations de Lorentz ?

5. On introduit le quadrivecteur densité de courant $\underline{J}$ dont les composantes contravariantes sont $J^\mu = (\rho, \vec{j})$. Vérifiez que les équations de Maxwell (dans les unités de Heaviside-Lorentz) sont données par les deux expressions covariantes : $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$ et $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$. Montrez que la première équation implique $\partial_\mu J^\mu = 0$, ce qui traduit la conservation de la charge électrique.

6. En utilisant le principe variationnel, montrez que les équations de Maxwell inhomogène découlent de l'action $S = \int d^4x\ \mathcal{L}$, avec :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

alors que les équations de Maxwell homogène découlent directement de l'écriture de $F^{\mu\nu}$ en terme du 4-potentiel.

7. Calculez les nouvelles équations de Maxwell si l'on ajoute à la densité Lagrangienne un terme proportionnel à $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$.

---

[1] Vous pouvez montrer (mais c'est un peu long) que le tenseur de Levi-Civita est invariant (à un signe près) sous les éléments du groupe de Lorentz, c'est à dire que $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \pm\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\Lambda^\rho{}_\gamma\Lambda^\sigma{}_\delta\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Le signe plus intervient pour les éléments de $\mathcal{L}_+$.