Université Denis Diderot

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : PHYSIQUE THÉORIQUE

présentée par

Matthieu TISSIER

pour obtenir le titre de docteur de l'Université Paris VII.

Sujet :

Une approche non perturbative de systèmes frustrés et de systèmes désordonnés

Soutenue le 12 Décembre 2001 devant la commision d'examen composée de :

Édouard BRÉZIN	Examinateur
Bertrand DELAMOTTE	Co-directeur de thèse
Jean-Pierre GAZEAU	Président
Thierry JOLICŒUR	Rapporteur
Marc MÉZARD	Examinateur
Dominique MOUHANNA	Directeur de thèse
Gilles TARJUS	Rapporteur

À Sophie

Remerciements

Je tiens à remercier les membres du LPTHE et son directeur, Laurent Beaulieu, pour la qualité de leur accueil.

Je remercie tout particulièrement Dominique Mouhanna et Bertrand Delamotte pour leur disponibilité et l'attention qu'ils ont toujours porté à mes questions. Grâce à leur dynamisme et leur enthousiasme, notre travail commun a été un réel plaisir.

Je souhaite également remercier les membres du jury, Jean-Pierre Gazeau, Marc Mézard et Édouard Brézin. J'exprime toute ma gratitude à Gilles Tarjus et Thierry Jolicœur qui ont accepté la tâche de rapporteur.

Je suis très reconnaissant envers Annie Richard, Sylvie Dalla-Foglia et Marie-Christine Lévy, et envers Marco Picco qui a toujours été disponible pour résoudre mes problèmes informatiques.

Je souhaite maintenant saluer les habitués du sandwich de midi, et tout d'abord Alain Laverne avec qui j'ai eu la chance d'enseigner. Je remercie chaleureusement Julien Vidal qui m'a gentiment offert le gite et le couvert pendant les jours noirs, et qui a en outre fait une lecture détaillée de mon manuscrit. Merci également à Benoit Douçot, Rémy Mosseri, Bernard Diu, Drazen Zanchi, Pierre-Yves Casteill, Sébastien Dusuel et Léonie Canet pour leur gentillesse et leur amitié.

Je souhaite enfin exprimer toute ma reconnaissance à Yvain et Aurélien Nicolet, et Jean-Philippe Attané pour leur amitié, “conjonction de la bienveillance, du charme et de la vertu”. Je garde également une pensée à la mémoire de Sarah Darcueil.

Finalement, je remercie ma famille, la tribu Thomas et mes proches pour leur soutien, et enfin Sophie pour son amour et notre vie commune.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'étude des transitions de phase est un domaine très riche et fertile de la physique, et bien qu'une étude systématique de ces phénomènes ait été entreprise dès le début du siècle, ce sujet est toujours l'objet d'une intense activité. Cette impressionnante longévité peut être en partie expliquée par le fait que ce phénomène est très commun dans la nature : on s'intéresse à des phénomènes de transition de phase dans des branches de la physique contemporaine aussi diverses que la cosmologie, la physique des particules, la physique du solide. D'une manière générale, une transition de phase est susceptible de se produire dans tous les systèmes ayant un nombre macroscopique de degrés de liberté en interaction.

L'ensemble des transitions de phase est couramment séparé en deux groupes. Les transitions du premier ordre (ou transitions discontinues) sont caractérisées par un saut du paramètre d'ordre à la température de transition de phase et une chaleur latente non nulle. En outre, la longueur de corrélation ξ du système reste finie dans tout le domaine de température. On peut donc considérer que le système est constitué de domaines d'extension spatiale ξ, et que seuls les degrés de liberté à l'intérieur d'un domaine interagissent fortement. Les propriétés thermodynamiques du système peuvent donc être obtenues en considérant l'interaction d'un nombre fini (de l'ordre de ξ^d, où d est la dimension de l'espace) de degrés de liberté.

Les transitions du second ordre (ou transitions continues) présentent les propriétés inverses : pas de saut du paramètre d'ordre à la transition, pas de chaleur latente, et divergence de la longueur de corrélation à la température critique. Cette dernière caractéristique est centrale dans l'étude des propriétés du système. La divergence de la longueur de corrélation induit une forte complexité technique (puisque le système présente un nombre macroscopique de degrés de liberté en interaction), mais, chose étonnante, simplifie énormément la phénoménologie des transitions de phase, et ceci de deux façons.

La divergence de la longueur de corrélation peut être interprétée comme une disparition d'une échelle de longueur caractéristique du système, qui présente alors une invariance d'échelle. Cette invariance se traduit par la propriété remarquable que les relations entre les quantités thermodynamiques et les paramètres externes sont des lois de puissance. Si l'on prend pour exemple la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique, paradigme de la transition continue, on observe que la dépendance de l'aimantation M avec la température T se comporte (pour des températures proches de la température critique) comme :

$$M = M_0(T_c - T)^{\beta}. \tag{1.1}$$

Remarquons ici que cette loi de puissance est entièrement déterminée par trois paramètres : la température critique T_c, l'amplitude M_0, et un exposant critique β. On observe le même type de comportement pour la longueur de corrélation et pour la susceptibilité magnétique.

La deuxième conséquence importante qui découle de la divergence de la longueur de corrélation est le phénomène d'universalité : certaines grandeurs physiques, appelées quantités universelles, sont dans une large mesure indépendantes des détails microscopiques du système considéré. Parmi les quantités universelles, on trouve en particulier les exposants critiques, qui déterminent la singularité des quantités thermodynamiques à la transition de phase. Le phénomène d'universalité nous conduit naturellement à regrouper les transitions présentant les mêmes propriétés universelles, dans des classes d'universalité. Il apparaît à l'heure actuelle que les classes d'universalité sont décrites par quelques propriétés communes aux systèmes qui les constituent, notamment la dimension de l'espace, la portée des interactions, et le schéma de brisure de symétrie à la transition de phase [1].

Parmi l'ensemble des classes d'universalité, les plus étudiées sont sans aucun doute celles des théories vectorielles, caractérisées par un schéma de brisure de symétrie $O(n) \to O(n-1)$. Celles-ci sont intéressantes à plusieurs titres. D'abord, elles regroupent un grand nombre de situations physiques. Citons ici les transitions ferromagnétique-paramagnétique, les transition normal-superfluide dans l'hélium-4, les transitions de démixion, les transitions liquide-vapeur au point critique, etc. L'autre intérêt de ces classes d'universalité est plus technique et réside dans le fait que la théorie sous-jacente est parmi les plus simples que l'on puisse considérer.

Venons-en maintenant aux méthodes analytiques utilisées pour déterminer les propriétés universelles d'un système. À nouveau, la divergence de la longueur de corrélation simplifie la situation, en permettant de formuler le problème dans le continu. La transition de phase peut alors être étudiée à l'aide des méthodes de théorie quantique des champs. L'idée de cette approche consiste à calculer les corrections à l'approximation du champ moyen dues aux interactions entre les fluctuations. Les résultats du champ moyen sont exacts en dimensions plus grandes que quatre[2] pour ce qui est des

[1] Notons ici que certains systèmes présentent une transition de phase continue, sans pour autant qu'il y ait de brisure de symétrie. C'est en particulier le cas des fluides au point critique.

[2] Ceci est vrai pour la théorie vectorielle, ainsi que pour les deux classes de systèmes considérés dans ce travail. Certaines théories présentent toutefois une dimension critique supérieure différente.

quantités universelles, et l'on s'attend par conséquent à n'observer que de petites corrections pour des dimensions légèrement plus petites que quatre. Ceci conduit à étudier formellement la théorie en dimension $d = 4 - \varepsilon$ et à calculer les propriétés physiques dans un double développement de la théorie en puissances du petit paramètre ε et de la constante de couplage de l'interaction à quatre corps (terme en "φ^4" dans le Hamiltonien). On espère ainsi obtenir des prédictions pour le modèle tridimensionnel, en faisant $\varepsilon = 1$ à la fin du calcul[3]. Toutefois, les séries perturbatives obtenues sont asymptotiques, et il est nécessaire d'utiliser des techniques de resommation pour obtenir des prédictions fiables. Remarquons que d'autres méthodes, notamment les théories conformes et les techniques de matrice de diffusion, permettent d'obtenir des résultats exacts, mais ne sont appliquables qu'en dimension deux.

L'application de ces méthodes à la classe d'universalité des modèles vectoriels a permis d'obtenir une image précise de la transition de phase de ces systèmes, pour toutes les dimensions physiquement intéressantes et pour toutes les valeurs du nombre de composantes n du paramètre d'ordre vectoriel. En menant les calculs perturbatifs à des ordres élevés, des déterminations très précises des exposants critiques ont été obtenues, qui sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques.

Ce succès théorique ne doit cependant pas nous mener à la conclusion que l'étude des transitions de phase du second ordre est un chapitre clos. En effet, un grand nombre de transitions de phase d'un grand intérêt physique ne relèvent pas de la classe d'universalité des modèles vectoriels. Citons ici les transitions dans l'hélium 3, dans les réseaux de jonctions Josephson sous champ magnétique, dans les cristaux liquides smectiques, dans le modèle de Potts, dans les systèmes magnétiques en présence d'impuretés non magnétiques, etc. La physique critique de ces systèmes est très riche et présente des propriétés qui n'ont pas d'équivalent dans le modèle vectoriel. D'autre part, les approches perturbatives traditionnelles sont beaucoup moins performantes pour déterminer les propriétés universelles de ces systèmes. Dans certains cas, elles échouent même dans la description des résultats expérimentaux.

Ceci n'est en fait pas une surprise car le groupe de symétrie des modèles vectoriels est, à nombre de composantes du paramètre d'ordre fixé, le plus grand que l'on puisse concevoir[4]. On comprend ainsi que les théories vectorielles forment une classe très particulière, et leur comportement n'a donc pas de raison d'être générique de toutes les transitions de phase. On peut également observer le caractère singulier des modèles vectoriels d'un point de vue plus technique. Lorsque l'on étudie les propriétés critiques d'un système dans le cadre perturbatif d'un développement en constante de couplage, il est suffisant de considérer, dans le Hamiltonien, les termes marginaux en "φ^4". Dans les modèles vectoriels, il n'existe qu'un terme de ce type ayant la symétrie $O(n)$ désirée. Le flot du groupe de renormalisation prend donc place dans un espace à une dimension, c'est-à-dire sur une droite. En revanche, le Hamiltonien des théories non vectorielles

[3]Notons également que l'on peut étudier la théorie dans un développement en constantes de couplage directement en dimension trois. Cette approche est d'ailleurs très souvent utilisée lors des déterminations précises des exposants critiques.

[4]Nous ne considérons ici que des théories bosoniques, invariantes sous des symétries globales.

présente moins de symétries, et contient donc des termes brisant explicitement la symétrie $O(n)$. Il peut donc exister plusieurs constantes de couplages marginales, en "φ^4", de sorte que le flot du groupe de renormalisation se déroule dans un espace plus grand (un plan, un volume, etc.). La topologie du flot est donc moins contrainte, ce qui ouvre la voie à de nouveaux phénomènes.

À titre d'exemple, nous présentons ici une des propriétés qui peut apparaître dans un modèle non vectoriel, dont les implications physiques sont très intéressantes. Nous verrons que, dans certains de ces modèles, la distinction entre transitions continues (ξ diverge) et discontinues (ξ fini) n'est pas forcément aussi franche que le laisse penser la classification des transitions de phase. Nous mettrons en évidence que certains systèmes présentent une transition de phase du premier ordre, au sens usuel de l'absence de point fixe, mais avec une longueur de corrélation très grande (de l'ordre de 100.000 mailles de réseau), qui est très difficile à discriminer d'une vraie divergence expérimentalement. De telles transitions sont appelées faiblement du premier ordre, ou quasi-second ordre, ce qui indique bien leur statut intermédiaire entre les transitions continues et discontinues. Les propriétés à grande distance de ces systèmes se situent à mi-chemin entre celles rencontrées dans les transitions continues et discontinues.

Nous étudions dans ce travail deux classes de systèmes, caractéristiques de la situation décrite précédemment. Dans le chapitre 3, nous considérons des systèmes de spins soumis à des interactions compétitives. Ces systèmes présentent une transition de phase, dont le schéma de symétrie ne coïncide pas avec celui des modèles vectoriels, car le paramètre d'ordre associé à cette transition est constitué de deux vecteurs orthogonaux. Cette différence de paramètre d'ordre induit des changements considérables dans la théorie des champs utilisée pour décrire la transition. Le deuxième exemple est étudié dans le chapitre 4 et consiste en un système magnétique dans lequel on dilue des impuretés non-magnétiques. En utilisant la méthode des répliques, les propriétés critiques de ce système peuvent être obtenues en considérant un modèle vectoriel dont le Hamiltonien présente un terme brisant explicitement la symétrie $O(n)$.

Pour ces deux théories, les approches perturbatives traditionnelles donnent des résultats beaucoup moins convaincants que dans l'étude de la théorie vectorielle. Nous avons donc eu recours à une méthode du groupe de renormalisation basée sur une équation d'évolution exacte. Cette méthode est décrite en détails dans le chapitre 2. Les idées sous-jacentes à cette approche sont très proches du concept de bloc de spins de Kadanoff et de la vision de Wilson du groupe de renormalisation. L'idée d'utiliser une équation exacte pour étudier les propriétés critiques d'un système n'est pas nouvelle, mais a connu un regain de popularité durant les dix dernières années, notamment sous l'impulsion de C. Wetterich et de T. Morris. Ces approches sont très satisfaisantes par plusieurs aspects. D'abord, elles offrent un cadre théorique simple pour la description des phénomènes critiques. D'autre part, les méthodes de calcul utilisées dans la pratique permettent de retrouver, dans un cadre unique, les résultats des différentes approches perturbatives (développement en constantes de couplage, en température, et en puissances de $1/n$) dans leur domaines de validité, et d'obtenir une bonne précision pour les exposants critiques en dimension trois. Nous verrons également que cette méthode est capable de tenir compte d'effets non perturbatifs, qui sont très difficilement observés dans les approches traditionnelles. Afin d'illustrer ces propriétés, et pour montrer comment les calculs sont menés dans la pratique, nous étudions dans le chapitre 2 le cas du modèle vectoriel.

Notons finalement que le domaine d'application de cette méthode ne se limite pas au calcul des exposants critiques, mais permet également d'obtenir des informations non universelles (comme une température critique), d'observer la formation d'états liés, de déterminer un diagramme de phase. Cette méthode constitue donc un outil très puissant pour étudier les propriétés statistiques d'un système.

Chapitre 2

Notion d'action effective

2.1 Introduction

L'étude des propriétés critiques des systèmes frustrés et des systèmes dilués que nous allons mener dans la suite reposent sur une méthode non perturbative du groupe de renormalisation. Les bases de cette approche reposent sur le concept de bloc de spins : au lieu de sommer en une seule fois sur toutes les configurations du champs dans la fonction de partition, Kadanoff [Kad66] propose d'effectuer cette sommation récursivement.

Afin d'illustrer cette idée, considérons un système bidimensionnel de spins d'Ising, soumis à une interaction ferromagnétique entre plus proches voisins. Le comportement des quantités thermodynamiques est codé dans la fonction de partition :

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta \mathcal{H}[S_i]}. \tag{2.1}$$

Ici $\beta = 1/(k_B T)$, et la somme des poids de Boltzmann s'étend sur toutes les configurations possibles du système. Au lieu d'effectuer la sommation en une seule étape, Kadanoff propose de regrouper les spins par plaquette (si le système est défini sur un réseau carré, on peut regrouper les spins par quatre). Pour chaque plaquette i, on introduit une variable $\widehat{S}_i$ appelée spin (ou variable) de bloc, décrivant l'orientation majoritaire des spins sur la plaquette (voir figure 2.1). En sommant sur les degrés de liberté internes à la plaquette, on peut trouver un Hamiltonien effectif $\widehat{\mathcal{H}}[\widehat{S}]$ pour les variables de bloc. Cette procédure permet de réduire le nombre de degrés de liberté du système car on a réduit le nombre de variables sur une plaquette de quatre à un. Pour autant, la physique à grande distance découlant de ces deux Hamiltoniens est identique. En principe, cette procédure peut être itérée autant de fois que désiré. On obtient ainsi une suite de Hamiltoniens ayant les mêmes propriétés à longue distance, mais pour lesquels de plus en plus de degrés de liberté à courte distance ont été sommés.

L'intérêt de cette approche réside dans le fait qu'à la température de transition de phase, le système est invariant d'échelle. Par conséquent, le Hamiltonien est invariant sous la transformation de bloc de spins. On dit aussi que le Hamiltonien est un point fixe de cette transformation. Pour avoir une identification entre point fixe et transition de phase, il faut toutefois veiller à calculer toutes les quantités dans les unités naturelles du système, c'est-à-dire par rapport à la maille du réseau. Or, une fois l'intégration sur les modes internes à une plaquette effectuée, le système présente un réseau effectif dont la maille est plus grande que celle du réseau initial. On a donc recours à un changement d'échelle, qui ramène le réseau effectif en coïncidence avec le réseau initial[1]. Ça n'est qu'à cette condition que le Hamiltonien pour les variables de plaquette peut être identique à celui des spins initiaux et que l'on peut trouver un point fixe par cette procédure. On a représenté sur la figure 2.1 les différentes opérations de la procédure de décimation de Kadanoff.

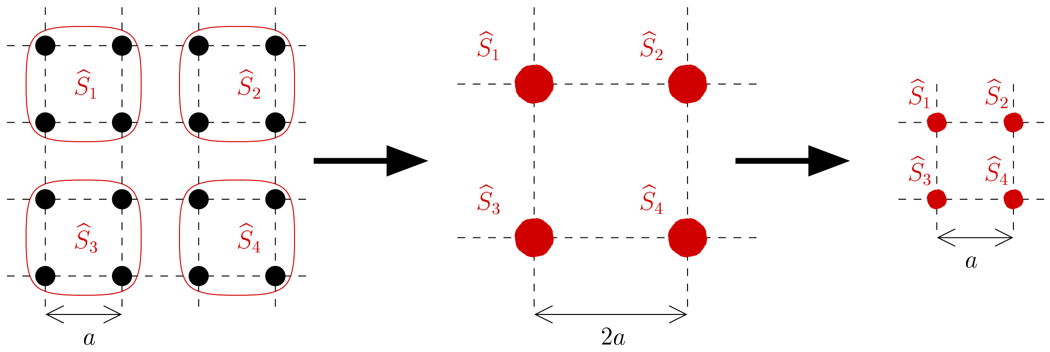


Fig. 2.1 – Procédure de décimation de Kadanoff. Dans un premier temps on regroupe les degrés de liberté par plaquette, et on introduit une variable de spin de bloc par plaquette. On somme les degrés de liberté internes, et l'on obtient ainsi un Hamiltonien effectif pour les variables de bloc. On effectue finalement une opération de changement d'échelle, permettant d'exprimer les quantités physiques par rapport à la maille du réseau initial.

Cette méthode de décimation des degrés de liberté n'est toutefois pas très utile dans la pratique. En effet, si le modèle initial ne présente qu'une interaction entre plus proches voisins, la transformation de bloc de spins génère une interaction pour les second plus proches voisins, puis troisièmes plus proches voisins, et ainsi de suite. D'autre part, la présence explicite du réseau introduit une anisotropie de l'espace, alors que l'on s'attend à ce que les propriétés du système à grande distance soient isotropes.

Les difficultés rencontrées dans l'approche de Kadanoff ont conduit Wilson à adapter ces idées à une théorie continue. Comme dans le cas précédent, les quantités

[1]Dans la suite, l'équivalent de ce changement d'échelle correspondra à introduire des quantités dédimensionnées.

thermodynamiques sont obtenues à partir de la fonction de partition, qui apparaît maintenant comme une intégrale fonctionnelle :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-\mathcal{S}[\varphi]}. \tag{2.2}$$

Ici, φ est le champ microscopique, et $\mathcal{S}$ est l'action, décrivant les interactions entre degrés de liberté. Le modèle etant initialement défini sur un réseau de maille a, les champs ne peuvent pas avoir une impulsion plus grande que $\Lambda = a^{-1}$. Wilson a proposé de séparer les degrés de liberté du système en modes rapides d'impulsions plus grandes que $\Lambda - dk$ et notés $\varphi_>$, et modes lents d'impulsions inférieures à $\Lambda - dk$ et notés $\varphi_<$ [2]. La décomposition des degrés de liberté en ces deux types de modes est représentée sur la figure 2.2. Cette décomposition est équivalente, dans le langage de Kadanoff, à la séparation entre variables de bloc (représentés ici par $\varphi_<$), et fluctuations internes aux plaquettes (équivalent de $\varphi_>$).

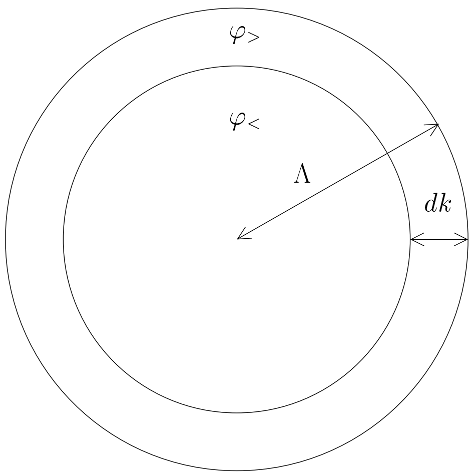


FIG. 2.2 – Décomposition des degrés de liberté en modes rapides et modes lents, respectivement représentés par $\varphi_>$ et $\varphi_<$.

En intégrant sur les modes rapides $\varphi_>$, on peut construire une action effective, notée $\mathcal{S}_{\Lambda-dk}[\varphi_<]$ pour les modes lents :

$$e^{-\mathcal{S}_{\Lambda-dk}[\varphi_<]} = \int \mathcal{D}\varphi_> \, e^{-\mathcal{S}[\varphi_< + \varphi_>]} \tag{2.3}$$

Cette nouvelle action ne dépend plus des modes de haute énergie, mais conduit à la même physique à longue distance. Cette procédure peut être itérée, et permet de créer ainsi une famille d'actions effectives Wilsoniennes notée $\mathcal{S}_k$, induisant la même physique

[2]En pratique, la séparation brutale entre modes lents et rapides que nous considérons ici introduit des non analyticités dans les calculs. Il est plus intéressant de considérer une séparation douce, régulière. Dans ce cas, les modes rapides sont en grande majorité à support sur l'intervalle d'impulsion $[\Lambda - dk, \Lambda]$, mais présentent également des excitations pour les impulsions plus petites que $\Lambda - dk$.

à grande distance, mais ne dépendant que des degrés de liberté d'impulsion inférieure à k.

Nous pouvons maintenant invoquer le même argument que précédemment : au point de transition de phase, la longueur de corrélation diverge, et le système présente donc une invariance d'échelle. Si l'on réexprime l'action effective Wilsonienne par rapport à l'échelle d'impulsion naturelle k, l'action est invariante lors de la décimation des modes de haute énergie. À nouveau, le point de transition de phase est associé à un point fixe de la transformation de l'action effective.

L'évolution de l'action effective Wilsonienne avec l'échelle d'impulsion k est donnée par une équation exacte [WK74], [Pol84], appelée dans la littérature équation de Polchinski :

$$\frac{\partial \mathcal{S}_k[\varphi]}{\partial t} = \int d^d x \, d^d y \; K(x-y) \left\{ \frac{\delta^2 \mathcal{S}_k[\varphi]}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)} + \frac{\delta \mathcal{S}_k[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta \mathcal{S}_k[\varphi]}{\delta\varphi(y)} \right\}. \tag{2.4}$$

Ici, $K(x-y)$ décrit comment est effectuée la séparation entre modes lents et rapides.

Chose assez étonnante, cette équation a été assez peu utilisée à l'époque de sa découverte, excepté pour obtenir des preuves à tous les ordres de la renormalisabilité de théories (essentiellement de la théorie vectorielle). Au début des années 90, est apparu un intérêt pour l'étude de solutions de cette équation. Ceci a été motivé par le fait que des solutions, même approchées de ces équations exactes permettent d'obtenir des informations non perturbatives.

Pour être complet, notons que d'autres équations exactes ont été dérivées en parallèle, et ont été utilisées dans des situations concrètes. Citons ici l'équation de Wegner-Houghton [WH73]. Toutefois, ces approches souffrent de deux inconvénients majeurs. D'abord, les quantités considérées ne permettent pas de déterminer directement des propriétés thermodynamiques. Considérons par exemple l'équation de Polchinski (2.4), qui porte sur l'action effective Wilsonienne. Si l'on veut calculer une quantité thermodynamique à partir de $\mathcal{S}_k[\varphi]$ (aimantation, longueur de corrélation, etc.), il est toujours nécessaire de déterminer la fonction de partition du système, ce qui nécessite d'effectuer une intégration fonctionnelle sur les modes d'impulsion plus petite que k. L'autre inconvénient est plus technique, et vient du fait que le dernier terme dans le membre de droite de l'équation (2.4) est non local, puisqu'il correspond à multiplier des fonctions évaluées en des points différents de l'espace (voir le second terme dans le membre de droite de l'équation (2.4)). Cette non localité se traduit par le fait qu'il est très difficile de calculer la renormalisation du champ, et par conséquent de déterminer la dimension anormale.

2.2 Action effective courante

Afin de remédier à ces deux problèmes, il est fructueux d'appliquer les idées de bloc de spins à des quantités dont l'interprétation physique est plus directe. Ceci justifie l'introduction d'une nouvelle quantité : l'action effective courante Γ_k [Wet91], [Wet93a], [Wet93b]. Avant de présenter une étude détaillée de cette quantité, présentons rapidement ses propriétés caractéristiques.

L'échelle caractéristique d'impulsion k, introduite précédemment dans la discussion du groupe de renormalisation à la Wilson, marque à nouveau la limite entre les modes de haute énergie (fluctuations de courte distance) sur lesquels l'intégration fonctionnelle a été effectuée, et les modes de basse énergie dont les fluctuations n'ont pas encore été intégrées. L'échelle k s'interprète donc comme l'inverse de la maille d'un réseau effectif. Dans la limite où k tend vers $\Lambda \simeq a^{-1}$, limite de la première zone de Brillouin, l'action effective courante Γ_k tend, comme dans l'approche de Wilson, vers l'action microscopique $\mathcal{S}$ décrivant les interactions des degrés de liberté du système à l'échelle microscopique. En revanche, et c'est là une grande différence avec l'action Wilsonienne $\mathcal{S}_k$, dans la limite où k s'annule, Γ_k tend vers le potentiel de Gibbs Γ [3] à partir duquel peuvent être déterminées toutes les observables thermodynamiques : aimantation, longueur de corrélation, susceptibilité, etc. On retiendra donc :

$$\Gamma_k \to \begin{cases} \Gamma & \text{lorsque} \quad k \to 0 \\ \mathcal{S} & \text{lorsque} \quad k \to \Lambda \end{cases} . \tag{2.5}$$

Pour des valeurs intermédiaires de k, l'action effective courante a, dans les régimes de grandes ($q > k$) et petites ($q < k$) impulsions, des comportements différents. Nous verrons dans la suite que dans le premier régime d'impulsions, Γ_k ressemble à un potentiel de Gibbs pour un système d'extension spatiale finie k^{-1}, alors que dans le second régime, l'action effective courante prend le sens d'une action effective pour les degrés de liberté de longue distance, comme celle qui a été présentée dans l'introduction.

L'action effective Γ_k permet donc de relier continûment les propriétés thermodynamiques du système à sa description microscopique, en variant k de la fréquence de coupure Λ à 0. L'évolution de l'action effective courante Γ_k avec l'échelle k est décrite par une équation différentielle exacte, concise. L'intégration de cette équation différentielle permet en principe de déterminer les propriétés thermodynamiques du système (codées dans $\Gamma_{k=0}$) à partir des propriétés microscopiques (décrites par $\Gamma_{k=\Lambda}$). Toutefois, cette intégration est trop compliquée pour être effectuée analytiquement, et il est donc nécessaire d'utiliser des approximations.

Dans les sections suivantes, nous construisons explicitement l'action effective Γ_k à l'échelle k, puis nous vérifions que les propriétés asymptotiques (2.5) sont satisfaites. L'équation d'évolution de l'action effective avec k est ensuite dérivée, et nous discutons les différents schémas d'approximation utilisés pour intégrer cette équation. Notons dès à présent qu'il n'y a pas de justification rigoureuse des troncations effectuées. Toutefois, cette approche est validée par la comparaison des résultats obtenus de cette façon et par les méthodes habituelles de théorie des champs, dans le cas de théories bien connues.

[3] Dans le langage de la théorie des champs, Γ est la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductible.

Nous traitons ici le modèle vectoriel, et montrons sur cet exemple simple comment les équations d'évolution non perturbatives sont obtenues. Nous explicitons également le lien avec les théories de perturbation couramment utilisées en théorie des champs (développements en constantes de couplage, à basse température et à grand nombre de composantes du paramètre d'ordre), et décrivons les résultats obtenus dans les régimes non perturbatifs.

2.3 Construction de l'action effective Γ_k

Nous décrivons dans cette section la construction de l'action effective courante pour une théorie bosonique scalaire. Ce travail a été mené en grande partie par C. Wetterich dans une série d'articles [Wet91][Wet93a][Wet93b], avant d'arriver à la forme que nous présentons ici, et qui est exposée dans [Wet93c]. La généralisation à des théories de symétrie globale plus riche ne pose pas de difficulté conceptuelle. La stratégie utilisée pour construire une action effective courante Γ_k, satisfaisant les conditions asymptotiques (2.5), consiste à considérer une théorie, modifiée par l'ajout dans l'action d'un terme ΔS_k, dont le rôle est de réduire la contribution des fluctuations des modes de petite impulsion à la fonction de partition. Nous choisissons ici pour ΔS_k un terme quadratique en champs, qui ressemble donc à un terme de masse :

$$\Delta \mathcal{S}_k[\chi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, R_k(\mathbf{q}) \chi_{\mathbf{q}} \chi_{-\mathbf{q}}. \tag{2.6}$$

La fonction $R_k(\mathbf{q})$, appelée fonction de régularisation (ou fonction de coupure), est choisie afin d'éliminer en partie la contribution des fluctuations de basse énergie, sans influencer les modes de haute énergie. Nous choisissons donc une fonction décroissant avec l'impulsion, qui varie significativement pour des valeurs de q de l'ordre de k. Nous avons beaucoup de libertés dans le choix de cette fonction. En pratique, il est important d'imposer les deux critères suivants :

$$R_k(\mathbf{q}) \simeq Z_k k^2 \qquad \text{lorsque } \mathbf{q}^2 \ll k^2 \tag{2.7a}$$

$$R_k(\mathbf{q}) \text{ décroît avec } \mathbf{q}\text{, plus vite qu'une loi de puissance.} \tag{2.7b}$$

La première condition donne à la fonction de régularisation le comportement d'échelle d'un terme de masse (Z_k est la renormalisation du champ). Ce comportement nous permettra dans la suite d'étudier la physique invariante d'échelle dans les quantités dédimensionnées (voir la section (2.7.4)). La deuxième condition assure que les modes de haute énergie sont peu influencés par la fonction de régularisation. Une fonction de régularisation couramment utilisée est [TW94] :

$$R_k(\mathbf{q}) = Z_k\, \frac{\mathbf{q}^2}{e^{\mathbf{q}^2/k^2} - 1}, \tag{2.8}$$

qui est tracée sur la figure 2.3. Une autre fonction de régularisation, qui a été proposée récemment[Lit00] est :

$$R_k(\mathbf{q}) = Z_k \left(k^2 - \mathbf{q}^2\right)\, \Theta\left(k^2 - \mathbf{q}^2\right), \tag{2.9}$$

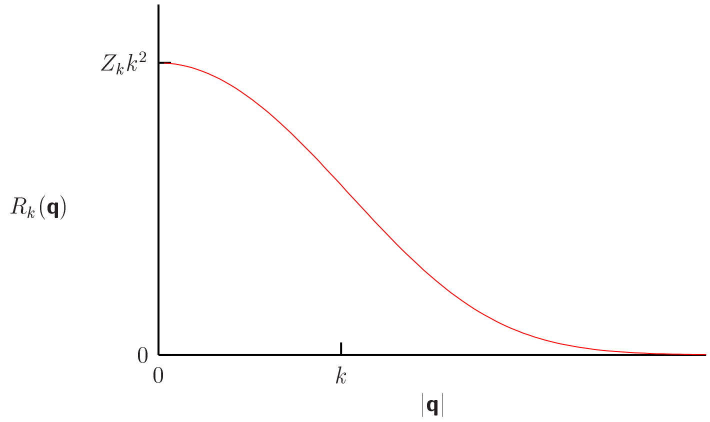


FIG. 2.3 – Fonction de régularisation $R_k(\mathbf{q})$ définie par l'équation (2.8)

où Θ est la fonction "marche", qui vaut 1 pour un argument positif, et 0 sinon.

La fonction de partition de la théorie modifiée par l'ajout du terme de régularisation $\Delta\mathcal{S}_k$ prend alors la forme :

$$\mathcal{Z}_k[J] = \int \mathcal{D}\chi \, \exp\left(-\mathcal{S}[\chi] - \Delta\mathcal{S}_k[\chi] + \int d^d\mathbf{q} \, J_{\mathbf{q}}\chi_{-\mathbf{q}}\right). \tag{2.10}$$

Comme arguments de l'exponentielle, on trouve l'action $\mathcal{S}[\chi]$, décrivant l'interaction entre degrés de liberté microscopiques, le terme $\Delta\mathcal{S}_k$ réduisant la contribution des fluctuations de petite impulsion, et un couplage à une source J, permettant de générer les fonctions de corrélation du système. A partir de la fonction de partition modifiée $\mathcal{Z}_k[J]$, on construit une "énergie libre" [4] :

$$\mathcal{W}_k[J] = \ln \mathcal{Z}_k[J], \tag{2.11}$$

ainsi que le champ classique, conjugué de la source J [5] :

$$\varphi_{\mathbf{q}} = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J_{-\mathbf{q}}}. \tag{2.12}$$

L'aimantation du système s'identifie au champ classique, évalué à source nulle.

L'action effective courante Γ_k que l'on cherche à construire s'identifie, à un terme près, à la transformée de Legendre de W_k par rapport à la source J. Toutefois, pour retrouver le comportement asymptotique $\lim_{k\to\Lambda}\Gamma_k = S$, il est nécessaire de soustraire le terme $\Delta S_k[\varphi]$ à la transformée de Legendre de $\mathcal{W}_k$:

$$\Gamma_k[\varphi] = -\mathcal{W}_k[J] + \int d^d\mathbf{q} \, J_{\mathbf{q}}\varphi_{-\mathbf{q}} - \Delta\mathcal{S}_k[\varphi]. \tag{2.13}$$

[4]Dans le langage de la théorie des champs, cette quantité correspond à la fonctionnelle génératrice des diagrammes connexes.

[5]le champ classique $\varphi_{\mathbf{q}}$ dépend de l'échelle k. Toutefois, pour alléger les notations nous omettons de noter la dépendance par rapport à cette variable.

Pour résumer, Γ_k est construit en intégrant les fluctuations de courte distance ($q > k$). En revanche, la contribution des fluctuations de longue distance est atténuée par le terme de régularisation $\Delta\mathcal{S}_k$. Ceci nous permet de faire le lien avec le concept de bloc de spins présenté dans l'introduction. À l'échelle k, on peut imaginer que le système est constitué de domaines d'extension spatiale k^{-1}. Les degrés de liberté internes à un bloc ont été moyennés, de sorte qu'à l'intérieur d'un domaine, Γ_k s'identifie au potentiel de Gibbs pour ce domaine. Pour des distances supérieures à k^{-1}, on peut montrer que Γ_k s'identifie à une action effective Wilsonienne.

2.4 Comportements asymptotiques de l'action effective Γ_k

Nous montrons ici que l'action effective courante Γ_k introduite précédemment (voir l'équation (2.13)) satisfait les propriétés asymptotiques (2.7).

2.4.1 Dans la limite $k \to 0$

Il est facile de vérifier que, dans la limite où k s'annule, l'action effective courante tend vers le potentiel de Gibbs. Dans cette limite, en effet, la fonction de régularisation s'annule identiquement :

$$\lim_{k\to 0} R_k(\mathbf{q}) = 0. \tag{2.14}$$

C'est la conséquence des conditions (2.7) satisfaites par la fonction de régularisation. On déduit des équations (2.10) et (2.11) que $\mathcal{Z}_{k=0}[J]$ et $\mathcal{W}_{k=0}[J]$ s'identifient respectivement à la fonction de partition et à l'énergie libre du système, telles qu'elles sont définies habituellement. Finalement, le dernier terme apparaissant dans l'équation (2.13) définissant Γ_k s'annule. $\Gamma_{k=0}$ coïncide donc avec la transformée de Legendre traditionnelle de l'énergie libre, c'est-à-dire avec le potentiel de Gibbs :

$$\Gamma_{k=0}[\varphi] = \Gamma[\varphi]. \tag{2.15}$$

2.4.2 Dans la limite $k \to \Lambda$

Dans la limite opposée, où k est de l'ordre de l'inverse de la maille de réseau ($k \simeq \Lambda$), on peut évaluer l'intégrale fonctionnelle apparaissant dans la définition de la fonction de partition $\mathcal{Z}$ (voir équation (2.10)) en utilisant la méthode du col. Cette approximation est justifiée par le fait qu'à l'échelle $k = \Lambda$, la fonction de régularisation donne à tous les degrés de liberté une masse très grande, de l'ordre de l'inverse maille de réseau (voir la condition (2.7a)). Les corrections au champ moyen sont donc faibles. La contribution principale à l'intégrale vient de la solution $\chi^\star_q$ des équations du mouvement :

$$\frac{\delta \mathcal{S}[\chi^\star]}{\delta \chi^\star_{\mathbf{q}}} + \frac{\delta\Big(\Delta \mathcal{S}_\Lambda[\chi^\star]\Big)}{\delta \chi^\star_{\mathbf{q}}} = J_{-\mathbf{q}}. \tag{2.16}$$

L'énergie libre vaut alors :

$$\mathcal{W}_\Lambda[J] \simeq -\mathcal{S}[\chi^\star] - \Delta\mathcal{S}_\Lambda[\chi^\star] + \int d^d\mathbf{q}\ J_{\mathbf{q}} \chi^\star_{-\mathbf{q}}. \tag{2.17}$$

En appliquant la définition du champ classique (2.12) à l'expression précédente, et en utilisant la condition d'extrémisation (2.16), on trouve que le champ classique s'identifie à la solution des équations du mouvement :

$$\varphi_{\mathbf{q}} = \chi^\star_{\mathbf{q}}. \tag{2.18}$$

La transformée de Legendre modifiée (2.13) peut maintenant être effectuée. Les termes en $J\varphi$ et $\Delta\mathcal{S}_k$ des équations (2.13) et (2.17) se simplifient, et nous obtenons :

$$\Gamma_{k=\Lambda}[\varphi] \simeq S[\varphi]. \tag{2.19}$$

L'action effective s'identifie donc à l'action microscopique lorsque k tend vers l'inverse maille de réseau Λ. L'égalité peut être rendue exacte si on demande, en plus des conditions (2.7), que la fonction de régularisation diverge dans la limite où $k \to \Lambda$:

$$\lim_{k\to\Lambda} R_k(\mathbf{q}) = +\infty. \tag{2.20}$$

On peut modifier l'expression de la fonction de régularisation (2.8) afin qu'elle satisfasse à la condition précédente :

$$R_k(\mathbf{q}) = Z_k\ \mathbf{q}^2 \frac{1 + e^{-\mathbf{q}^2/\Lambda^2} - e^{-\mathbf{q}^2/k^2}}{e^{-\mathbf{q}^2/\Lambda^2} - e^{-\mathbf{q}^2/k^2}}. \tag{2.21}$$

Notons ici que les deux formes (2.8) et (2.21) de la fonction de régularisation ne diffèrent que pour des valeurs de k de l'ordre de Λ. Ainsi, l'utilisation de la forme simplifiée (2.8) modifie les équations de flot au début de l'intégration, mais n'influence pas les propriétés critiques du système. Dans les applications de cette méthode à l'étude des phénomènes critiques, nous utiliserons donc la forme simplifiée (2.8) de la fonction de régularisation. Toutefois, si l'on veut étudier des propriétés non universelles, on doit relier précisément les caractéristiques thermodynamiques du système et sa description microscopique. Il est, dans ce cas, important d'utiliser une fonction de régularisation satisfaisant la contrainte (2.20) [SW99].

2.4.3 Sous la forme fonctionnelle

La détermination des comportements asymptotiques de l'action effective à l'échelle k apparaît plus clairement encore si l'on utilise la représentation fonctionnelle de Γ_k.

Afin d'obtenir cette représentation, considérons l'équation (2.10) dans laquelle nous remplaçons Z_k par son expression en fonction de W_k (équation (2.11)), puis exprimons W_k en fonction de Γ_k (équation (2.13)). En omettant les intégrales sur les impulsions :

$$\mathcal{Z}_k = e^{\mathcal{W}_k} \tag{2.22}$$

$$= e^{-\Gamma_k[\varphi] + J\varphi - \frac{1}{2}\varphi R_k \varphi} \tag{2.23}$$

$$= \int \mathcal{D}\chi \, e^{-\mathcal{S}[\chi] + J\chi - \frac{1}{2}\chi R_k \chi} . \tag{2.24}$$

En effectuant le changement de variable d'intégration $\chi' = \chi - \varphi$, et en utilisant l'expression [6] :

$$J = R_k \, \varphi + \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \varphi} \tag{2.25}$$

nous obtenons :

$$e^{-\Gamma_k[\varphi]} = \int \mathcal{D}\chi' \, e^{-\mathcal{S}[\varphi + \chi'] + \chi' \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \varphi} - \frac{1}{2}\chi' R_k \chi'} . \tag{2.26}$$

On retrouve facilement les comportements asymptotiques sous cette forme. Lorsque $k \to 0$, la fonction $R_k(\mathbf{q})$ s'annule identiquement, et Γ_k vérifie la relation fonctionnelle entre action microscopique et potentiel de Gibbs, donc $\lim_{k\to 0} \Gamma_k = \Gamma$. D'autre part, lorsque $k \to \Lambda$, la fonction $R_k(\mathbf{q})$ prend des valeurs de l'ordre de Λ^2 (et diverge même si on impose la condition (2.20)), de sorte que la seule contribution non nulle à l'intégrale fonctionnelle vient de $\chi' = 0$. On retrouve alors $\lim_{k\to\Lambda} \Gamma_k = \mathcal{S}$.

2.5 Équation de flot exacte

En plus d'avoir une interprétation physiquement intéressante, l'action effective obéit à une équation exacte [Wet93c] régissant son évolution avec l'échelle k, qui est d'une grande utilité pratique. Dans ce chapitre, nous dérivons cette équation. Dans ce but, nous allons consécutivement étudier les dérivées de $\mathcal{Z}_k$, $\mathcal{W}_k$ et Γ_k par rapport à l'échelle logarithmique $t = \log(k/\Lambda)$. Avec cette convention, la physique à grande distance est obtenue en faisant tendre le "temps" t vers $-\infty$. Physiquement, baisser k (baisser t) revient à intégrer de plus en plus de fluctuations dans le calcul de l'action effective $\Gamma_k[\varphi]$.

D'après la définition de la fonction de partition (2.10), la seule dépendance dans

[6] Cette expression est obtenue en dérivant la définition de Γ_k (2.13) par rapport à φ.

l'échelle t de $\mathcal{Z}_k$ vient de la fonction de régularisation de sorte que[7] :

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_k[J]}{\partial t} = \int \mathcal{D}\chi \left(-\frac{1}{2}\int d^dx\, d^dy\, \frac{\partial R_k(x-y)}{\partial t}\chi(x)\chi(y)\right) \times \\ \times \exp\left(-\mathcal{S}[\chi] - \Delta\mathcal{S}_k[\chi] + \int d^dx\, J(x)\chi(x)\right). \tag{2.27}$$

Le second membre de l'équation peut être réécrit à l'aide des dérivées de la fonction de partition par rapport aux sources :

$$\frac{\partial \mathcal{Z}_k[J]}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int d^dx\, d^dy\, \dot{R}_k(x-y)\mathcal{Z}^{(2)}_{k\,x,y}[J], \tag{2.28}$$

où le point représente une dérivée par rapport au "temps" t, et où $\mathcal{Z}^{(n)}_{k\,x_1\cdots x_n}$ représente la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\mathcal{Z}_k[J]$ par rapport à $J(x_1),\ldots,J(x_n)$.

De cette équation et de la définition de l'énergie libre $\mathcal{W}_k = \ln \mathcal{Z}_k$ (voir l'équation (2.11)), on déduit une équation d'évolution pour $\mathcal{W}_k$:

$$\frac{\partial \mathcal{W}_k[J]}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int d^dx\, d^dy\, \dot{R}_k(x-y)\left\{\mathcal{W}^{(2)}_{k\,x,y} + \mathcal{W}^{(1)}_{k\,x}\mathcal{W}^{(1)}_{k\,y}\right\}. \tag{2.29}$$

Ici à nouveau $\mathcal{W}^{(n)}_{k\,x_1,\cdots,x_n}$ représente la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\mathcal{W}_k$ par rapport aux sources. Notons ici que l'équation précédente est très proche de l'équation de Polchinski (2.4), mais ne porte toutefois pas sur la même fonction.

Nous pouvons maintenant calculer l'équation d'évolution exacte pour Γ_k. En dérivant l'équation définissant l'action effective (équation (2.13)) par rapport à t, nous obtenons[8] :

$$\frac{\partial \Gamma_k[\varphi]}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{W}_k[J]}{\partial t} - \frac{1}{2}\int d^dx\, d^dy\, \varphi(x)\dot{R}_k(x-y)\varphi(y). \tag{2.30}$$

En remplaçant dans l'équation précédente l'expression de $\partial\mathcal{W}_k/\partial t$ trouvée précédemment (voir l'équation (2.29)), en utilisant la définition du champ classique $\varphi_{\mathbf{q}} = W^{(1)}_{k,-\mathbf{q}}$ (voir l'équation (2.12)), et en observant que le dernier terme de l'équation (2.29) est compensé par le dernier terme de l'équation (2.30), nous obtenons :

$$\frac{\partial \Gamma_k[\varphi]}{\partial t} = \frac{1}{2}\int d^dx\, \dot{R}_k(x-y)\mathcal{W}^{(2)}_{k\,x,y}. \tag{2.31}$$

À ce stade, et pour alléger les notations dans la suite, il est intéressant de réécrire l'équation précédente en notant l'intégration sur les impulsions à l'aide de l'opérateur

[7] On exprime ici le terme de régularisation $\Delta\mathcal{S}_k$ dans l'espace direct, avec la convention : $f(p) = \int d^dx\, f(x)e^{ipx}$, $f(x) = \int \frac{d^dp}{(2\pi)^d} f(p)e^{-ipx}$

[8] La dérivée de Γ_k par rapport à t est effectuée à φ fixé, et la dérivée de $\mathcal{W}_k$ à J fixé.

trace. Dans la suite, l'utilisation des symboles R_k et $W_k^{(2)}$, sans référence aux coordonnées d'espace représentent les opérateurs $R_k(x-y)$ et $\delta^2 W_k/(\delta\varphi(x)\delta\varphi(y))$. L'équation précédente se met maintenant sous la forme :

$$\frac{\partial \Gamma_k[\varphi]}{\partial t} = \frac{1}{2} \text{ Tr } \dot{R}_k . W_k^{(2)}. \tag{2.32}$$

Revenons maintenant à la dérivation de l'équation de flot. Afin d'obtenir une équation fermée sur Γ_k à partir de l'équation (2.32), il reste à exprimer le propagateur $W_k^{(2)}$ en fonction de l'action effective Γ_k. Une relation classique donne : $W^{(2)} = (\Gamma^{(2)})^{-1}$. Nous ne pouvons toutefois pas utiliser directement cette relation, car notre définition de l'action effective courante Γ_k ne coïncide pas avec celle du potentiel de Gibbs Γ, utilisé dans l'égalité précédente. D'autre part, il est en général entendu que, dans la relation précédente, les fonctions de corrélation sont calculées à source nulle, alors que nous avons besoin ici d'une égalité pour toutes les configurations de la source. La relation que nous cherchons est obtenue en dérivant l'équation (2.13) deux fois par rapport au champ classique φ :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}_{k\; x,y} + R_k(x-y) &= \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi(y)} \\ &= \left(\frac{\delta \varphi(y)}{\delta J(x)}\right)^{-1} \\ &= \left(W^{(2)}_{k\; x,y}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

La seconde égalité découle de la relation de Leibnitz, et la troisième est obtenue en exprimant le champ φ comme la dérivée de l'énergie libre W_k par rapport à la source : $\varphi(x) = W^{(1)}_{k\; x}$ (voir l'équation (2.12)). En insérant la relation précédente dans l'équation (2.32), on obtient :

$$\frac{\partial \Gamma_k[\varphi]}{\partial t} = \frac{1}{2} \text{ Tr } \left\{ \dot{R}_k . \left[\Gamma_k^{(2)}[\varphi] + R_k\right]^{-1} \right\}. \tag{2.34}$$

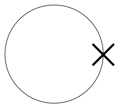
L'expression précédente s'applique à la fois dans l'espace direct et dans l'espace réciproque. Dans le second cas, la trace est définie comme :

$$\text{Tr } = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d}\,. \tag{2.35}$$

Il est très remarquable que l'évolution de l'action effective soit donnée par une équation aussi concise. Cette équation est à la base de tous les calculs que nous mènerons dans la suite.

Avant de voir comment cette équation peut être utilisée en pratique, nous allons en discuter quelques propriétés :

- L'équation (2.34) est exacte, et aucune approximation n'a été utilisée pour la dériver. En principe, toutes les propriétés du système peuvent être déduites de l'intégration de cette équation. Toutefois, malgré sa simplicité apparente, on ne sait pas la résoudre dans le cas général. Il s'agit en effet d'une équation aux dérivées partielles, fonctionnelle (la fonction de vertex à 2 points $\Gamma_k^{(2)}$ est une fonctionnelle, et dépend de la configuration du champ classique φ en chaque point de l'espace), non linéaire.
- On peut donner une représentation graphique de l'équation de flot :

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial t} = \frac{1}{2}$$  , (2.36)

  où la croix représente l'opérateur $\dot{R}_k$, et la ligne le propagateur $\dfrac{1}{\Gamma_k^{(2)} + R_k}$.
- Il est apparent sur la représentation diagrammatique précédente que l'équation d'évolution a la structure d'une équation à une boucle. L'intégrale porte sur une seule impulsion, et se ramène à une intégrale unidimensionnelle, une fois l'intégrale sur les variables angulaires effectuée. Ceci est d'un grand intérêt pratique car les intégrales peuvent être évaluées simplement par des méthodes numériques (contrairement aux intégrales multidimensionnelles des calculs perturbatifs), et même analytiquement dans certains cas. Il est intéressant de noter à ce propos que l'on peut en principe déterminer toutes les propriétés critiques d'un système à l'aide d'une équation à une boucle[9].
- L'intégrale apparaissant dans l'équation d'évolution (2.34) est, de plus, régulière aussi bien dans l'ultra-violet que dans l'infrarouge. À faible impulsion, la présence d'un terme de masse supplémentaire R_k assure que, même à la température critique, pour toute valeur finie de k, le propagateur ne diverge pas. On peut comprendre cette dernière propriété en notant que $\Gamma_k + \frac{1}{2}\varphi R_k \varphi$ est déduit de l'énergie libre $\mathcal{W}_k$ par une transformation de Legendre (voir l'équation (2.13)), et doit donc être convexe. Par conséquent $\Gamma_k^{(2)} + R_k$ est positif, ce qui assure que le propagateur reste fini[10]. Les intégrales sont, de plus, convergentes dans l'ultra-violet, grâce à la fonction régularisation R_k, qui limite de façon effective l'intégration à des impulsions $q < k$. Ceci se reflète dans l'équation d'évolution par la présence de la fonction $\dot{R}_k$ au numérateur de l'intégrand. Cette fonction décroît plus rapidement qu'une loi de puissance à grande impulsion (voir l'équation (2.7b)), ce qui assure la convergence de l'intégrale dans l'ultra-violet.
- La discussion précédente peut être généralisée à des théories plus compliquées, pour lesquelles les champs ont des degrés de liberté internes, et portent donc

[9] Consulter à ce sujet [PW95], où les auteurs montrent comment déterminer perturbativement les fonctions β à deux boucles, à l'aide de l'équation "à une boucle" (2.34).

[10] Plus précisément, $\Gamma_k^{(2)} + R_k$ est non nul pour toutes valeur non nulle de k. Ce n'est que dans la limite $k \to 0$ que cette quantité peut s'annuler. La singularité apparaît donc au fur et à mesure que l'on diminue k.

des indices de groupe. Les dérivées fonctionnelles de Γ_k portent alors également un indice de groupe. L'équation exacte du groupe de renormalisation régissant l'évolution de l'action effective est similaire à la précédente (2.34), à la différence que l'inverse et la trace portent maintenant à la fois sur les impulsions et sur les indices du groupe de symétrie interne. Une équation exacte existe également pour décrire des théories avec des champs fermioniques.

– L'équation d'évolution de l'action effective (2.34) peut être mise sous une forme plus facile d'utilisation lors des calculs pratiques :

$$\frac{\partial \Gamma_k[\varphi]}{\partial t} = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \mathrm{Tr}\ln\left\{\Gamma_k^{(2)} + R_k\right\}. \qquad (2.37)$$

L'opérateur $\tilde{\partial}_t$ correspond à une dérivée par rapport à t, agissant uniquement sur la fonction de régularisation R_k (soit $\tilde{\partial}_t = \dot{R}_k\, \partial/\partial R_k$), mais pas sur $\Gamma_k^{(2)}$.

2.6 Troncations

Comme nous l'avons signalé précédemment, il n'existe pas pour l'instant de solution à l'équation exacte (2.34) dans le cas général[11]. Il est toutefois possible d'obtenir des solutions approchées, qui permettent, comme nous le montrons par la suite, d'extraire beaucoup d'informations d'un modèle : propriétés du système dans la région critique, mais aussi quantités non universelles. L'approche traditionnelle consiste à faire une troncation, un "ansatz" pour l'action effective, qui ne dépend que d'un nombre fini de paramètres. Les équations régissant l'évolution de ce jeu de paramètres lorsqu'on varie le "temps" t du groupe de renormalisation sont obtenues à l'aide de l'équation exacte (2.37). Cette procédure permet de déterminer des fonctions d'évolution non perturbatives : les fonctions β n'apparaissent pas comme des séries en puissance d'un paramètre.

Le choix d'une troncation est un problème complexe. Il faut faire un compromis entre la fidélité avec laquelle la troncation peut décrire l'action effective exacte, et le nombre de constantes de couplage dont dépend cette troncation : plus une troncation est riche, plus elle donnera des résultats précis, mais plus les équations de flot seront difficiles à obtenir et à analyser. Dans cette optique, il faut essayer de conserver, dans la troncation, l'information la plus pertinente, qui influence le plus les phénomènes physiques que l'on cherche à décrire.

Nous discutons les deux types de troncations utilisées dans la littérature, dans le cadre d'une théorie bosonique, vectorielle, décrite par une action symétrique sous les opérations de $O(n)$.

[11] Cette équation a été résolue dans certains cas particuliers, notamment pour la théorie vectorielle à n composantes, dans la limite $n \to \infty$ [TW94].

2.6.1 Développement en puissances des dérivées

Dans l'étude des transitions de phase, nous sommes intéressés par les propriétés macroscopiques, à grande distance, de la théorie. Il est alors souhaitable de décrire le plus précisément possible l'action effective dans le secteur de faible impulsion (grande distance), quitte à négliger les propriétés de courtes distances. Ceci conduit à développer l'action en puissances des dérivées, et à ne garder que les premiers termes de ce développement.

Dans l'approximation la plus simple (ordre zéro en dérivées), dite approximation du potentiel local, la renormalisation des termes cinétiques n'est pas incluse. La troncation considérée prend la forme :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left\{ U_k(\rho(x)) + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi_i(x) \partial_\mu \varphi_i(x) + o\left(\partial^2\right) \right\}. \tag{2.38}$$

Ici $\rho(x) = \varphi_i(x)\varphi_i(x)/2$ est le seul scalaire, invariant sous les transformations du groupe de symétrie $O(n)$. La dérivation des équations de flot est alors très simple, et permet d'étudier les propriétés qualitatives du flot dans l'espace des constantes de couplage. Toutefois, la dimension anormale est négligée dans cette approximation, et la précision des résultats physiques en est affectée [12].

L'ordre suivant dans ce développement en puissances des dérivées (appelé aussi développement en localité), consistant à garder les termes à deux dérivées mais à négliger les termes d'ordre supérieur, est plus couramment utilisé. La troncation au deuxième ordre en dérivées prend la forme :

$$\begin{aligned}\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \Big\{ & U_k(\rho(x)) + \frac{1}{2} Z_k(\rho(x))\, \partial_\mu \varphi_i(x) \partial_\mu \varphi_i(x) \\ & + \frac{1}{4} Y_k(\rho(x))\, \partial_\mu \rho(x) \partial_\mu \rho(x) + o(\partial^4) \Big\}.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Le premier terme, appelé potentiel, permet de déterminer dans la limite $k \to 0$, l'aimantation, la susceptibilité du système. Les deux autres termes, appelés termes cinétiques sont, eux, sensibles aux variations du champ dans l'espace. Ils induisent un coût énergétique pour les déformations du champ, et lui donnent une rigidité. Comme nous le verrons dans la suite (voir section 2.7.5), l'étude de la fonction Z_k permet de déterminer la dimension anormale du champ, qui décrit la singularité du propagateur à la transition de phase, pour de petites impulsions :

$$G^{(2)}(\mathbf{q}) \simeq \frac{1}{|\mathbf{q}|^{(2-\eta)}}. \tag{2.40}$$

On comprend alors pourquoi l'approximation du potentiel local, qui ne tient pas compte de l'évolution de la fonction Z_k, ne permet pas de déterminer la dimension anormale. Notons que la structure du groupe $O(n)$ de symétrie interne implique que les termes à deux dérivées sont représentés par *deux* fonctions indépendantes $Z_k(\rho)$ et $Y_k(\rho)$.

[12] L'approximation du potentiel local conduit même à des résultats qualitativement faux. Lorsque l'on étudie le modèle vectoriel $O(n)/O(n-1)$ en dimension $d = 2 + \varepsilon$ dans cette approximation, on trouve un point fixe à température d'ordre ε pour $n > 1$. Cette borne sur n est en fait 2.

2.6.2 Développements en champs

Un développement "dual" du précédent consiste à conserver toute l'information sur la structure spatiale de la théorie, mais à développer l'action effective en puissances du champ[13] :

$$\Gamma_k[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \left\{ \prod_{j=1}^{n} d^d x_j \left(\varphi(x_j) - \varphi_0\right) \right\} \Gamma^{(n)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{2.41}$$

où φ_0 représente une configuration constante dans l'espace, autour de laquelle est développé le champ. L'approximation consiste à ne conserver qu'un nombre fini de termes, en omettant les monômes d'ordre élevé en champs.

Le choix de la configuration φ_0 autour de laquelle est développée l'action est importante. Il est en général intéressant de choisir une configuration minimisant l'action effective. Ceci permet en effet d'obtenir des résultats qui convergent rapidement [AMS+98][SSA+00]. Ce choix est étayé par le fait que les quantités thermodynamiques du système (longueur de corrélation, susceptibilité, etc.) sont extraites des dérivées du potentiel de Gibbs, évaluées dans la configuration minimisant ce potentiel. Nous devons donc décrire le plus fidèlement possible le voisinage du minimum de l'action effective.

Notons ici que le type de troncation discuté dans ce chapitre est particulièrement adapté à l'étude de la formation d'états liés dans un système[Ell94].

2.6.3 Troncations mixtes

Dans la suite, nous utiliserons également une troncation mixte, consistant à développer l'action effective Γ_k à la fois en puissances des dérivées et en puissances du champ. On génère cette troncation en développant les fonctions $U_k(\rho)$, $Z_k(\rho)$ et $Y_k(\rho)$ en puissances du champ, autour de la configuration minimisant le potentiel :

$$\left\{ \begin{aligned} U_k(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{n!} (\rho - \rho_0)^n \\ Z_k(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n}{n!} (\rho - \rho_0)^n \\ Y_k(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{n!} (\rho - \rho_0)^n \end{aligned} \right. \tag{2.42}$$

Ici, $\rho_0 = \frac{1}{2}\vec{\varphi}_0^2$ correspond au minimum du potentiel : $U'(\rho = \rho_0) = 0$. Les termes peuvent être sélectionnés en fonction de leur dimension canonique. On obtient de cette

[13] Les indices internes du champ, et de fonctions de vertex ne sont pas explicités dans ce développement.

manière des troncations ne dépendant que d'un nombre fini de paramètres, qui permettent de déterminer avec une assez bonne précision les exposants critiques en trois dimensions. Il n'y a pas de théorème sur la convergence des résultats physiques lorsque la troncation est enrichie, mais les études menées en trois dimensions semblent montrer que l'adjonction de nouveaux termes dans la troncation améliore les résultats.

2.7 Modèle vectoriel $O(n)$

Dans le but d'illustrer les concepts introduits précédemment, et pour justifier les approximations menées dans la suite, nous allons étudier le modèle bosonique vectoriel. Celui-ci est décrit par une action invariante sous l'opération des éléments du groupe $O(n)$, et admet comme groupe de symétrie résiduelle dans la phase de basse température $O(n-1)$. Cette théorie est d'une grande importance physique, et permet d'étudier un grand nombre de transitions, dans différents matériaux. L'archétype en est la transition ferromagnétique-paramagnétique des systèmes magnétiques, et nous utiliserons dans la suite le vocabulaire relatif à ces systèmes pour décrire le modèle. Suivant le type d'anisotropie du système, la théorie pertinente est :

- le modèle d'Ising, correspondant à $n = 1$ [14], si l'anisotropie confine les spins le long d'un axe,
- le modèle XY, avec $n = 2$, si l'anisotropie est planaire,
- le modèle de Heisenberg, pour lequel $n = 3$, si l'anisotropie n'est pas pertinente.

Le modèle d'Ising a beaucoup d'autre réalisations physiques, notamment les transitions unaires et les transitions de démixion. De même, le modèle XY permet de décrire les propriétés des supraconducteurs de type I, et les superfluides au voisinage de la transition de phase [BMO79], [DH79], [HF83].

De part son importance physique, le modèle vectoriel a été énormément étudié, et l'accord entre les prédictions théoriques et les études expérimentales et numériques a donné une preuve de la pertinence de la théorie des champs dans l'étude des transitions continues.

Nous considérons dans la suite deux approches de cette théorie, basées sur l'équation exacte du groupe de renormalisation (2.37). Dans un premier temps, nous nous plaçons dans l'approximation du potentiel local (décrit par l'équation (2.38)). Cette approximation permet de discuter simplement les principales propriétés du flot. Nous montrons également comment les exposants critiques sont obtenus. Cette approche a cependant deux inconvénients. D'une part, les troncations effectuées ne permettent pas de déterminer la dimension anormale (dans cette approximation, $\eta = 0$). D'autre part, et comme nous le discutons dans la suite, il est difficile de généraliser cette approche à des théories plus compliquées, où le schéma de brisure de symétrie n'est pas de type vectoriel. Ces deux difficultés sont surmontées en utilisant la troncation mixte discutée dans la section 2.6.3. Nous dérivons ensuite explicitement, pour une troncation simple,

[14] Le groupe $O(1)$ s'identifie au groupe à deux éléments $\mathbb{Z}_2$.

les équations de flot. Nous discutons alors le lien avec les différentes approches perturbatives (développements en constante de couplage, à basse température, et à grand nombre de composantes du paramètre d'ordre), et présentons finalement les résultats obtenus dans les domaines non perturbatifs de la théorie, pour différentes troncations, afin de montrer la puissance de la méthode.

2.7.1 Équation de flot du potentiel dans l'approximation du potentiel local

Pour déterminer l'équation régissant l'évolution du potentiel U_k lorsqu'on varie l'échelle k, notons que lorsque l'action effective est évaluée dans une configuration de champ constant dans l'espace, les termes cinétiques, proportionnels à $(\partial\varphi)^2$ et $(\partial\rho)^2$ (voir l'équation (2.39)) s'annulent. Par conséquent :

$$U_k(\rho) = \frac{1}{V}\Gamma_k(\varphi)\bigg|_{\vec{\varphi}=\sqrt{2\rho}\vec{e}}, \tag{2.43}$$

où $\vec{e}$ est un vecteur unitaire, constant dans l'espace, et V est le volume du système. En appliquant l'opérateur de dérivation ∂_t à l'équation précédente :

$$\frac{\partial U_k(\rho)}{\partial t} = \frac{1}{V}\frac{\partial \Gamma_k(\varphi)}{\partial t}\bigg|_{\vec{\varphi}=\sqrt{2\rho}\vec{e}}. \tag{2.44}$$

L'équation d'évolution du potentiel s'obtient donc en évaluant l'équation d'évolution exacte (2.37) dans une configuration de champ constant :

$$\frac{\partial U_k(\rho)}{\partial t} = \frac{1}{2V}\,\mathrm{Tr}\left\{\dot{R}_k.\left[\Gamma_k^{(2)}+R_k\right]^{-1}\right\}\bigg|_{\vec{\varphi}=\sqrt{2\rho}}. \tag{2.45}$$

L'équation précédente est exacte. Toutefois, dans l'approximation du potentiel local, nous ne disposons pas de toute l'information sur $\Gamma_k^{(2)}$. En introduisant dans le membre de droite de l'équation (2.45) la troncation (2.38), nous allons obtenir une forme approximée de cette équation. Dans ce but, calculons la fonction de vertex à deux points :

$$\Gamma^{(2)}_{k,\{\mathbf{q},i\},\{-\mathbf{q},j\}} = \left(\mathbf{q}^2+U'(\rho)\right)\delta_{i,j}+U''(\rho)\varphi_i\varphi_j\,, \tag{2.46}$$

où le prime dénote la dérivée par rapport à ρ. Le calcul du membre de droite de (2.45) se poursuit aisément en se souvenant que la trace de l'inverse d'une matrice s'identifie à la somme de l'inverse des valeurs propres de cette matrice. Or l'inverse propagateur (2.46) admet comme valeurs propres :

$$\begin{cases} \mathbf{q}^2+U'(\rho)+2\rho\,U''(\rho) & 1 \text{ fois} \\ \mathbf{q}^2+U'(\rho) & n-1 \text{ fois} \end{cases}. \tag{2.47}$$

L'équation de flot pour le potentiel[15] prend donc la forme [TW94] :

$$\frac{\partial U_k(\rho)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\,\dot{R}_k(\mathbf{q})\left(\frac{1}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + U_k'(\rho) + 2\rho\, U_k''(\rho)} + \right.$$
$$\left. + \frac{n-1}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + U_k'(\rho)}\right). \tag{2.48}$$

L'intégrale apparaissant dans cette équation porte sur une seule impulsion, et peut facilement être évaluée numériquement une fois la fonction de régularisation choisie.

L'équation précédente régit l'évolution du potentiel, pour une configuration de champ $\vec{\varphi}$, constante dans l'espace. Cette configuration différencie $n-1$ directions transverses de la direction radiale. En quelque sorte, le fait d'étudier l'évolution du potentiel dans une configuration de champ $\vec{\varphi}$ non nul, "brise" la symétrie $O(n)$ de la théorie en particularisant une direction, ce qui explique la présence du facteur $n-1$. Toutefois, ceci n'implique pas que le système se trouve dans la phase de symétrie brisée. L'équation précédente est d'ailleurs valable aussi bien au dessus qu'en dessous de la température critique. Le lien entre ce facteur $n-1$, et le nombre de modes de Goldstone dans la phase ordonnée, se fait en étudiant la position du minimum ρ_0 du potentiel pour $k=0$ ($U'_{k=0}(\rho_0) = 0$). Si $\rho_{0\ (k=0)} = 0$, l'aimantation est nulle, et le système se trouve dans la phase symétrique, et les masses des n excitations sont identiques. En revanche si $\rho_{0\ (k=0)} \neq 0$, le système présente $n-1$ modes de masse nulle, et un mode massif (voir (2.47)).

Dans l'approximation considérée ici, l'étude de l'évolution du potentiel avec l'échelle k se ramène à la résolution d'une équation aux dérivées partielles, non linéaire, et dont le membre de droite contient explicitement une intégrale. Ce problème est dans le cas général trop compliqué pour être résolu analytiquement. En revanche, des méthodes numériques ont été développées pour résoudre ce genre de problème. Nous ne présentons pas ici les détails des techniques numériques, qui ne sont pas utilisés dans le reste de ce travail, mais discutons les caractéristiques principales de ce flot. Notons également qu'en utilisant la fonction de régularisation (2.9), l'intégrale en impulsion peut être effectuée analytiquement. L'équation d'évolution (2.48) prend alors la forme :

$$\frac{\partial U_k}{\partial t} = \frac{4v_d}{d}\,k^{d+2}\left(\frac{1}{k^2 + U'(\rho) + 2\rho\, U''(\rho)} + \frac{n-1}{k^2 + U'(\rho)}\right), \tag{2.49}$$

où nous avons introduit :

$$v_d = \frac{1}{2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)} \tag{2.50}$$

Le fait de calculer analytiquement l'intégrale sur les impulsions simplifie énormément la procédure numérique.

[15] Plus de détails sur la dérivation des équations de flot sont donnés dans la suite.

2.7.2 Évolution du potentiel

Afin d'intégrer l'équation aux dérivées partielles (2.49), il est nécessaire de se donner une condition initiale $\Gamma_{k=\Lambda} = \mathcal{S}$. Si l'on veut étudier un système décrit par un Hamiltonien sur le réseau, on peut obtenir cette condition initiale en effectuant une transformation de Hubbard-Stratonovitch. Typiquement, une condition initiale ressemble à un potentiel en "φ^4", présentant un minimum pour une valeur non nulle du module du champ. La position du minimum dépend de la température : plus la température est basse, plus le minimum se trouve loin de l'origine. Dans le cas général, il peut être assez difficile de déterminer une bonne condition initiale du flot. Toutefois, le principe d'universalité nous indique que les détails microscopiques n'affectent pas les propriétés critiques du système. Nous choisissons ici une famille de conditions initiales, paramétrées par la température sous la forme :

$$\mathcal{S} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\vec{\varphi})^2 + \lambda(\varphi_i\varphi_i - 1/T)^2 \right\}, \tag{2.51}$$

où λ est une constante numérique, et intégrons l'équation d'évolution (2.49) pour le modèle de Heisenberg ($n = 3$).

Si le système se trouve à suffisamment basse température (le minimum se trouve initialement suffisamment éloigné de l'origine), l'évolution de U_k présente le comportement décrit par la figure 2.4. Durant la première partie du flot, le minimum du potentiel

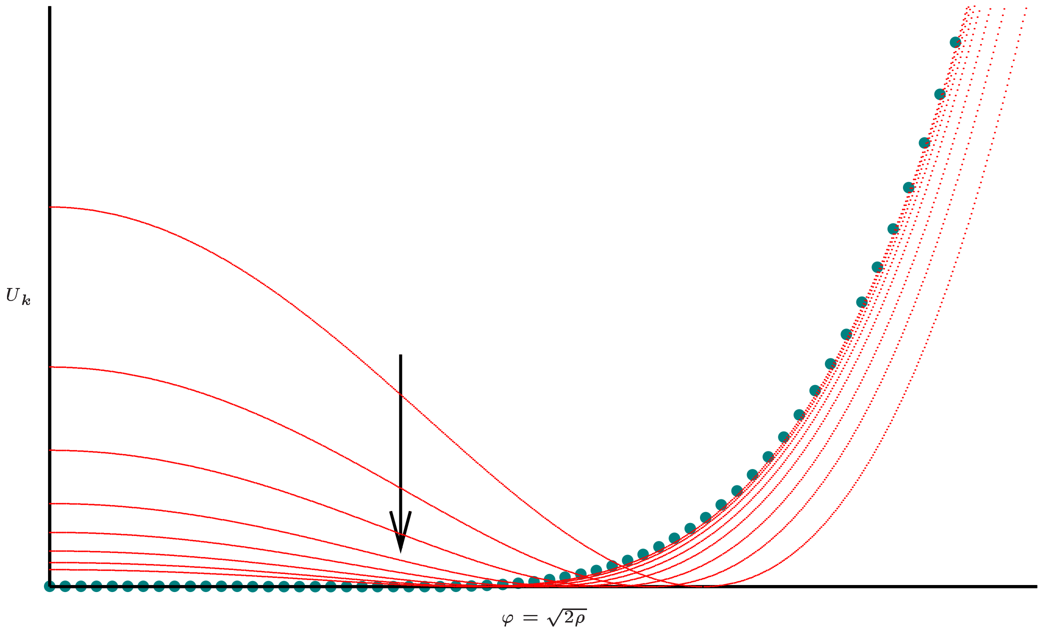


FIG. 2.4 – En traits pleins est représenté le potentiel U_k pour plusieurs valeurs de l'échelle k, dans la phase de basse température. La courbe en pointillés correspond à la forme asymptotique $k = 0$ du potentiel.

effectif se rapproche de l'origine. Lorsque $k \to 0$, le minimum du potentiel tend vers une valeur finie M, qui s'identifie à l'aimantation du système, et qui est représentée par une flèche[16] sur la figure 2.4. Nous nous trouvons donc dans la phase ordonnée, caractérisée par une aimantation non nulle M. À partir du moment où le minimum du potentiel est proche de sa valeur asymptotique M, l'évolution du potentiel effectif a ensuite un comportement différent dans les zones intérieures (module du champ inférieur au minimum du potentiel) et extérieures. Dans cette seconde zone, le potentiel n'évolue presque plus. En revanche, dans la zone intérieure, le potentiel s'aplatit, et tend vers une fonction constante. Ceci est une conséquence du fait que, dans la limite où k tend vers 0, l'action effective tend vers le potentiel de Gibbs, qui doit être convexe.

En revanche, si le système est étudié à plus haute température (la condition initiale du flot présente un minimum plus proche de l'origine), on observe un comportement différent (voir Fig 2.5). Le minimum du potentiel effectif s'annule en un temps

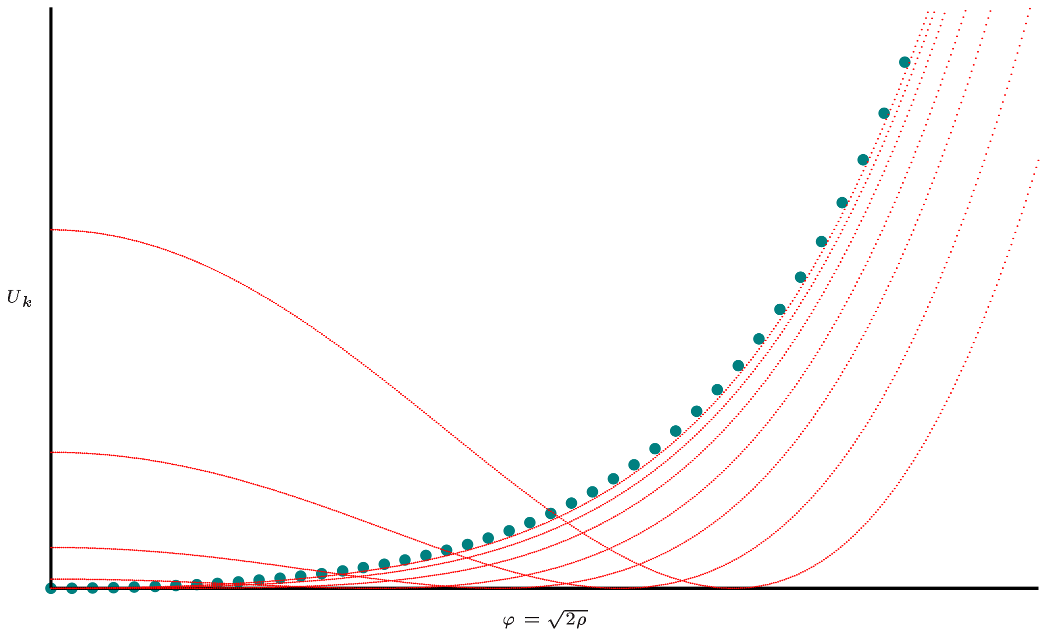


Fig. 2.5 – En traits pleins est représenté le potentiel U_k pour plusieurs valeurs de l'échelle k, dans la phase de haute température. La courbe en pointillés correspond à la forme asymptotique $k = 0$ du potentiel.

fini (le potentiel à champ nul s'annule en un temps fini). Ensuite, le potentiel n'évolue presque plus. En particulier, dans la limite $k \to 0$, le potentiel effectif présente un unique minimum à l'origine et l'aimantation du système est nulle. Le système se trouve donc dans la phase de haute température.

Il existe un comportement intermédiaire entre les deux situations précédentes, observé pour une valeur critique de la température T_c. Le minimum φ_0 du potentiel

[16]Il est difficile de déterminer à l'œuil où se trouve l'aimantation du système car le potentiel et sa dérivée par rapport au champ sont continus pour $\varphi = M$. Ce n'est que la dérivée seconde du potentiel qui présente une discontinuité.

effectif tend asymptotiquement vers 0, et ne s'annule strictement qu'à l'échelle $k = 0$. Cette température critique correspond au point de transition de phase, puisqu'il s'agit de la plus basse température où l'aimantation est nulle. En étudiant les caractéristiques du flot au voisinage de la température critique, nous montrons dans la suite comment déterminer les exposants critiques associés à la transition de phase.

2.7.3 Calcul des exposants critiques

Nous allons maintenant décrire les méthodes d'exploitation des équations de flot, et en particulier montrer comment certains exposants critiques peuvent être obtenus.

Exposant β

Cet exposant caractérise la loi de puissance reliant l'aimantation à la température dans la phase de basse température :

$$M \propto (T_c - T)^{\beta}. \tag{2.52}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'intégration des équations de flot nous permet de déterminer l'aimantation du système, connaissant sa description microscopique. En choisissant plusieurs conditions initiales du flot, correspondant à différentes températures, nous pouvons déterminer une courbe $M(T)$, et en déduire l'exposant critique β.

Exposant ν

Cet autre exposant caractérise la loi de puissance reliant la longueur de corrélation ξ à la température :

$$\xi \propto \frac{1}{|T - T_c|^{\nu}}. \tag{2.53}$$

Il nous faut donc déterminer la longueur de corrélation du système. Ceci peut être fait de deux façons. La première utilise la définition même de cette quantité : la longueur de corrélation s'identifie à l'inverse de la masse des excitations[17], c'est-à-dire à la courbure du potentiel au voisinage du minimum. Dans la phase de basse température, nous pouvons déduire cette quantité de l'intégration du flot, et nous pouvons donc relier la longueur de corrélation à la température.

L'autre détermination de la longueur de corrélation est plus phénoménologique. L'évolution du potentiel effectif présentée dans la section 2.7.2 montre qu'après un régime transitoire (caractérisé par un "temps" du groupe de renormalisation t_t et par

[17]La longueur de corrélation s'identifie en fait à l'inverse de la masse renormalisée, mais dans notre approximation, la renormalisation du champ est nulle, et il n'y a pas différence entre quantités renormalisées et non renormalisées.

une échelle de longueur $k_t = \Lambda \exp(t_t))$, l'évolution est très lente. Nous en déduisons que les fluctuations d'impulsions plus petites que k_t n'influencent pas la physique macroscopique. Par conséquent, la longueur de corrélation est de l'ordre de $k_t^{-1} = \Lambda^{-1} \exp(-t_t)$ [18]. A nouveau, il est possible de déterminer le temps caractéristique t_t associé à différentes conditions initiales, et d'en déduire la courbe $\xi(T)$, dont on déduit l'exposant critique ν.

Autres exposants

En utilisant les relations entre les exposants :

$$\alpha = 2 - \nu d \tag{2.54a}$$

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta) \tag{2.54b}$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \tag{2.54c}$$

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \tag{2.54d}$$

nous pouvons déduire les valeurs des autres exposants. Notons toutefois que notre approximation consiste à négliger la renormalisation du champ. La dimension anormale est donc nulle. On déduit donc tous les exposants à partir de l'un d'entre eux, par exemple ν.

2.7.4 Variables dédimensionnées

Dans l'approximation du potentiel local, l'étude de l'évolution du potentiel effectif à la température critique montre qu'après un régime transitoire, la position du minimum φ_k^0 du potentiel effectif évolue comme $k^{\frac{d-2}{2}}$ et la valeur du potentiel effectif à champ nul $U_k(0)$ comme k^d. Ces puissances de l'échelle courante k sont données par les dimensions canoniques des deux quantités considérées. Il est intéressant d'étudier le problème dans de nouvelles variables (dites variables dédimensionnées), dans lesquelles nous nous affranchissons de cette partie triviale du flot[19]. Nous introduisons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\varphi} = k^{\frac{2-d}{2}} \varphi \\ \widetilde{\rho} = \frac{1}{2} \widetilde{\varphi}^{\,2} = k^{2-d} \rho \\ u_k(\widetilde{\rho}) = k^{-d} U_k(\rho) \end{array} \right. . \tag{2.55}$$

Dans ce nouveau jeu de variables, le potentiel effectif à la température critique s'approche rapidement d'une forme invariante sous changement de l'échelle courante k.

[18] Rappelons que la limite $k \to 0$ dont est déduite la physique macroscopique correspond à $t \to -\infty$.

[19] L'introduction de quantités dimensionnées correspond, dans le langage de Kadanoff, à exprimer toutes les quantités par rapport à l'échelle naturelle de longueur, c'est-à-dire par rapport à la maille du réseau effectif.

Ceci traduit le fait qu'aucune échelle de longueur n'existe dans la limite $k \to 0$. Le potentiel est dit invariant d'échelle, et les relations entre quantités thermodynamiques sont typiquement des lois de puissance, décrites précédemment.

L'équation d'évolution pour le potentiel dédimensionné se déduit facilement de l'équation (2.48) :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = -d\, u_k + (d-2)\widetilde{\rho}\, u_k' + 2v_d \left\{(n-1)l_0^d(u') + l_0^d(u' + 2\widetilde{\rho}\, u'')\right\}, \tag{2.56}$$

où nous avons introduit et la fonction “seuil” :

$$l_0^d(w) = \frac{k^{-d}}{4v_d} \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{\partial_t R_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + k^2 w}. \tag{2.57}$$

Le coefficient numérique v_d a été défini précédemment (voir équation(2.50)).

Si nous choisissons la fonction de régularisation (2.9), il est possible d'effectuer l'intégrale sur les impulsions analytiquement. La fonction seuil $l_0^d(w)$ prend alors une forme simple, et nous obtenons :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = -d\, u_k + (d-2)\widetilde{\rho}\, u_k' + \frac{4v_d}{d}\left(\frac{n-1}{u'(\widetilde{\rho})} + \frac{1}{u'(\widetilde{\rho}) + 2\widetilde{\rho}\, u''(\widetilde{\rho})}\right). \tag{2.58}$$

Dans les variables dédimensionnées, la recherche d'un comportement critique, d'un potentiel invariant d'échelle, se ramène à la résolution de l'équation $\partial_t\, u_k = 0$. Ce problème est plus facile à résoudre numériquement que l'évolution du potentiel U_k avec l'échelle k. Toutefois, nous n'avons alors accès qu'aux quantités universelles. Une fois la solution de point fixe déterminée, l'exposant critique ν est obtenu en étudiant la stabilité de cette solution. Considérons une perturbation infinitésimale δu_k à la solution de point fixe $u_k^\star$, satisfaisant $\partial_t u_k^\star = 0$. L'équation d'évolution pour la perturbation est obtenue en linéarisant le membre de droite de l'équation (2.56). On obtient ainsi un système d'équations différentielles couplées, qui s'écrit formellement :

$$\partial_t\, \delta u_k(\rho) = \int d\rho'\, L[\rho,\rho']\, \delta u_k(\rho'), \tag{2.59}$$

où

$$L[\rho,\rho'] = \left.\frac{\delta\, \partial_t u_k(\rho)}{\delta\, u_k(\rho')}\right|_{u_k^\star}. \tag{2.60}$$

On résout l'équation (2.59) en cherchant les valeurs propres de l'opérateur L. On trouve alors une seule valeur propre négative, qui correspond, avec notre choix d'échelle de temps $t = \ln(k/\Lambda)$, à une direction pertinente. L'exposant critique ν est alors donné par l'inverse de la valeur absolue de cette valeur propre.

Dans les trois sections précédentes, nous avons mené l'étude de la théorie vectorielle dans l'approximation du potentiel local. Cette troncation nous a permis de déterminer les caractéristiques principales du flot. Toutefois, nous n'avons pour l'instant pas considéré l'évolution de la fonction $Z_k(\rho)$, et comme nous l'avons déjà souligné, ceci nous empêche de déterminer la dimension anormale. Afin de remédier à ce problème, nous considérons dans la suite des troncation qui tiennent compte de la renormalisation du champ.

2.7.5 Renormalisation du champ et dimension anormale

Dans le cadre du développement en localité considéré ici, l'ordre suivant l'approximation du potentiel local consiste à introduire dans l'action effective les termes à deux dérivées (voir l'équation (2.39)). Un nouveau jeu d'équations peut être obtenu pour les fonctions $U_k(\rho)$, $Z_k(\rho)$ et $Y_k(\rho)$. L'étude de l'évolution de ces fonctions conduit aux mêmes conclusions que celles obtenues dans l'approximation du potentiel local : on identifie des phases de haute et basse température, caractérisées par des évolutions du potentiel effectif semblables à celles des figures 2.4 page 38 et 2.5 page 39. Toutefois, à la température critique, l'évolution du minimum φ_0 du potentiel effectif avec l'échelle k n'a pas exactement le comportement trouvé précédemment. Il tend toujours vers 0 en suivant une loi de puissance, mais plus rapidement que précédemment. Plus explicitement,

$$\varphi_0 \propto k^{\frac{d-2}{2}} Z_k^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.61}$$

où Z_k est la renormalisation du champ, et est défini comme la valeur de la fonction $Z_k(\rho)$ introduite à l'équation (2.39) au minimum ρ_k^0 du potentiel effectif : $Z_k = Z_k(\rho_k^0)$. À la température critique, le facteur de renormalisation du champ suit lui aussi une loi de puissance :

$$Z_k \propto k^{-\eta}, \tag{2.62}$$

de sorte que le minimum du potentiel effectif se comporte comme :

$$\varphi_0 \propto k^{\frac{d-2+\eta}{2}}. \tag{2.63}$$

Le changement de variable que nous avons effectué dans la section précédente (équations (2.55)), qui nous a permis de ramener l'étude des propriétés critiques à la recherche d'un point fixe $\partial_t u_k(\rho) = 0$, doit être modifié. On introduit donc les quantités dédimensionnées renormalisées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_r = Z_k^{\frac{1}{2}} k^{\frac{2-d}{2}} \varphi \\ \rho_r = \frac{1}{2}(\varphi_r)^2 = Z_k k^{2-d} \rho \\ u_k(\rho_r) = k^{-d} U_k(\rho) \end{array} \right. . \tag{2.64}$$

Le paramètre η a été introduit comme l'exposant décrivant, à la température critique, l'évolution de la renormalisation du champ avec l'échelle. Ce coefficient s'identifie en fait à la dimension anormale. Rappelons la définition de cet exposant critique : à la température critique, la fonction de corrélation à deux points a, à faible impulsion, un comportement en loi de puissance :

$$\Gamma^{(2)}(\mathbf{q}) \propto \mathbf{q}^{2-\eta}. \tag{2.65}$$

Il peut paraître étonnant qu'un comportement singulier, non analytique comme celui-ci puisse être obtenu à partir d'un développement en puissance de l'impulsion, tel que nous le menons. Toutefois, rappelons[20] qu'à des échelles d'impulsion plus grandes que

[20] Voir à ce sujet l'introduction de ce chapitre.

k, l'action effective Γ_k a le comportement d'un potentiel thermodynamique, et présente donc le comportement en loi de puissance de l'équation (2.65). En revanche, pour des impulsions plus petites que k, l'action effective ressemble plutôt à une action microscopique, Wilsonienne, et a un comportement régulier en impulsion. Une loi phénoménologique simple permet de reproduire ces comportements de $\Gamma_k^2(\mathbf{q})$ dans les deux domaines d'impulsions $|\mathbf{q}| > k$ et $|\mathbf{q}| < k$:

$$\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}^2) = \left(\mathbf{q}^2 + C\, k^2\right)^{\frac{2-\eta}{2}}, \tag{2.66}$$

où C est une constante. En développant l'expression précédente à l'ordre quadratique en impulsions :

$$\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}^2) \simeq (C\, k^2)^{\frac{2-\eta}{2}} + \frac{2-\eta}{2}(C\, k^2)^{-\frac{\eta}{2}}\mathbf{q}^2, \tag{2.67}$$

on remarque que le coefficient du monôme en q^2, qui s'identifie à la renormalisation du champ Z_k dans notre troncation, évolue comme $k^{-\eta}$. En comparant ce comportement à l'équation (2.62), on conclut que le paramètre η introduit précédemment s'identifie bien à la dimension anormale. On peut rapprocher cette discussion de celle menée pour une théorie massive, de masse m, pour laquelle le comportement en loi d'échelle (et donc le comportement singulier de l'équation (2.65)) est observé pour des échelles de distance $l \ll \xi \simeq m^{-1}$, alors que le comportement de type champ moyen est observé à des échelles plus grandes.

La relation entre la dimension anormale η et la renormalisation du champ Z_k (2.62) nous conduit à définir :

$$\eta = -\frac{\partial \log Z_k}{\partial t}, \tag{2.68}$$

qui dépend des constantes de couplage, et qui s'identifie, au point fixe des équations de flot, à la dimension anormale.

2.7.6 Développement en puissances du champ

La discussion précédente a été menée dans le cadre d'un développement de l'action effective en puissance de l'impulsion. Ceci permet de caractériser les principales propriétés du flot. Toutefois, l'utilisation de cette approche devient plus difficile lorsqu'on étudie des théories avec des paramètres d'ordre plus riches (comme par exemple les théories avec un paramètre d'ordre matriciel que nous considérons dans le chapitre suivant). En effet, à nombre de composantes n du paramètre d'ordre fixé, la théorie vectorielle, invariante sous les opérations de $O(n)$, est celle qui a le plus grand nombre de générateurs de symétrie (théorie maximalement symétrique), et par conséquent celle qui admet le moins d'invariants : à partir d'un vecteur, on peut construire un unique scalaire, à l'aide du produit scalaire. Les autres théories ayant un paramètre d'ordre à n composantes ont moins de générateurs de symétrie : dans l'action décrivant les interactions entre degrés de liberté, on trouve des termes brisant explicitement la symétrie

$O(n)$. Il existe alors plusieurs invariants sous les opérations du groupe de symétrie[21]. Le potentiel n'est plus une fonction d'une seule variable $\rho = \frac{1}{2}\varphi^2$, ce qui complique énormément le traitement numérique des équations. Il est alors intéressant de considérer un développement du potentiel et des termes cinétiques en puissances du champ tel que nous l'avons présenté dans la section 2.6.3. C'est ce type de troncation qui est considérée dans le reste de ce travail. Aussi, nous voulons montrer sur l'exemple simple de la théorie vectorielle comment les équations de flot sont obtenues, comment les résultats perturbatifs sont retrouvés, et comment la précision des exposants critiques évolue avec l'ordre de troncation.

La troncation mixte considérée ici est obtenue à partir du développement de l'action en puissances des dérivées (2.39), dans laquelle les fonctions $U(\rho)$, $Z(\rho)$ et $Y(\rho)$ sont développées en puissances de ρ au voisinage de ρ_0, minimum du potentiel. Une troncation basée sur la dimension canonique des constantes de couplages conduit à la troncation suivante[22] :

$$\begin{aligned}\Gamma_k[\varphi] = \int d^dx \Bigg\{ &\frac{1}{2}Z_k(\partial\vec{\varphi})^2 + \frac{1}{2}Z_1(\rho-\rho_0)(\partial\vec{\varphi})^2 + \frac{1}{4}Y_0(\partial\rho)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}U_2(\rho-\rho_0)^2 + \frac{1}{6}U_3(\rho-\rho_0)^3 + \frac{1}{24}U_4(\rho-\rho_0)^4 \Bigg\},\end{aligned} \tag{2.69}$$

où nous rappelons que $\rho = \varphi_i\varphi_i/2$.

Dans la suite, nous décrivons les différentes étapes permettant d'obtenir les équations d'évolution des constantes de couplage. Afin d'alléger la discussion, nous considérons une approximation plus simple que la précédente, où nous ne gardons que $\{Z_k, \rho_0, U_2\}$. Les autres constantes de couplage sont mises à zéro, et l'on ne calcule pas leur équation d'évolution. Toutefois, lors de la détermination des exposants critiques, nous aurons recours aux fonctions β tenant compte de toutes les constantes de couplage apparaissant dans la troncation (2.69). Afin de déterminer les équations de flot, nous procédons en quatre étapes.

- Dans un premier temps, les prescriptions, définissant les constantes de couplage sont déterminées. Les constantes de couplage apparaissent typiquement comme des dérivées de l'action effective, évaluée dans une configuration $\vec{\varphi}_{\text{Min}}$ minimisant le potentiel. Pour simplifier les calculs, nous choisissons un mini-

[21] Dans le cas des antiferromagnétiques frustrés que nous abordons dans le prochain chapitre, le paramètre d'ordre a quatre ou six composantes, et l'on peut construire deux scalaires indépendants.

[22] Les constantes de couplage ainsi que ρ_0 dépendent de l'échelle k. La référence à cette variable est omise afin d'alléger la notation. La notation Z_k est choisie plutôt que Z_0 afin de rester cohérent avec les notations précédentes.

mum particulier :

$$\vec{\varphi}_{\text{Min}} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.70}$$

où $\varphi_0 = \sqrt{2\rho_0}$. Du fait de la symétrie, les expressions des fonctions β ne sont pas affectées par ce choix particulier de l'orientation de $\vec{\varphi}_{\text{Min}}$.

- Dans un second temps, nous appliquons l'opérateur de dérivation ∂_t aux équations définissant les constantes de couplage. Il faut, à cette étape, calculer des dérivées fonctionnelles de l'équation de flot exacte (2.34) par rapport au champ φ, et nous obtenons ainsi des équations d'évolution exactes pour ces constantes de couplage.
- La troisième étape consiste à évaluer explicitement les équations d'évolution exactes obtenues précédemment, à l'aide de la troncation considérée. Ceci permet d'obtenir un système fermé d'équations de flot non perturbatives pour les constantes de couplage.
- Finalement, nous introduisons les quantités dédimensionnées, renormalisées, et réécrivons les équations de flot à l'aide de fonctions "seuil" (telles que la fonction l_0^d introduite à l'équation (2.57)), qui permettent de rendre les intégrales sur les impulsions implicites, et par conséquent d'alléger les notations.

Ce programme a déjà été mis en œuvre dans la section 2.7.1, où nous avons dérivé l'équation d'évolution du potentiel dans l'approximation du potentiel local.

Définition des constantes de couplage

Commençons par la constante de couplage ρ_0, qui détermine la position du minimum du potentiel, et qui est donc implicitement définie comme solution de l'équation :

$$\left.\Gamma^{(1)}_{k\ \{1,\mathbf{q}=\mathbf{0}\}}\right|_{\text{Min}} = 0\ . \tag{2.71}$$

Entre accolades sont spécifiées les caractéristiques du champ, utilisées lors de la dérivation fonctionnelle. L'indice 1 représente la direction radiale (voir l'équation (2.70)), dans laquelle est effectuée la dérivée, et le vecteur $\mathbf{q}$, l'impulsion du champ. Finalement, nous rappelons que cette dérivée fonctionnelle est évaluée dans la configuration $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_{\text{Min}}$ en ajoutant en indice le signe Min.

La constante de couplage U_2 est ensuite déterminée à partir de la dérivée seconde de l'action effective :

$$U_2 = \frac{1}{2\rho_0\delta(\mathbf{0})} \left.\Gamma^{(2)}_{k\ \{1,\mathbf{0}\},\{1,\mathbf{0}\}}\right|_{\text{Min}}\ . \tag{2.72}$$

Le facteur $\delta(\mathbf{0})$ apparaissant au dénominateur, proportionnel au volume du système, s'explique dans la mesure où Γ_k est extensif alors que U_2 est intensif.

La définition de la renormalisation du champ est obtenue de façon similaire. Il faut toutefois tenir compte de la dépendance en impulsion. On définit donc :

$$Z_k = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})}\left(\frac{d}{d\mathbf{p}^2}\Gamma^{(2)}_{k\,\{2,\mathbf{p}\},\{2,-\mathbf{p}\}}\right)\Bigg|_{\mathrm{Min},\mathbf{p}=\mathbf{0}}. \tag{2.73}$$

Dans l'équation précédente, l'indice 2 désigne une direction orthogonale à la direction radiale (voir l'équation (2.70)). On peut, en fait, choisir n'importe laquelle des $n-1$ directions transverses sans changer l'expression des fonctions β déterminées dans la suite.

Dérivation par rapport à t

Les équations d'évolution des constantes de couplage sont obtenues en appliquant l'opérateur ∂_t aux équations précédentes, définissant les constantes de couplage. Commençons par l'équation (2.71), déterminant ρ_0. Dans le membre de gauche de cette équation, on trouve la fonction de vertex à un point, qui a une dépendance explicite dans k, et une dépendance implicite, au travers de son argument $\vec{\varphi}_{\mathrm{Min}}$. Aussi, en dérivant le membre de gauche de cette équation par rapport à t, on obtient deux contributions :

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\Gamma^{(1)}_{k\,\{1,\mathbf{0}\}}\Big|_{\mathrm{Min}}\right) &= \left\{\frac{\dot{\rho}_0}{(2\rho_0)^{1/2}}\Gamma^{(2)}_{k\,\{1,\mathbf{0}\},\{1,\mathbf{0}\}} + \frac{\delta}{\delta\varphi_{1,\mathbf{0}}}\left(\frac{\partial\Gamma_k}{\partial t}\right)\right\}\Bigg|_{\mathrm{Min}} &(2.74)\\ &= 0. &(2.75)\end{aligned}$$

On peut maintenant exprimer l'équation d'évolution de ρ_0 :

$$\dot{\rho}_0 = -\frac{(2\rho_0)^{1/2}}{\Gamma^{(2)}_{k\,\{1,\mathbf{0}\}\{1,\mathbf{0}\}}}\frac{\delta}{\delta\varphi_{1,\mathbf{0}}}\left(\frac{\partial\Gamma_k}{\partial t}\right)\Bigg|_{\mathrm{Min}}. \tag{2.76}$$

La détermination de l'équation de flot de ρ_0 nécessite d'évaluer la dérivée fonctionnelle de $\partial_t\Gamma_k$, dans la configuration minimisant le potentiel. Avant de calculer cette quantité, exprimons les fonctions β pour les deux autres constantes de couplage. La dérivée de l'équation (2.72) par rapport à t conduit à l'égalité :

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{\rho}_0}{\delta(\mathbf{0})}\left(-\frac{\Gamma^{(2)}_{k\,\{1,\mathbf{0}\},\{1,\mathbf{0}\}}}{2\rho_0^2} + \frac{\Gamma^{(3)}_{k\,\{1,\mathbf{0}\},\{1,\mathbf{0}\},\{1,\mathbf{0}\}}}{(2\rho_0)^{3/2}}\right) + \frac{1}{2\rho_0\delta(\mathbf{0})}\frac{\delta^2}{\delta\varphi_{1,\mathbf{0}}\delta\varphi_{1,\mathbf{0}}}\partial_t\Gamma_k\Bigg|_{\mathrm{Min}}. \tag{2.77}$$

Finalement, en dérivant l'équation (2.73) par rapport à t, on obtient :

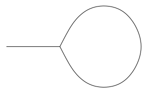
$$\dot{Z}_k = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})}\frac{d}{d\mathbf{p}^2}\left(\frac{\dot{\rho}_0}{(2\rho_0)^{1/2}}\Gamma^{(3)}_{k\,\{2,\mathbf{p}\},\{2,-\mathbf{p}\},\{1,\mathbf{0}\}} + \frac{\delta^2}{\delta\varphi_{1,\mathbf{p}}\delta\varphi_{1,-\mathbf{p}}}\partial_t\Gamma_k\right)\Bigg|_{\mathrm{Min},\mathbf{p}=\mathbf{0}}. \tag{2.78}$$

L'évaluation des fonctions β pour les deux dernières constantes de couplage nécessite donc de calculer la dérivée seconde de $\partial_t\Gamma_k$, par rapport au champ φ. Nous allons maintenant évaluer ces dérivées fonctionnelles. Une représentation diagrammatique est également proposée, qui permet de mieux visualiser les différents termes constituant les fonctions β.

Considérons l'équation d'évolution exacte (2.37), et dérivons-la une fois par rapport à $\varphi_{i_1,\mathbf{q_1}}$. On en tire l'égalité [23] :

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_{i_1,\mathbf{q_1}}}\partial_t\Gamma_k = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \ \mathrm{Tr}\ \Gamma^{(3)}_{k\,\{i_1,\mathbf{q_1}\}}\frac{1}{\Gamma^{(2)}_k + R_k}. \tag{2.79}$$

Un seul jeu de paramètres est spécifié pour la fonction de vertex à trois points. Les deux autres sont les variables des intégrations réalisées lors de la multiplication des opérateurs, et lors du calcul de la trace. La représentation graphique de cette équation est [24] :

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}\partial_t\Gamma_k = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t$$  (2.80)

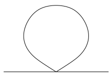
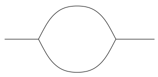
En dérivant l'équation (2.79) par rapport à $\varphi_{i_2,\mathbf{q_2}}$, et en utilisant l'égalité[25] :

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_{i,\mathbf{q}}}\frac{1}{\Gamma^{(2)}_k + R_k} = -\frac{1}{\Gamma^{(2)}_k + R_k}\Gamma^{(3)}_{k\,\{i,\mathbf{q}\}}\frac{1}{\Gamma^{(2)}_k + R_k}, \tag{2.81}$$

nous obtenons l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2}{\delta\varphi_{i_1,\mathbf{q_1}}\delta\varphi_{i_1,\mathbf{q_2}}}\partial_t\Gamma_k = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\ \mathrm{Tr}\ \Bigg(&\Gamma^{(4)}_{k\,\{i_1,\mathbf{q_1}\},\{i_1,\mathbf{q_2}\}}\frac{1}{\Gamma^{(2)}_k + R_k} - \\ &- \Gamma^{(3)}_{k\,\{i_1,\mathbf{q_1}\}}\frac{1}{\Gamma^{(2)}_k + R_k}\Gamma^{(3)}_{k\,\{i_2,\mathbf{q_2}\}}\frac{1}{\Gamma^{(2)}_k + R_k}\Bigg).\end{aligned} \tag{2.82}$$

L'équation précédente est représentée graphiquement sous la forme :

$$\frac{\delta^2}{\delta\varphi\delta\varphi}\partial_t\Gamma_k = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\Bigg($$  $-$  $\Bigg)$ (2.83)

Notons pour conclure cette section qu'en dérivant l'équation exacte, on obtient des diagrammes à une boucle, 1-particule irréductibles. Notons également que ces équations ne sont pas fermées. En effet l'équation d'évolution de $\Gamma^{(1)}_k$ fait intervenir $\Gamma^{(2)}_k$ et $\Gamma^{(3)}_k$, et l'évolution de $\Gamma^{(2)}_k$ dépend de $\Gamma^{(3)}_k$ et $\Gamma^{(4)}_k$. Plus généralement, l'équation d'évolution de $\Gamma^{(n)}_k$ fait intervenir les $n+2$ premières fonctions de vertex.

[23] Rappelons qu'en ce qui concerne les indices de groupe, l'inverse est entendu au sens matriciel.

[24] Insistons à nouveau sur le fait que l'expression suivante est une égalité fonctionnelle : le propagateur et la fonction de vertex à trois pattes dépendent de la configuration de champ.

[25] Cette égalité s'obtient en dérivant $(\Gamma^{(2)}_k + R_k).(\Gamma^{(2)}_k + R_k)^{-1} = \mathbb{1}$ par rapport à φ, puis en multipliant le résultat à gauche par $(\Gamma^{(2)}_k + R_k)^{-1}$.

Évaluation des équations de flot

Dans la section précédente, les équations d'évolution des constantes de couplage ont été exprimées à l'aide des fonctions de vertex. Ces équations sont exactes mais pas fermées. Nous allons en tirer un système fermé d'équations d'évolution approchées, en les évaluant à l'aide de la troncation considérée. Calculons à cet effet les fonctions de vertex évaluées dans la configuration $\vec{\varphi}_{\text{Min}}$ (voir l'équation 2.70) :

$$\begin{cases} \Gamma^{(1)}_{k\ \{i_1,\mathbf{q_1}\}}\Big|_{\text{Min}} = 0 \\ \Gamma^{(2)}_{k\ \{i_1,\mathbf{q_1}\},\{i_2,\mathbf{q_2}\}}\Big|_{\text{Min}} = \left(Z_k\mathbf{q_1}^2\delta_{i_1i_2} + 2\rho_0U_2\delta_{i_11}\delta_{i_21}\right)\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}) \\ \Gamma^{(3)}_{k\ \{i_1,\mathbf{q_1}\},\{i_2,\mathbf{q_2}\},\{i_3,\mathbf{q_3}\}}\Big|_{\text{Min}} = \sqrt{2\rho_0}U_2(\delta_{i_1i_2}\delta_{i_31} + \delta_{i_2i_3}\delta_{i_11} + \\ \qquad\qquad + \delta_{i_3i_1}\delta_{i_21})\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}) \\ \Gamma^{(4)}_{k\ \{i_1,\mathbf{q_1}\},\{i_2,\mathbf{q_2}\},\{i_3,\mathbf{q_3}\},\{i_4,\mathbf{q_4}\}}\Big|_{\text{Min}} = U_2(\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4} + \delta_{i_1i_3}\delta_{i_2i_4} + \\ \qquad\qquad + \delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_3})\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}+\mathbf{q_4}) \end{cases} \tag{2.84}$$

En remplaçant dans l'équation (2.76) l'expression de la dérivée fonctionnelle de $\partial_t\Gamma_k$ trouvée à l'équation (2.79), puis en remplaçant les fonctions de vertex par les expressions obtenues dans notre troncation (équation (2.84)), on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_0 = & -\frac{(2\rho_0)^{1/2}}{2\rho_0U_2\delta(\mathbf{0})}\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\int\frac{d^d\mathbf{q_1}d^d\mathbf{q_2}}{(2\pi)^d}\sqrt{2\rho_0}\,U_2\ \delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2})^2 \\ & \left(\frac{3}{Z_k\mathbf{q_1}^2 + R_k(\mathbf{q_1}) + 2\rho_0U_2} + \frac{n-1}{Z_k\mathbf{q_1}^2 + R_k(\mathbf{q_1})}\right) \\ = & -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\int\frac{d^d\mathbf{q_1}}{(2\pi)^d}\left(\frac{3}{Z_k\mathbf{q_1}^2 + R_k(\mathbf{q_1}) + 2\rho_0U_2} + \frac{n-1}{Z_k\mathbf{q_1}^2 + R_k(\mathbf{q_1})}\right)\ . \end{aligned} \tag{2.85}$$

On obtient de la même façon une équation pour la constante de couplage U_2, à l'aide des équations (2.77) et (2.82) :

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = & \ \frac{\dot{\rho}_0U_2}{2\rho_0} + \frac{1}{4\rho_0}\tilde{\partial}_t\int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\,U_2\left(\frac{3}{Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + 2\rho_0} + \frac{n-1}{Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q})}\right) - \\ & - 2\rho_0U_2^2\left(\frac{9}{(Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + 2\rho_0U_2)^2} + \frac{n-1}{(Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}))^2}\right) \\ = & -\frac{U_2^2}{2}\tilde{\partial}_t\int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\frac{9}{(Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + 2\rho_0U_2)^2} + \frac{n-1}{(Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}))^2}\right)\ . \end{aligned} \tag{2.86}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_k = -2\rho_0U_2^2\frac{d}{d\mathbf{p}^2}\Bigg(\tilde{\partial}_t\int\frac{d^d\ \mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{1}{Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + 2\rho_0U_2}\times \\ \times\frac{1}{Z_k(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2 + R_k(\mathbf{p}+\mathbf{q}) + 2\rho_0U_2}\Bigg)\ . \end{aligned} \tag{2.87}$$

Les calculs menés dans ce paragraphe consistent essentiellement à multiplier des matrices, et à calculer des traces. Lors de l'étude de théories plus compliquées, et lorsque l'on considère des troncations de l'action effective plus riche, il est nécessaire d'automatiser ces procédures à l'aide de logiciels de calcul symbolique. Dans ces situations, nous avons utilisé Mathematica.

Constantes de couplage dédimensionnées et fonctions seuil

L'étude des propriétés critiques d'un système est plus commodément effectuée dans les quantités dédimensionnées renormalisées, que nous avons introduites dans les sections 2.7.4 et 2.7.5. Nous introduisons donc les variables :

$$\begin{cases} \kappa = Z_k k^{2-d} \rho_0 \\ u_2 = Z_k^{-2} k^{d-4} U_2 \ . \end{cases} \tag{2.88}$$

Les équations d'évolution de ces constantes de couplage s'obtiennent facilement à l'aide de celles obtenues au paragraphe précédent :

$$\dot{\kappa} = -(d-2+\eta)\kappa + 2v_d(n-1)l_1^d(0) + 6v_d l_1^d(2u_2\kappa) \tag{2.89}$$

$$\dot{u_2} = (d-4+2\eta)u_2 + 2v_d(n-1)u_2^2 l_2^d(0) + 18v_d\ u_2^2\ l_1^d(2u_2\kappa) \tag{2.90}$$

On tire de l'équation (2.68) :

$$\eta = \frac{16v_d}{d} u_2^2 \kappa\ m_{2,2}^d(2u_2\kappa, 0) \tag{2.91}$$

Nous avons introduit dans les équations précédentes les fonctions seuil l_n^d et $m_{2,2}^d$, définies par :

$$l_n^d(w) = -\frac{Z_k^n\, k^{-d+2n}}{4v_d}\tilde{\partial}_t \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + Z_k k^2 w)^n} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned} m_{2,2}^d(w_1, w_2) = -\frac{Z_k^2\, k^{6-d}}{8v_d}\tilde{\partial}_t \frac{d}{d\mathbf{p}^2} \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} &\frac{1}{(Z_k\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + Z_k k^2 w_1)} \times \\ &\times \frac{1}{(Z_k(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2 + R_k(\mathbf{p}+\mathbf{q}) + Z_k k^2 w_2)} \end{aligned} \tag{2.93}$$

Nous renvoyons à l'annexe A pour une discussion détaillée de ces fonctions seuil. Notons ici quatre propriétés de ces fonctions :

- Les arguments des fonctions seuil apparaissant dans les équations de flot (2.89), (2.90) et (2.91) sont soit 0 soit $2u_2\kappa$, et correspondent aux carrés des masses des deux excitations du modèle vectoriel (mode radial massif et modes de Goldstone). Cette propriété est générique, et se retrouve dans tous les modèles traités par cette approche.

- Les fonctions seuil décroissent avec leur argument. Ceci permet de comprendre simplement le phénomène de découplage des modes massifs. Lorsque la masse M_k à l'échelle k d'un mode est grande, la contribution de ce mode à l'évolution des constantes de couplage, qui est proportionnelle à $l_n^d(M_k^2)$, devient très petite. Les modes massifs n'influencent donc pas l'évolution des constantes de couplage dans le reste du flot.
- Les fonctions seuil ne sont pas polynomiales : si l'on développe ces fonctions en puissance de leur argument, on obtient une série infinie. Par conséquent les équations d'évolution ne sont pas perturbatives, et ceci est du à la présence des fonctions seuil.
- Notons finalement que les puissances de Z_k et de k apparaissant dans la définition des fonctions seuil sont choisies de telle sorte que les équations de flot pour les quantités dédimensionnées, renormalisées n'aient pas de dépendance explicite en Z_k et k.

Les fonctions β trouvées précédemment permettent d'étudier les propriétés critiques du système. On peut en particulier trouver les valeurs des constantes de couplage $\kappa^\star$ et $u_2^\star$ qui annulent ces fonctions β. Comme nous l'avons déjà discuté dans la section 2.7.4, en linéarisant le flot au voisinage du point fixe, et en diagonalisant la matrice de stabilité, on obtient l'exposant critique ν. D'autre part, l'exposant critique η est obtenu en évaluant la fonction η donnée à l'équation (2.91), au point fixe. Ce programme ne peut pas être mené à bien analytiquement, sauf dans certaines régions du plan (n, d), où les approches perturbatives de la théorie des champs sont appliquées. Nous discutons dans la suite le lien avec le développement en constante de couplage, dont le domaine de validité est le voisinage de la dimension 4, le développement de basse température, valable (pour $n > 2$) au voisinage de la dimension 2, et finalement le développement à n grand.

2.7.7 Développement en constante de couplage

Le critère de Ginzburg prédit qu'en dimension supérieure à quatre, les corrections au champ moyen sont négligeables au voisinage de la transition de phase, et que par conséquent la théorie est gaussienne à longue distance. En revanche, en dessous de cette dimension critique (appelée dimension critique supérieure), les corrections à la théorie gaussienne deviennent importantes. On s'attend en particulier à ce qu'au point fixe non trivial des équations de flot, les constantes de couplage prennent des valeurs non nulles, mais petites, juste au dessous de la dimension critique. Ceci justifie un développement en puissances des constantes de couplage. Développons donc les équations de flot obtenues dans la section précédente, au premier ordre en u_2. La dimension anormale η est nulle à cet ordre de troncation (voir l'équation 2.91). Au premier ordre non trivial, les équations (2.89) et (2.90) prennent la forme :

$$\dot{\kappa} = -(d-2)\kappa + 2v_d(n+2)l_1^d(0) + 12v_d\, u_2\, \kappa\, \frac{\partial\, l_1^d(w)}{\partial\, w}\bigg|_{w=0} \tag{2.94}$$

$$\dot{u_2} = (d-4)u_2 + 2v_d(n+8)\, u_2^2\, l_2^d(0) \tag{2.95}$$

On déduit de l'équation d'évolution sur u_2 que la constante de couplage est proportionnelle à $d-4$, ce qui justifie *a posteriori* le développement que nous avons effectué. Afin de comparer les fonctions β avec celles obtenues dans les approches perturbatives, nous réécrivons les équations d'évolution précédentes dans un développement en $\varepsilon = 4-d$. Pour cela, nous utilisons les développements des fonctions seuil décrites dans l'annexe A.3.2. Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \dot{\kappa} = -(2-\epsilon)\kappa + \dfrac{(n+2)}{16\pi^2} l_1^d(0) - \dfrac{3}{8\pi^2} u_2\kappa \\ \dot{u_2} = -\varepsilon u_2 + \dfrac{n+8}{16\pi^2} u_2^2 \end{cases} \tag{2.96}$$

L'équation d'évolution de la constante de couplage u_2 s'identifie à la fonction β obtenue à une boucle dans un développement perturbatif. Les coordonnées $\kappa^\star$, $u_2^\star$ du point fixe du flot, satisfaisant $\dot{\kappa} = \dot{u_2} = 0$ sont, à l'ordre dominant :

$$\begin{cases} \kappa^\star = \dfrac{(n+2)l_1^{d=4}(0)}{32\pi^2} \\ u_2^\star = \dfrac{16\pi^2\varepsilon}{n+8} \end{cases} \tag{2.97}$$

Calculons maintenant l'exposant critique ν. Pour cela, déterminons d'abord la matrice de stabilité :

$$L_{i,j} = \frac{\partial \dot{g_i}}{\partial g_j}, \tag{2.98}$$

où g_i représente toutes les constantes de couplage considérées dans la troncation. On remarque que l'équation (2.95) est indépendante de κ. Par conséquent, la matrice de stabilité L est triangulaire, et ses valeurs propres sont données par ses éléments diagonaux. La valeur propre négative, correspondant à la direction de la température, s'obtient donc en évaluant $\partial\dot{\kappa}/\partial\kappa$ au point fixe. En prenant l'inverse, puis l'opposé de cette valeur propre, on obtient l'exposant critique

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\, \frac{n+2}{n+8}. \tag{2.99}$$

Les valeurs des deux exposants critiques η et ν coïncident avec les déterminations obtenues dans un développement perturbatif à une boucle.

2.7.8 Développement à basse température

Lorsqu'on baisse la dimension d'un système, les fluctuations deviennent de plus en plus importantes[26], et par conséquent, la zone de température correspondant à la phase ordonnée devient de plus en plus petite. La température critique atteint même zéro en une certaine dimension (appelée dimension critique inférieure). Pour cette dimension, le système présente une divergence de la longueur de corrélation à température nulle. Ceci conduit naturellement à étudier les propriétés critiques du système en effectuant un développement de basse température.

Dans le cas où l'espace du paramètre d'ordre est continu (ce qui est le cas du modèle vectoriel pour $n \geq 2$, mais pas pour $n = 1$), la dimension critique inférieure est deux. Ceci est une conséquence directe du théorème de Mermin-Wagner, qui indique qu'en deux dimensions, un paramètre d'ordre local, continu, ne peut pas avoir une valeur moyenne non nulle. Nous présentons ici un argument simple permettant de retrouver cette dimension critique. Raisonnons par l'absurde, et supposons que le système acquiert une aimantation spontanée. Un calcul simple montre qu'alors la susceptibilité transverse diverge, c'est-à-dire que l'écart quadratique moyen de la partie du champ orthogonale à l'aimantation diverge. Dans cette situation, il est peu probable que le champ puisse pointer globalement dans une direction, alors que les fluctuations orthogonales sont divergentes, aussi pense-t'on que le système bidimensionnel ne présente pas d'aimantation spontanée.

Une des caractéristiques des propriétés de basse température d'un système, qui simplifie énormément les approches analytiques, est que les modes massifs ne sont pas excités : les fluctuations de ces modes donnent des contributions d'ordre $\exp(-1/T)$ à la fonction de partition, qui sont nulles à tous les ordres du développement en puissance de T. On dit que les modes massifs sont gelés. Aussi, la physique est entièrement gouvernée par les modes de Goldstone. Dans la limite de basse température, l'étude d'une théorie avec une symétrie continue est menée dans le cadre du modèle σ non linéaire [Pol75][BZJ76][BZJG76].

L'objectif de cette section est de présenter la limite de basse température des équations de flot (2.89)–(2.91). Nous allons montrer que dans notre paramétrisation, où la dépendance dans la température est implicite, le développement à basse température s'obtient en développant les équations de flot à κ grand. Un argument simple permet de comprendre ce phénomène. Considérons la fonction de partition du système, écrit dans la limite du continu, pour des spins de norme unité :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\vec{S}\; \delta\left(\vec{S}^2 - 1\right) e^{-\frac{1}{2k_BT}\int d^dx (\nabla \vec{S})^2}. \tag{2.100}$$

Une redéfinition des champs $\vec{S}' = \vec{S}/\sqrt{k_BT}$ permet de faire disparaître la dépendance

[26] On a déjà remarqué que les corrections au champ moyen sont importantes uniquement pour des dimensions inférieures à la dimension critique supérieure.

en température du terme cinétique :

$$Z = \int \mathcal{D}\vec{S}' \, \delta\left(\vec{S'}^2 k_B T - 1\right) e^{-\frac{1}{2}\int d^d x (\nabla \vec{S}')^2}. \tag{2.101}$$

Enfin, levons la contrainte sur la norme des spins, en utilisant une approximation régulière de la fonction δ (voir l'introduction de l'annexe B) :

$$\delta(X) \simeq e^{-\lambda X^2}, \tag{2.102}$$

valable pour des valeurs suffisamment grandes de la constante λ. La contrainte est maintenant représentée par un terme de potentiel, dont le minimum κ se trouve en $\vec{S}'^2 \simeq 1/T$, et diverge donc à température nulle. Par conséquent, dans le cadre où nous nous plaçons, un développement à basse température correspond à un développement en puissances de $1/\kappa$.

Pour retrouver les résultats du modèle σ non linéaire, développons les équations de flot (2.89), (2.90) et (2.91) à l'ordre dominant en $1/\kappa$. Notons que la masse du mode longitudinal ($\sqrt{2u_2\kappa}$) devient grande. Il faut donc développer les fonctions seuil à grand argument. Toutefois comme ces fonctions décroissent, et tendent vers zéro lorsque leur argument tend vers l'infini, la contribution de ces développements est nulle pour les équations d'évolution de κ et u_2. Pour la dimension anormale, seul le premier terme du développement contribue, et donne :

$$\eta \simeq \frac{4v_d}{d\,\kappa} m_{2,2}^{d,\infty}, \tag{2.103}$$

où

$$m_{2,2}^{d,\infty} = \lim_{w\to\infty} m_{2,2}^d(w,0) w^2 \tag{2.104}$$

décrit le comportement dominant de la fonction $m_{2,2}^d(w)$ à grande masse (au carré) w. Pour les deux autres équations de flot, nous obtenons :

$$\dot{\kappa} \simeq -(d-2+\eta)\kappa + 2v_d(n-1)l_1^d(0) \tag{2.105}$$

$$\dot{u}_2 \simeq (d-4)u_2 + 2v_d(n-1)u_2^2 l_2^d(0) \tag{2.106}$$

L'étude des solutions de point fixe de ces équations de flot confirme qu'au voisinage de $d=2$, $\kappa^\star$ est grand, et se comporte comme $1/\varepsilon$. Considérons maintenant un développement en puissance de $\varepsilon = d-2$, l'écart à la dimension critique inférieure pour les théories ayant un paramètre d'ordre avec plus de deux composantes ($n>2$). Notons ici une propriété remarquable des fonctions de seuil : $l_1^2(0) = 1$ et $m_{2,2}^{d,\infty} = 1$ sont universelles, et ne dépendent pas de la fonction de régularisation considérée. Ceci nous permet de déterminer les développements de η, ainsi que des fonctions β :

$$\eta \simeq \frac{1}{4\pi\kappa} \tag{2.107}$$

$$\dot{\kappa} \simeq -\varepsilon\kappa + \frac{n-2}{4\pi} \tag{2.108}$$

$$\dot{u}_2 \simeq -2u_2 + \frac{n-1}{4\pi} u_2^2 l_2^d(0) \tag{2.109}$$

L'équation d'évolution de κ coïncide avec le résultat à une boucle obtenu dans le cadre du modèle σ non linéaire. Les coordonnées du point fixe sont :

$$\begin{cases} \kappa^\star = \dfrac{n-2}{4\pi\varepsilon} + o(1) \\ u_2^\star = \dfrac{8\pi}{(n-1)l_2^d(0)} + o(\varepsilon) \end{cases} \tag{2.110}$$

Les exposants critiques sont ensuite déterminés en insérant dans l'équation (2.104), la valeur de point fixe $\kappa^\star$ trouvée précédemment, ce qui conduit à :

$$\eta = \frac{\varepsilon}{n-2} + o\left(\varepsilon^2\right). \tag{2.111}$$

L'exposant ν est obtenu en diagonalisant la matrice de stabilité au voisinage du point fixe. On obtient ainsi :

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon} + o(1). \tag{2.112}$$

Ce résultat coïncide, à l'ordre dominant avec le résultat obtenu à deux boucles (voir par exemple [ZJ89a]) :

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{(n-2)} \tag{2.113}$$

2.7.9 Développement à grand nombre de composantes du paramètre d'ordre

Un troisième type de développement est couramment employé dans les approches perturbatives de théorie des champs, et consiste à développer les observables physiques en puissances de $1/n$. Pour retrouver ce développement, nous postulons des comportements en n pour les valeurs des constantes de couplage au point fixe, dont la cohérence sera vérifiée à la fin du calcul. Nous supposons donc :

$$\begin{cases} \kappa^\star \simeq n \\ u_2^\star \simeq n^{-1} \end{cases} \tag{2.114}$$

Ce choix est étayé par l'observation que les solutions de point fixes trouvées dans les deux chapitres précédents (équation (2.110) et (2.110)), présentent ce comportement à n grand. A l'ordre dominant en $1/n$, la dimension anormale est nulle, et les équations d'évolution (2.89) et (2.90) prennent la forme :

$$\dot{\kappa} = -(d-2)\kappa + 2\,n\,v_d l_1^d(0) \tag{2.115}$$

$$\dot{u}_2 = (d-4)u_2 + 2\,n\,v_d u_2^2 l_2^d(0) \tag{2.116}$$

On déduit les coordonnées du point fixe :

$$\left\{\begin{aligned} \kappa^\star &= \frac{2nv_d l_1^d(0)}{(d-2)} \\ u_2^\star &= \frac{(4-d)}{2nv_d l_2^d(0)}\,, \end{aligned}\right. \tag{2.117}$$

qui ont bien les comportements postulés précédemment (voir l'équation (2.114)). L'exposant critique ν, associé à ce point fixe est déduit de la diagonalisation de la matrice de stabilité :

$$\nu = \frac{1}{d-2}. \tag{2.118}$$

À nouveau, les exposants critiques obtenus dans la limite n grand coïncident avec ceux obtenus à une boucle dans l'approche perturbative.

2.7.10 Conclusion préliminaire

Nous avons vus dans les trois sections précédentes que, même dans une troncation très simple, les équations de flot non perturbatives permettent de retrouver les résultats perturbatifs à l'ordre dominant du modèle de Landau-Ginzburg, du modèle σ non linéaire et du développement en $1/n$. Cette propriété est un des attraits majeurs de cette approche, et il n'existe pas, à notre connaissance, d'autres approches présentant cette propriété [27]. En pratique, cette propriété permet d'obtenir des résultats d'une bonne précision lors de l'étude des propriétés en dimension trois. Il est en effet naturel de penser qu'une détermination des exposants critiques, qui coïncide avec des résultats exacts au voisinage de $d = 2$, de $d = 4$, et pour de grandes valeurs de n donne des résultats assez précis en trois dimensions, pour des valeurs physiques de n, de l'ordre de l'unité.

Cette idée est à mettre en correspondance avec la méthode proposée par Le Guillou *et al.* [GZJ87] pour déterminer les exposants critiques du modèle d'Ising en trois dimensions, et qui a été depuis appliqué dans plusieurs situations physiques. L'idée consiste à réécrire une série perturbative (obtenue par exemple dans un développement en constante de couplage), afin qu'elle coïncide avec une valeur exacte, obtenue par une autre méthode. Dans le cas du modèle d'Ising, on contraint les séries pour qu'elles coïncident avec les résultats exacts obtenus en dimension deux. Cette approche permet d'obtenir de très bons résultats en dimensions trois.

2.7.11 Résultats en trois dimensions

L'intérêt principal des équations obtenues dans cette approche réside dans le fait qu'elles peuvent être étudiées en n'importe quelle dimension, pour n'importe quel

[27] En particulier, les développements perturbatifs en constante de couplage dans l'approche de Landau-Ginzburg-Wilson ne permettent pas de déterminer la dimension critique inférieure $d_c = 2$.

nombre de composantes du paramètre d'ordre. On peut alors suivre le point fixe, observé dans les régions perturbatives, dans tout le plan (n, d). On peut en particulier étudier les propriétés critiques du système directement en trois dimensions. Nous reportons dans le tableau 2.1 les exposants critiques obtenus pour différentes troncations, en les comparant aux résultats obtenus par d'autre méthodes. Il est intéressant de noter que les valeurs de ν convergent assez bien vers les valeurs obtenues par ailleurs, et pour la troncation la plus riche la différence est de moins de 1%. Cette convergence s'observe

n	ν		η	
1	$0.520^{a)}$	$0.6300(15)^{e)}$	$0.057^{a)}$	$0.032(3)^{e)}$
	$0.688^{b)}$	$0.6304(13)^{f)}$	$0.038^{b)}$	$0.0335(15)^{f)}$
	$0.635^{c)}$		$0.056^{c)}$	
	$0.635^{d)}$		$0.058^{d)}$	
2	$0.613^{a)}$	$0.6695(20)^{e)}$	$0.058^{a)}$	$0.033(4)^{e)}$
	$0.722^{b)}$	$0.6703(15)^{f)}$	$0.038^{b)}$	$0.354(25)^{f)}$
	$0.683^{c)}$		$0.054^{c)}$	
	$0.666^{d)}$		$0.055^{d)}$	
3	$0.699^{a)}$	$0.7050(30)^{e)}$	$0.051^{a)}$	$0.033(4)^{e)}$
	$0.756^{b)}$	$0.7073(35)^{f)}$	$0.035^{b)}$	$0.0355(25)^{f)}$
	$0.726^{c)}$		$0.051^{c)}$	
	$0.712^{d)}$		$0.048^{d)}$	

TAB. 2.1 – Exposants critiques obtenus en trois dimensions, pour le modèle vectoriel. $a)$ correspond à la troncation minimale, où seuls les flots de $\{Z_k, \rho_0, U_2\}$ (voir eq.(2.69)) sont considérés. Dans la troncation $b)$ on rajoute U_3. Dans $c)$, on rajoute $\{U_3, U_4, Y_0\}$ et dans $d)$ on rajoute $\{U_3, U_4, Y_0, Z_1\}$. $e)$ correspond aux résultats obtenus par resommation des séries à six boucles[ZJ89a]. $f)$ vient des séries perturbatives à sept boucles, obtenues directement en dimension trois.

également sur la figure 2.6, qui donne la valeur de l'exposant ν en trois dimensions, en fonction de n pour les différentes troncations considérées dans la table 2.1. Les valeurs de η sont moins satisfaisantes, et l'on observe de fortes différences entre les résultats perturbatifs et l'approche non perturbative. Ceci est probablement une conséquence de la troncation considérée ici, dans laquelle nous ne considérons pas les interactions à quatre dérivées, qui influencent fortement la détermination numérique de la dimension anormale. Notons toutefois que la dimension anormale est en général petite (sauf au voisinage de $d = 2$). Par conséquent, si l'erreur relative est grande, l'erreur absolue est relativement petite (de l'ordre de 1%). Aussi, lorsque l'on détermine les autres exposants critiques à l'aide des lois d'échelle, l'erreur importante commise sur η ne génère pas une erreur importante sur les autres exposants.

Notons ici que le fait de ne pas pouvoir obtenir une détermination précise de la dimension anormale avec les troncations habituellement considérées est l'un des inconvénients de cette approche à l'heure actuelle. Citons ici une deuxième faiblesse de cette approche : il n'existe pas pour l'instant de méthode systématique permettant de déterminer des barres d'erreur pour les résultats numériques.

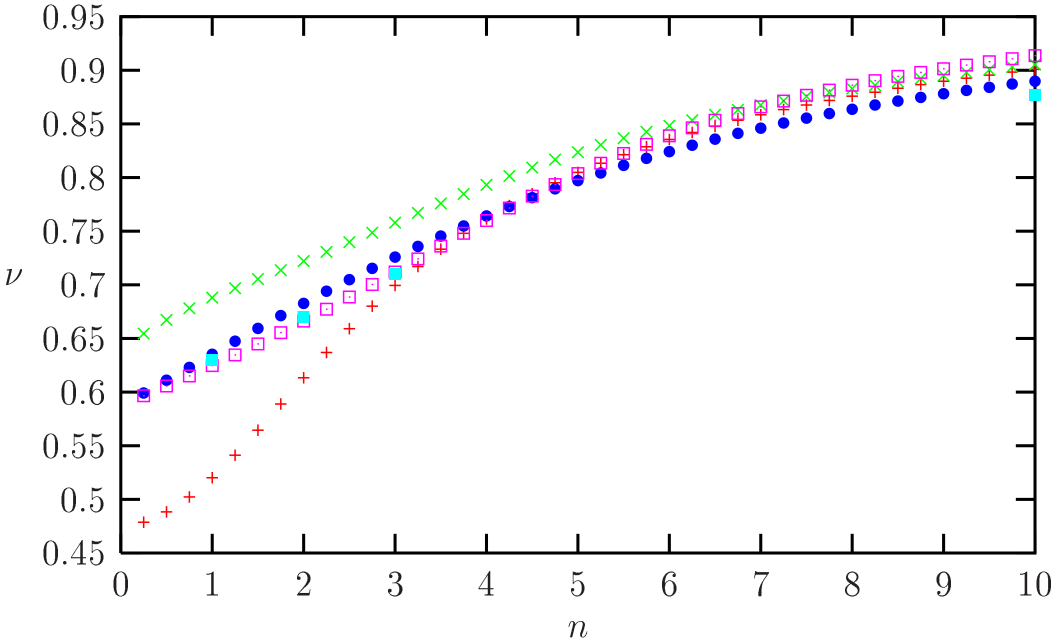


FIG. 2.6 – Valeurs de l'exposant ν en trois dimensions, pour le modèle vectoriel $O(n)$ et pour différentes valeurs de n. Les + correspondent à la troncation minimale, où seuls les constantes de couplage $\{Z_k, \rho_0, U_2\}$ sont considérés (troncation a)). Les $\times$ correspondent à la troncation b) où la constante de couplage U_3 est ajoutée, Les cercles à la troncation c) où U_4 et Y_0 sont inclus, et les carrés vides à la troncation d) où Z_1 est considéré. Finalement, les carrés pleins correspondent aux résultats perturbatifs à six boucles.

2.7.12 Modèle XY en deux dimensions

Terminons ce chapitre par l'étude des équations de flot en deux dimensions, pour un paramètre d'ordre à deux composantes. Ces valeurs de n et d correspondent au modèle XY bidimensionnel, qui a une grande importance physique. En effet, la classe d'universalité associée englobe un grand nombre de systèmes très intéressants (tels que l'hélium-4, les réseaux de jonctions Josephson[MvWG+90], etc.). D'un point de vue plus théorique, le modèle XY bidimensionnel présente une transition de phase d'un nouveau type. En particulier, la valeur moyenne du champ de spins $\vec{S}$ est nul dans les phases de haute et basse température, en accord avec le théorème de Mermin-Wagner. Ce système présente des excitations topologiques, appelées vortex, qui sont responsables de la transition de phase de ce système. L'étude des propriétés critiques du système a été menée au début des années 70[Ber70][KT72]. Nous donnons dans ce chapitre une rapide description de la transition de Kosterlitz-Thouless, et présentons les résultats découlant de l'intégration de équations de flot (2.89)–(2.91).

L'étude de cette théorie par un développement à basse température prédit que la théorie est libre, et que la fonction β sur la constante de couplage s'annule identiquement. En effet, à basse température, seules les petites fluctuations du paramètre d'ordre autour d'une direction privilégiée donnent une contribution importante la fonction de partition. Par conséquent, les propriétés critiques du système dépendent uniquement de la structure locale du paramètre d'ordre. Or la structure locale de $SO(2)$ s'identifie au groupe $\mathbb{R}$ des réels, et la théorie est donc libre. Pour être plus précis, considérons la fonction de partition du modèle sur un réseau carré :

$$\mathcal{Z} = \int \left(\prod_i d\vec{S}_i \, \delta\left(\vec{S}_i^2 - 1\right) \right) \exp\left(-\frac{J}{k_b T} \sum_{<i,j>} \vec{S}_i . \vec{S}_j \right) \tag{2.119}$$

$$= \left(\prod_i \int d\theta_i \right) \exp\left(-\frac{J}{k_b T} \sum_{<i,j>} \cos(\theta_i - \theta_j) \right), \tag{2.120}$$

où nous avons remplacé dans la dernière égalité $\vec{S}_i$ par $(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$. À basse température, seules les petites fluctuations (petites variations de θ de site à site) contribuent à la fonction de partition, et nous pouvons donc développer le cosinus à l'ordre dominant :

$$\mathcal{Z} = \left(\prod_i \int d\theta_i \right) \exp\left(\frac{J}{2k_b T} \sum_{<i,j>} (\theta_i - \theta_j)^2 \right), \tag{2.121}$$

dont la limite continue :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\theta \exp\left(\frac{J}{2k_b T} \int d^d x \, (\partial\theta(x))^2 \right), \tag{2.122}$$

correspond effectivement à une théorie libre.

Toutefois, en développant le cosinus, on interdit des configurations appelées vortex, puisque l'on perd la structure périodique du paramètre d'ordre. Ces configurations jouent un rôle important à température non nulle[28]. Dans de telles configurations, solutions des équations du mouvement, le paramètre d'ordre varie beaucoup dans une région localisée de l'espace. La figure 2.7 présente une telle configuration. En effectuant une transformation dite de Villain sur la fonction de partition (2.119), il est possible de tenir compte de ces excitations. La théorie est alors exprimée en termes de deux variables : la température T, et la vorticité y contrôlant la densité de vortex dans le système. Le système présente une transition, dite de Kosterlitz-Thouless[KT72], entre une phase de basse température où la longueur de corrélation est infinie, et une phase désordonnée par les vortex à haute température, où la longueur de corrélation chute avec la température. Le diagramme de flot présente une ligne de points fixes à basse

[28] Ceci se reflète dans le fait que le développement du cosinus induit des erreurs en $\exp(-1/T)$, qui sont nulles à tous les ordres du développement à T petit, mais qui peuvent devenir important à haute température.

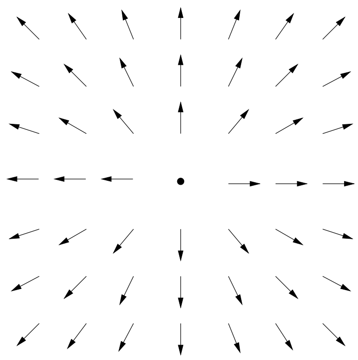


FIG. 2.7 – Configuration de vortex.

température et à vorticité nulle, en accord avec le développement de basse température. Cette ligne de points fixes s'interrompt à une température critique. Au delà, le flot mène le système dans une région de grande vorticité : les vortex sont déconfinés et le système se désordonne. Dans la phase de haute température, la longueur de corrélation décroît en fonction de la température :

$$\xi \simeq \exp(\mathrm{Cte}/\sqrt{T - T_c}). \tag{2.123}$$

On peut également calculer la dimension anormale : $\eta = 1/4$.

Il est très remarquable que les équations de flot obtenues au chapitre 2.7.6 permettent de retrouver qualitativement, et dans une certaine mesure quantitativement les propriétés de la transition de phase de Kosterlitz-Thouless[GW95]. Notons toutefois que dans la paramétrisation considérée ici, nous n'avons pas de champ associé aux degrés de liberté topologiques. Il est donc difficile de faire le lien entre les constantes de couplage κ et u_2 d'une part, et la température et la vorticité d'autre part, et la relation entre ces deux approches n'est donc pas directe. Nous allons voir que tout de même, les caractéristiques du flot sont assez similaires dans les deux approches.

La figure 2.8 présente le résultat de l'intégration de ces équations, pour différentes conditions initiales, avec des valeurs assez grandes de κ. On observe qu'après un régime transitoire relativement court, le équations de flot mènent le système sur une courbe dans le plan (κ,λ) (partie de la courbe à $\lambda \simeq 15$), indépendamment de la condition initiale. Une fois sur cette courbe, le système évolue très lentement. Les fonctions β sont donc quasiment nulles. On observe toutefois que le flot résiduel fait diminuer κ. Lorsque κ dépasse une valeur critique de l'ordre de 0.1, le flot devient de plus en plus rapide. On note que, pour des conditions initiales du flot à suffisamment basse température (suffisamment grand κ), le flot met un temps très long pour atteindre la valeur critique $\kappa \simeq 0.1$, et par conséquent la longueur de corrélation du système est très grande.

Pour des conditions initiales correspondant à des températures plus hautes (de telles conditions n'apparaissent pas dans la figure 2.8), c'est-à-dire à des valeurs initiales de κ plus petites, la situation est différente. La trajectoire du flot ne conduit pas le

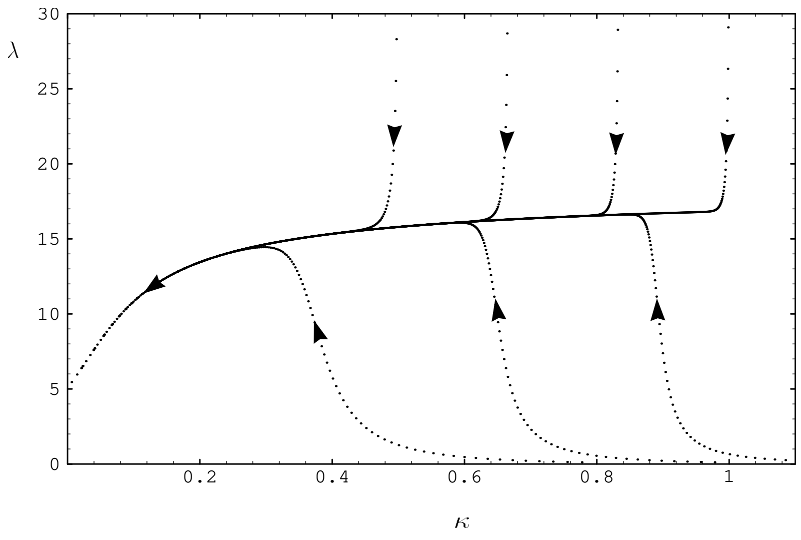


FIG. 2.8 – Évolution des constantes de couplage dans le plan (κ, λ) pour différentes conditions initiales (figure tirée de [GW95]).

système vers la courbe décrite précédemment. La longueur de corrélation est alors petite.

Le flot discuté précédemment présente les caractéristiques de la transition de phase de Kosterlitz-Thouless. À basse température, on trouve une ligne de quasi-points fixes (les fonctions β sont très petites). La longueur de corrélation dans cette phase n'est pas à strictement parler infinie, mais atteint facilement e^{10} fois la maille du réseau. À plus haute température, on trouve une phase dans laquelle la longueur de corrélation décroît rapidement. On n'observe toutefois pas de séparation franche entre ces deux comportements. Ceci est attribué à la troncation trop simple utilisée ici. La même transition de phase a été étudiée dans une approximation plus riche (2.39). On n'observe toujours pas de ligne de points fixes[vGW01], mais la différence entre les deux phases est plus marquée. On peut de plus extraire assez précisément le comportement de la longueur de corrélation en fonction de la température, donné par (2.123). Notons finalement qu'il est possible de déterminer une valeur approchée de la dimension anormale à la transition de phase, et l'on trouve $\eta = 0.24$[GW95] dans la troncation la plus simple, et 0.287 dans la troncation plus riche. Ces valeurs sont à comparer avec le résultat exact $\eta = 0.25$.

L'étude de la transition de XY en deux dimensions conduit à la conclusion que même une troncation assez simple de l'équation exacte du groupe de renormalisation est capable de tenir compte de l'effet des défauts topologiques du système, et ceci alors qu'aucun champ décrivant les vortex n'a été introduit dans la théorie. Ceci prouve que cette approche permet de déterminer une physique non perturbative. D'autre part, il existe un certain nombre de systèmes pour lesquels les défauts topologiques sont susceptibles de jouer un rôle important dans la physique critique, mais pour lesquels on ne connaît pas l'équivalent de la transformation de Villain [29]. Dans ce cas, il est difficile d'étudier le rôle de ces vortex par les méthodes traditionnelles de théorie des champs. L'analyse menée ici indique toutefois que l'approche non perturbative permet probablement de tenir compte de ces excitations topologiques.

Notons pour conclure que des développements méthodologiques récent ont permis d'étudier la formation d'états liés dans le cadre de l'action effective moyenne Γ_k. Cette nouvelle approche permet probablement d'étudier le confinement des vortex dans la phase de basse température. On peut également espérer étudier le confinement des défauts topologiques dans d'autres systèmes, notamment dans le modèle XY en trois dimensions, pour lequel on ne dispose pas de méthode analytique pour étudier le rôle des vortex.

2.7.13 Conclusion

Nous finissons ce chapitre en tirant les conclusions de l'étude du modèle vectoriel $O(n)$ par l'approche non perturbative que nous utilisons dans la suite, lors de l'étude des systèmes frustrés et des systèmes désordonnés.

Les propriétés à une boucle de toutes les approches perturbatives du modèle vectoriel sont contenues dans les équations de flot (2.89), (2.90) et (2.91). À notre connaissance, cette propriété non triviale n'est partagée par aucune autre approche. En particulier les développements en puissance de la constante de couplage, au voisinage de quatre dimensions, dans lesquelles l'exposant critique ν est exprimé comme un développement en puissances de $\varepsilon = 4 - d$ sont probablement incapables de rendre compte de la divergence de cet exposant pour $d = 2$ et pour $n > 2$. Notons que ce phénomène est déjà observé pour des troncations très simples, ne dépendant que de trois constantes de couplage.

D'autre part, au voisinage de la dimension deux, le traitement de la physique critique à basse température ne nécessite pas de faire les approximations effectuées dans le cadre du modèle σ non linéaire perturbatif :

- Les modes massifs donnent une contribution non analytique à la fonction de partition (typiquement en $e^{-\frac{1}{T}}$), qui n'est pas observable dans un développement à basse température. Toutefois, à distance finie de $d = 2$, cette erreur peut être grande. Dans l'approche considérée ici, les modes massifs sont correctement pris en compte.
- Lors du traitement de la théorie par le modèle σ non linéaire, sont introduits des champs π_i, correspondant aux fluctuations du champ microscopique $\vec{S}$ autour de la direction de l'aimantation. Du fait de la normalisation du champ $\vec{S}$, les modes π_i prennent leurs valeurs dans un domaine fermé : $\sum_i \pi_i^2 \leq 1$. Toutefois, lors de l'intégration fonctionnelle apparaissant dans la fonction de partition, cette contrainte n'est pas prise en compte dans l'approche perturbative du

[29] Un tel exemple est traité au chapitre suivant.

modèle σ non linéaire, et l'on intègre chacun des modes π_i sur $\mathbb{R}$. Ceci induit à nouveau une erreur en $e^{-\frac{1}{T}}$, qui n'a pas d'influence sur les propriétés critiques au voisinage strict de $d = 2$, mais qui peut devenir importante au delà. Dans l'approche considérée ici, les champs π_i ne sont pas introduits, et nous n'avons pas à nous soucier du domaine d'intégration des champs.

La théorie peut en fait être étudiée en dimension quelconque, et pour n'importe quel nombre de composantes de spin. Le fait que les résultats coïncident avec les prédictions des théories de perturbation dans leurs domaines respectifs de validité est une bonne indication de la précision des exposants critiques obtenus par cette approche. On obtient en dimension trois des exposants critiques en assez bon accord avec les résultats obtenus par d'autres procédés.

Finalement, la méthode est capable de tenir compte d'excitations topologiquement non triviales, tels que les vortex du modèle XY, comme l'atteste l'étude menée en deux dimensions.

Chapitre 3

Systèmes frustrés

L'étude des systèmes frustrés a suscité beaucoup de travaux théoriques et expérimentaux durant les quarante dernières années, et apparaît aujourd'hui comme un élément important dans l'émergence de phénomènes physiquement non triviaux. L'exemple le plus célèbre est probablement les phases de verre de spin. Un des effets caractéristique de la frustration est d'augmenter le dégénérescence de l'état fondamental. À titre d'exemple, considérons un système de trois spins d'Ising, interagissant deux à deux ferromagnétiquement. L'énergie de ce système est minimisée pour des configurations où les trois spins sont dans le même état. On dénombre alors deux états fondamentaux : $(+++)$ et $(---)$. Si, en revanche, l'interaction est antiferromagnétique, le minimum de l'énergie est atteint pour les configurations ayant deux spins dans le même état, le troisième pointant dans la direction opposée. On dénombre alors 6 états fondamentaux : les trois permutations de $(++-)$ et les trois permutations de $(--+)$. Remarquons que, dans ces six configurations, on trouve deux spins pointant dans la même direction. L'énergie d'interaction de cette paire n'est pas minimisée dans l'état fondamental. Il est par conséquent impossible de minimiser l'énergie d'interaction de *toutes* les paires de spins simultanément. L'état fondamental correspond à un minimum *global* de l'énergie, même s'il est possible de réduire *localement* l'énergie. Le système est dit frustré.

Dans le cas des systèmes frustrés constitués de variables continues, auquel nous limitons notre étude dans la suite, on observe le même effet d'accroissement de la dégénérescence de l'état fondamental. Considérons l'exemple du système frustré, constitué de spins XY sur un réseau. Dans le cas non frustré (réalisé pour une interaction ferromagnétique entre plus proches voisins), l'état fondamental du système est entièrement déterminé par un angle, indiquant l'orientation commune de tous les spins. Dans le cas frustré (qui apparaît si les spins sont disposés sur un réseau triangulaire, et sont soumis à une interaction antiferromagnétique entre plus proches voisins), il est nécessaire de spécifier un angle, mais également une variable de type Ising. On comprend facilement ce phénomène en étudiant un système de trois spins à deux composantes, chacun interagissant antiferromagnétiquement avec les deux autres. Dans l'état fondamental, les spins pointent à 120° les uns par rapport aux autres. Pour déterminer entièrement l'état fondamental, on peut par exemple spécifier l'orientation d'un des trois spins (le spin du haut sur la figure 3.1). Toutefois, on observe qu'il existe deux configurations

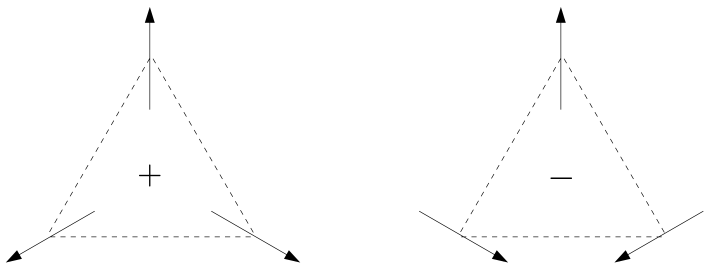


FIG. 3.1 – Deux états fondamentaux du système de spins XY soumis à une interaction antiferromagnétique, correspondant à la même orientation du spin au sommet du triangle.

compatibles avec cette condition, et choisir l'une de ces deux configurations nécessite de spécifier une variable de type Ising.

La question se pose alors des conséquences de cet effet sur les caractéristiques physiques du système. Donnons tout de suite un premier élément de réponse : le schéma de brisure de symétrie caractérisant la transition de phase diffère de celui du système non frustré équivalent. Ainsi, dans l'exemple précédent de spins à deux composantes sur un réseau triangulaire, le schéma de brisure de symétrie du système non frustré est $SO(2) \to 1$, et devient $SO(2) \times \mathbb{Z}_2 \to 1$ en présence de frustration [1]. Le paramètre d'ordre doit également être modifié, et devient une matrice 2×2 pour le système frustré, et a donc deux fois plus de composantes que le système non frustré [2]. Ces deux systèmes n'appartiennent pas à la même classe d'universalité, et l'on s'attend à ce que leurs propriétés critiques diffèrent.

Les considérations précédentes conduisent à la conclusion qu'une nouvelle physique critique doit émerger des systèmes frustrés. Ceci est corroboré par les études expérimentales menées sur deux classes de matériaux que nous étudions dans la suite : les antiferromagnétiques triangulaires empilés et les hélimagnétiques. La première classe de systèmes est une réalisation physique de l'exemple de frustration pour des spins XY décrit précédemment. La géométrie du réseau induit une structure spatiale non triviale de l'état fondamental, représentée sur la figure 3.2 : les spins plus proches voisins pointent à 120° les uns par rapport aux autres. Notons que l'état fondamental est invariant sous la translation menant un site du réseau sur un des six sites second plus proches voisins [3]. La cellule magnétique qui se répète dans l'ensemble de l'échantillon est constituée des spins attachés à trois sites voisins, formant un triangle (aussi appelé

[1] Le groupe $\mathbb{Z}_2$ est associé à la variable d'Ising qu'il faut spécifier pour déterminer entièrement l'état fondamental (voir figure 3.1).

[2] De tels systèmes ont d'ailleurs été proposés comme réalisations physiques de théories vectorielles à plus de trois composantes[MK76].

[3] la norme du vecteur de translation vaut $\sqrt{3}$ fois la maille du réseau.

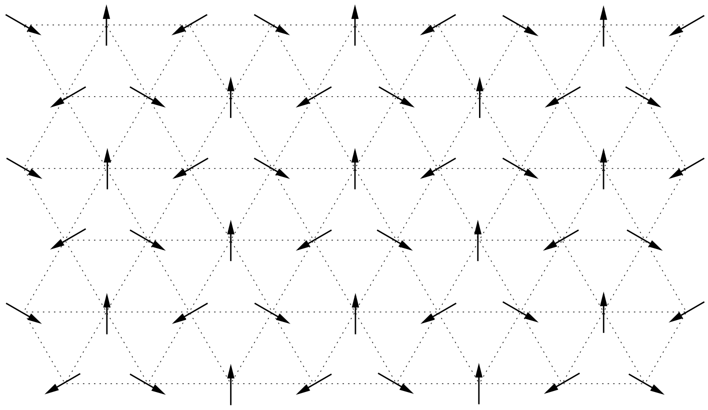


FIG. 3.2 – État fondamental des antiferromagnétiques triangulaires empilés.

plaquette). Pour les systèmes de la seconde classe (les hélimagnétiques), la frustration émerge de la compétition entre interactions ferromagnétiques et antiferromagnétiques. l'état fondamental est alors caractérisé par une structure hélicoïdale, schématisée sur la figure 3.3. Les spins s'enroulent en hélice le long d'un axe, et ce motif se répète dans les

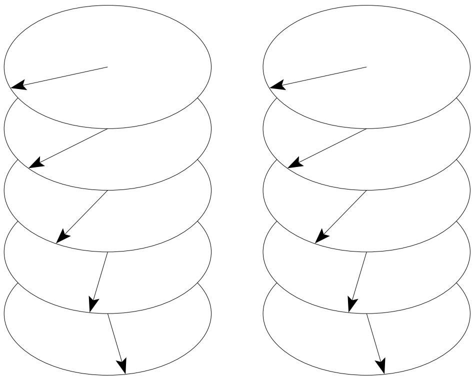


FIG. 3.3 – État fondamental des hélimagnétiques.

directions perpendiculaires. La structure du réseau sous-jacent n'influe pas sur la frustration du système, contrairement à ce qui est observé pour les antiferromagnétiques frustrés. La frustration n'est donc pas d'origine géométrique.

Nous commençons l'étude de ces matériaux en déterminant le schéma de brisure de symétrie, ainsi que le paramètre d'ordre décrivant la transition de phase de ces deux systèmes. Il découle de cette étude que les hélimagnétiques et les antiferromagnétiques triangulaires empilés présentent le même schéma de brisure de symétrie, ce qui justifie de les étudier simultanément. Nous faisons ensuite une description détaillée des études expérimentales et numériques menées sur ces systèmes. L'analyse de ces résultats conduit à deux observations remarquables : on trouve génériquement des comportements en loi de puissance entre les différentes quantités observables (aimantation, susceptibilité, longueur de corrélation, ...) et les paramètres externes (température, champ magnétique, ...) au voisinage de la transition de phase. Toutefois, les exposants critiques caractérisant ces lois de puissance ne sont pas universels : on observe des variations significatives de ces exposants de matériaux à matériaux. Ces deux points semblent être contradictoires, le premier semblant indiquer que la transition est du second ordre, et donc universelle, ce qui est infirmé par le second ! Un des objectifs principaux de ce travail est de résoudre cette apparente contradiction. Nous présentons ensuite les développements théoriques, en commençant par les différentes approches perturbatives utilisées pour traiter la théorie des champs correspondante. La problématique dans laquelle se situe notre travail est ensuite résumée, et nous évoquons les arguments qui conduisent à utiliser la méthode non perturbative décrite dans le chapitre précédent. Nous discutons alors les troncations utilisées, et les résultats qui en découlent. Nous comparons finalement ces résultats à ceux obtenus par d'autres méthodes, notamment à l'aide des séries à six boucles[PRV01a], en dimension trois.

3.1 Paramètre d'ordre

3.1.1 Hélimagnétiques

Les hélimagnétiques, constitués d'arrangements cristallins d'atomes magnétiques présentent à basse température une structure magnétique hélicoïdale (voir figure 3.3). Ce phénomène est attribué, dans les modélisations les plus simples, à la compétition le long d'un axe entre une interaction ferromagnétique entre spins plus proches voisins et antiferromagnétique à plus grande distance (voir figure 3.4). Discutons maintenant

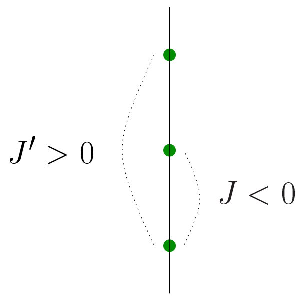


FIG. 3.4 – Constantes d'échange dans la direction induisant la frustration, pour les hélimagnétiques. Les interactions J et J' entre plus proches voisins et second plus proches voisins sont respectivement ferromagnétiques et antiferromagnétiques.

les différentes phases susceptibles d'apparaître dans ce modèle.

• Lorsque l'interaction ferromagnétique domine ($|J| \gg |J'|$), l'état fondamental du système est ferromagnétique, et tous les spins pointent (en moyenne) dans la même direction. À suffisamment basse température, on s'attend donc à trouver une phase ferromagnétique, caractérisée par une aimantation $\langle \vec{S}_{\mathbf{q=0}} \rangle$ non nulle[4].

• Toutefois l'interaction antiferromagnétique tend à déstabiliser cet ordre, et lorsque celle-ci dépasse une valeur critique ($|J'| > \alpha_c|J|$), la minimisation de l'énergie requiert un compromis entre les ordres ferromagnétique et antiferromagnétique. Le système présente alors une structure hélicoïdale : dans l'espace réciproque, les modes $\vec{S}_{\pm\mathbf{Q}}$ acquièrent une valeur moyenne non nulle, où $\mathbf{Q}$ détermine de quel angle tourne le vecteur $\vec{S}$ lorsqu'on se déplace le long de l'axe de l'hélice. Les modes $\vec{S}_{\pm\vec{Q}}$ sont complexe conjugués[5], et peuvent s'exprimer à l'aide de deux vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ à composantes réelles :

$$\vec{S}_{\pm\vec{Q}} = \vec{S}_1 \pm i\vec{S}_2. \tag{3.1}$$

Lorsque $\langle \vec{S}_{\pm\mathbf{Q}} \rangle \neq 0$, le système est dans la phase hélicoïdale.

• Finalement, on s'attend à ne plus trouver aucun ordre à haute température. Le système se trouve alors dans la phase paramagnétique.

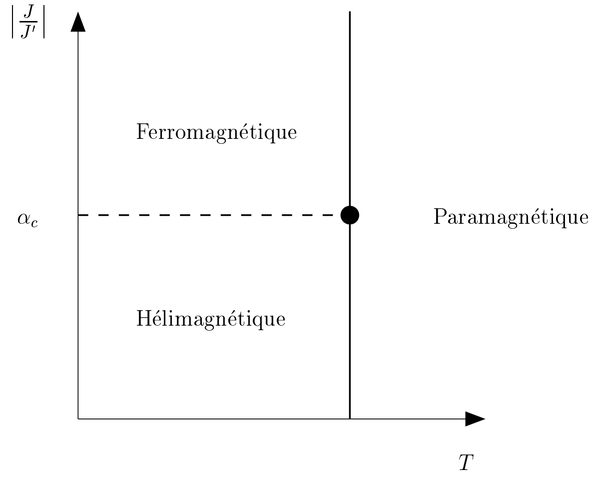


FIG. 3.5 – Diagramme de phase schématisé du modèle d'hélimagnétiques considéré dans le texte.

Dans la modélisation simple que nous considérons ici, le système présente donc trois phases, et le diagramme de phase associé est représenté schématiquement sur la figure 3.5. On observe donc trois types de transition :

- La transition ferromagnétique-paramagnétique est bien connue, et a été discutée dans le chapitre précédent.
- La transition ferromagnétique-hélimagnétique est du premier ordre, et ne présente donc pas de propriété universelle.
- La transition hélimagnétique-paramagnétique est du second ordre, et présente un schéma de brisure de symétrie nouveau.

[4]Les crochets dénotent, comme d'habitude, une moyenne thermique.
[5]Ceci est la conséquence du fait que le champ $\vec{S}(x)$ est réel.

– Notons que les trois lignes de transition de phase se rejoignent en un point tricritique, appelé point de Lifshitz[6].

Dans la suite, nous limitons notre attention à la transition hélimagnétique-paramagnétique. Lors de cette transition, les vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ (voir l'équation (3.1)) s'annulent. Par conséquent, le paramètre d'ordre est constitué de *deux* vecteurs, au lieu d'un seul pour une transition paramagnétique-ferromagnétique. C'est là que réside l'originalité de cette transition de phase.

L'étude de l'interaction entre les modes critiques permet de déterminer le schéma de brisure de symétrie, obtenu à partir du groupe de symétrie de la phase de haute température, et du groupe de symétrie résiduelle de la phase de basse température. Les matériaux étudiés expérimentalement présentent une forte anisotropie dans l'orientation des spins, qui confine les spins dans un plan. Les vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ ont donc deux composantes. Toutefois, nous considérons dans la suite une généralisation de cette situation où les vecteurs ont un nombre arbitraire de composantes, noté n.

• Dans la phase de haute température, le système présente une symétrie $O(n)$, correspondant aux rotations compatibles avec l'anisotropie du système. Une étude détaillée de l'interaction entre modes critiques (d'impulsion $\mathbf{q} \simeq \pm\mathbf{Q}$) est menée dans l'annexe B. On en tire le résultat que le système présente également une symétrie $O(2)$ [7], correspondant à la multiplication par une phase :

$$\vec{S}(\pm\mathbf{Q}+\delta\mathbf{q}) \to e^{\pm i\theta}\vec{S}(\pm\mathbf{Q}+\delta\mathbf{q}). \tag{3.2}$$

Cette transformation, exprimée en fonction des vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ peut être représentée sous forme matricielle :

$$\left(\vec{S}_1,\vec{S}_2\right) \to \left(\vec{S}_1,\vec{S}_2\right).R(\theta)\ , \tag{3.3}$$

où $R(\theta)$ est une matrice de $O(2)$.

Nous présentons ici un argument simple permettant de comprendre cette symétrie $O(2)$. L'invariance sous translation du système impose que les termes d'interaction satisfassent à la conservation de l'impulsion $\sum \mathbf{q}_i = 0$. Si nous limitons notre étude aux seuls modes critiques, d'impulsion $\mathbf{q} = \pm\mathbf{Q}+\delta\mathbf{q}$, cette contrainte ne peut être vérifiée que par les termes faisant intervenir autant de fois $\vec{S}(\mathbf{Q}+\delta\mathbf{q})$ et $\vec{S}(-\mathbf{Q}+\delta\mathbf{q})$ (c'est en particulier le cas du terme de masse $\int \vec{S}(\mathbf{Q}+\delta\mathbf{q}).\vec{S}(-\mathbf{Q}-\delta\mathbf{q})$). Lorsque la transformation (3.2) est appliquée à un tel terme, les phases se compensent exactement, ce qui prouve l'invariance de la théorie sous le groupe $O(2)$.

• Dans la phase de basse température, le système adopte une configuration hélicoïdale. Les vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ sont alors orthogonaux et de même norme, caractéristique

[6]Beaucoup de travaux ont été menés pour déterminer les propriétés critiques du système à ce point tricritique, propriétés qui ne sont à ce jour pas très bien déterminées. La difficulté provient en partie du fait que la dimension critique supérieure de la théorie des champs décrivant le système au point de Lifshitz est 6. Par conséquent, il est difficile d'obtenir des résultats fiables sur les propriétés critiques du système tridimensionnel à partir des développements en puissances de $\varepsilon = 6 - d$.

[7]Nous ne considérons pas le cas où la structure magnétique est commensurable avec le réseau. Dans ce cas, d'autres interactions sont autorisées, brisant une partie du groupe $O(2)$ [GP76].

d'une polarisation circulaire pour $\vec{S}(x)$. Les symétries résiduelles du système dans la phase ordonnée sont d'une part $O(n-2)$ correspondant aux rotations laissant invariant les vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$, et d'autre part $O(2)_{\mathrm{diag}}$, correspondant à l'opération d'un élément du groupe $O(2)$ (multiplication par une phase, voir équation (3.2)), qui mélange les composantes de $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$, compensé par une rotation dans le plan $(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ (voir figure 3.6).

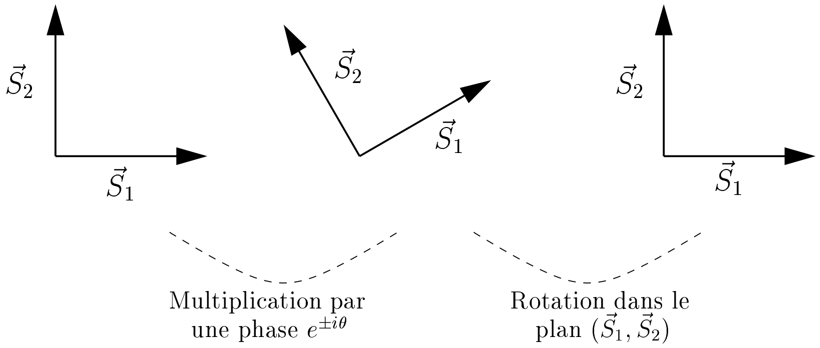


Fig. 3.6 – Invariance de l'état fondamental sous $O(2)_{\mathrm{diag}}$, composé d'une multiplication par une phase (eq. (3.2), compensée par une rotation d'angle θ dans le plan $(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$.

Le schéma de brisure de symétrie caractérisant la transition de phase est donc :

$$O(n) \times O(2) \ \rightarrow \ O(n-2) \times O(2)_{\mathrm{diag}}. \tag{3.4}$$

Une transition de phase caractérisée par ce schéma de brisure de symétrie est qualifiée de chirale, et suivant le type d'anisotropie (ou la valeur de n), on parle de transition de type XY ou Heisenberg chirale. Dès le milieu des années 70, il est apparu clairement qu'une nouvelle physique critique devait être associée à ce schéma de brisure de symétrie [JLM76], [BKM76], [GP76].

L'espace du paramètre d'ordre associé au schéma de brisure de symétrie (3.4) est :

$$\frac{O(n) \times O(2)}{O(n-2) \times O(2)_{\mathrm{diag}}}, \tag{3.5}$$

qui se réduit, dans les cas physiquement intéressant à $SO(2) \times \mathbb{Z}_2$ pour $n = 2$ et $SO(3)$ pour $n = 3$.

3.1.2 Antiferromagnétiques triangulaires empilés

Dans la section précédente, nous avons considéré un système dont la frustration émerge de la compétition entre interactions ferromagnétiques et antiferromagnétiques.

Certains systèmes présentent de la frustration, bien que n'étant soumis qu'a des interactions antiferromagnétiques. La frustration a alors une origine géométrique, induite par la structure du réseau. C'est le cas en particulier des antiferromagnétiques triangulaires empilés. Ces matériaux sont constitués de réseaux bidimensionnels triangulaires de spins, soumis à des interactions antiferromagnétiques entre plus proches voisins. Il est facile de se convaincre que l'on ne peut pas trouver de configuration minimisant *simultanément* l'énergie d'interaction de chaque paire de spins. L'état fondamental est alors caractérisé par une structure où les spins plus proches voisins pointent à 120° les uns par rapport aux autres, comme illustré sur la figure 3.2. Ces plans sont empilés, et les spins voisins appartenant à des plans différents sont soumis à une interaction ferromagnétique ou antiferromagnétique suivant les matériaux, sans influencer les caractéristiques critiques du système [8].

À nouveau, une étude détaillée de l'interaction permet de déterminer le schéma de brisure de symétrie caractérisant la transition de phase, et nous renvoyons le lecteur à l'annexe B pour une étude plus détaillée. Cette étude mène à la conclusion que le schéma de brisure de symétrie et le paramètre d'ordre caractérisant la transition de phase sont identiques à ceux des hélimagnétiques (voir les équations (3.4) et (3.5)). Nous présentons ici un argument simple permettant de déterminer le schéma de brisure de symétrie.

Dans cette optique, nous allons déterminer le groupe de symétrie du Hamiltonien, et le sous-groupe de symétrie résiduelle dans l'état fondamental.

• Le Hamiltonien est invariant sous deux types de transformations : les opérations de rotation des spins (symétrie $O(n)$), et les opérations de symétrie du réseau, qui changent les points d'attache des spins, sans changer leur orientation. Sur la figure 3.7, nous illustrons par un exemple ces deux types de transformation : la transformation du haut correspond à une rotation de 120° des spins, sans changer leur point d'attache[9], celle du bas à une rotation de 120° des points d'attache des spins, sans changer leur orientation. Le groupe de symétrie du réseau triangulaire est un groupe discret, noté C_{3v} [10], de sorte que le groupe de symétrie du Hamiltonien est $O(n) \times C_{3v}$.

• Déterminons maintenant les symétries résiduelles de l'état fondamental, représenté sur la figure 3.2. La structure non triviale de l'état fondamental implique que, parmi les opérations de symétrie $O(n)$, le sous-groupe de symétrie résiduelle est $O(n-2)$, et correspond aux transformations laissant inchangées les trois orientations de spin de l'état fondamental. Il existe un deuxième type de symétrie résiduelle. Il s'agit de l'opération combinée d'un élément du groupe C_{3v} (intervertissant les points d'attache des spins), opération compensée par une rotation de l'orientation des spins.

[8] Une interaction antiferromagnétique n'induit pas de sur-frustration, et ne change donc pas le schéma de brisure de symétrie du système.

[9] Nous choisissons ici une rotation de 120° à titre d'exemple, mais tous les éléments du groupe $O(n)$ sont des symétries du Hamiltonien.

[10] Nous ne prenons pas en compte ici les opérations de translation, qui ne sont pas pertinentes pour ce qui suit.

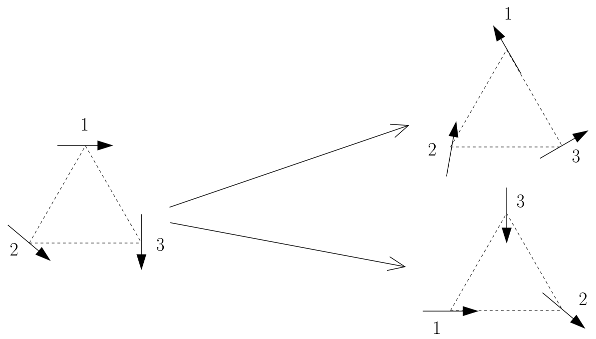


FIG. 3.7 – Deux types de transformation, correspondant à une rotation de 120°. La transformation du haut change l'orientation des spins, celle du bas change le point d'attache des spins.

Cette opération de symétrie est représentée sur la figure 3.8. On note ce groupe $C_{3v\,\mathrm{diag}}$. Ainsi, le groupe de symétrie résiduelle est $O(n-2) \times C_{3v\,\mathrm{diag}}$.

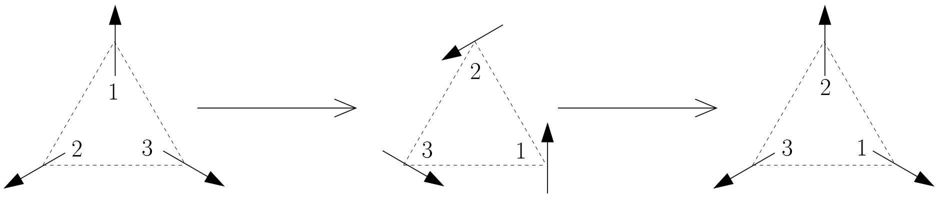


FIG. 3.8 – Symétrie résiduelle $C_{3v\,\mathrm{diag}}$, composée d'une permutation du point d'attache des spins, compensée par une rotation de l'orientation des spins.

On déduit donc le schéma de brisure de symétrie de cette transition :

$$O(n) \times C_{3v} \to O(n-2) \times C_{3v\,\mathrm{diag}}. \tag{3.6}$$

Ce schéma de brisure de symétrie n'est pas similaire à celui trouvé précédemment pour les hélimagnétiques. Toutefois, on s'attend à ce que la symétrie C_{3v} du réseau soit élargie à $O(2)$[11] de façon effective. Sous cette hypothèse, le schéma de brisure de symétrie s'identifie à celui trouvé pour les hélimagnétiques.

Revenons ici sur le groupe de symétrie du Hamiltonien déterminé précédemment. Nous avons observé qu'il est constitué des opérations de symétrie des spins, et du groupe de symétrie du réseau. Il est remarquable que nous ayons besoin de ces deux informations, alors que dans un système ferromagnétique non frustré, le groupe de symétrie du réseau n'est en général pas évoqué. Ceci se comprend en observant que

[11] La transformation de Hubbard-Stratonovitch confirme cette hypothèse. En effet, les termes brisant la symétrie $O(2)$ en C_{3v} sont des termes en φ^6, et sont probablement non pertinent en dimension trois.

l'état fondamental d'un système ferromagnétique ne brise aucune des symétries du réseau. Aussi, ces opérations de symétrie n'interviennent pas dans le schéma de brisure de symétrie. En revanche, l'état fondamental non trivial du système frustré considéré ici n'est pas invariant sous les opérations de symétrie du réseau. Il est donc important d'en tenir compte lors de la détermination du schéma de brisure de symétrie.

3.2 Situation expérimentale

Nous discutons dans les deux sections suivantes les résultats expérimentaux obtenus pour les deux types de matériaux présentant une transition de phase chirale. Notons que les matériaux étudiés présentent toujours une forte anisotropie dans l'orientation des spins. Par conséquent, si la transition XY chirale est assez facilement observée, il est beaucoup plus difficile d'obtenir une réalisation expérimentale de la transition Heisenberg chirale. Toutefois, en ce qui concerne les antiferromagnétiques triangulaires empilés, trois angles d'approches ont été utilisés pour réduire l'anisotropie du système. Nous discutons rapidement ces techniques et présentons les résultats qui en découlent. À notre connaissance, ces techniques n'ont jamais été mises en œuvre dans les hélimagnétiques.

3.2.1 Antiferromagnétiques triangulaires empilés

Les antiferromagnétiques triangulaires empilés sont l'archétype des systèmes frustrés réalisant le schéma de brisure (3.4). Un nombre impressionnant de travaux ont été réalisés sur ces matériaux durant les vingt dernières années (voir [CP97] pour une revue sur le sujet). La situation expérimentale s'est considérablement améliorée depuis la fin des années 80, et il est maintenant possible d'obtenir des échantillons d'une grande pureté. Le diagramme de phase de ces matériaux est maintenant très bien caractérisé, et le schéma de brisure de symétrie associé à chaque transition de phase est bien déterminé.

La composition chimique de ces matériaux est : ABX_3 et BX_2, où A est un métal alcalin, B un métal de transition et X un halogène. Les cristaux les plus étudiés sont $CsMnBr_3$, $CsMnI_3$, $CsNiCl_3$ pour la première classe, et VBr_2 et VCl_2 pour la seconde. Les atomes magnétiques B forment une structure cristalline constituée de plans bidimensionnels, empilés. L'interaction J' entre moments magnétiques plus proches voisins dans un même plan est antiferromagnétique, et l'interaction J hors du plan entre spins plus proches voisins est ferromagnétique (voir figure 3.9).

Ces matériaux présentent une forte anisotropie, aussi bien dans l'orientation des spins que dans l'interaction entre plus proches voisins. Nous discutons dans la suite ces deux types d'anisotropies.

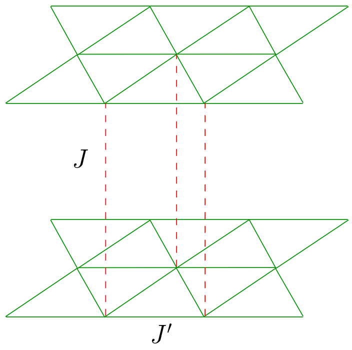


Fig. 3.9 – Constantes d'échanges des antiferromagnétiques triangulaires empilés. Les interactions entre spins plus proches voisins dans le plan et hors du plan sont respectivement J' et J.

- En ce qui concerne les interactions, ABX_3 est très unidimensionnel, avec J de deux à trois ordres de grandeur plus grand que J'. Inversement, BX_2 est fortement bidimensionnel, avec un rapport entre constantes d'interaction inversé. Ces matériaux se comportent, à haute température comme des matériaux unidimensionnels et bidimensionnels. À plus basse température, on observe un phénomène de bifurcation, et l'isotropie de l'espace est restaurée de façon effective, pour les propriétés thermodynamiques.
- Ces systèmes présentent également une anisotropie dans l'orientation des spins, provenant de l'interaction entre les spins et le cristal. L'anisotropie tend soit à confiner les spins dans le plan, soit à les aligner perpendiculairement aux plans.

Un Hamiltonien effectif permet de décrire ces différentes propriétés :

$$H = J \sum_{<i,j>}^{\text{chaînes}} \vec{S}_i.\vec{S}_j + J' \sum_{<i,j>}^{\text{plans}} \vec{S}_i.\vec{S}_j + D \sum_i (S_i^z)^2 - \vec{B} \sum_i \vec{S}_i. \tag{3.7}$$

Les deux premiers termes régissent l'interaction dans le plan (constante d'échange J') et hors du plan (constante d'échange J). L'anisotropie de l'orientation des spins est déterminée par la constante D.

- Si $D > 0$, l'énergie d'anisotropie est minimisée pour des spins confinés dans le plan, et le système présente une anisotropie de type XY. Une étude systématique des propriétés critiques de systèmes ayant cette anisotropie a été menée, en particulier sur $CsMnBr_3$.
- $D < 0$ correspond à la situation inverse, où les spins s'alignent perpendiculairement au plan (anisotropie de type Ising). Parmi les matériaux présentant cette anisotropie, on trouve $CsNiCl_3$, $RbNiCl_3$ et $CsMnI_3$.
- Enfin, pour $D = 0$, l'isotropie est restaurée, et l'on parle alors de système de spins isotropes, ou encore de spins de Heisenberg. Cette situation n'est toutefois pas réalisée dans la nature, et tous les matériaux présentent une anisotropie.

Les propriétés critiques des antiferromagnétiques triangulaires empilés avec anisotropie de type XY, ont été abondamment étudiés, et nous reportons les résultats expérimentaux sont reportés sur la table 3.1.

cristal	ref.	α	β	γ	ν
$CsMnBr_3$	[PKV+00]		0.21(1)		
	[GMCL89]		0.24(2)		
	[MGC89]		0.21(2)	1.01(8)	0.54(3)
	[ANU+88]		0.25(1)		
	[MCG87]		0.22(2)		
	[WBG91]	0.39(9)			
	[DvLW+92]	0.40(5)			
	[DvLW+92]	0.44(5)			
	[KSIA88]			1.10(5)	0.57(3)
$CsNiCl_3$	[WBW+95]	0.37(8)			
	[WBW+95]	0.37(6)			
	[EFS94]	0.342(5)			
	[ESMK97]		0.243(5)		
$CsMnI_3$	[WBW+95]	0.34(6)			
$CsCuCl_3$	[SSS+94]		0.23-0.25(2)		
	[WWW+96]	0.35(5)	1er ordre		

TAB. 3.1 – Exposants critiques des antiferromagnétiques triangulaires empilés, d'anisotropie XY ($n = 2$).

Nous discutons dans la suite les différentes approches expérimentales qui permettent de réduire (et même d'annuler dans certains cas) l'anisotropie dans l'orientation des spins, et qui conduisent donc à des réalisations physiques de la transition de phase Heisenberg chirale.

Systèmes quasi-isotropes

La première consiste à utiliser les composés chimiques VBr_2 et VCl_2, qui présentent une faible anisotropie, de type Ising. Ces matériaux présentent une bifurcation [Col89] entre un comportement isotrope à haute température, et un comportement XY à plus basse température. Pour VBr_2, cette température de bifurcation est évaluée (en température réduite) à $1/450$ [KUH+87], et est plus petite pour VCl_2, bien qu'on ne sache pas déterminer sa valeur. Les études expérimentales de ces matériaux sont difficiles à interpréter, et il existe peu de déterminations d'exposants critiques pour ces matériaux.

Systèmes sous champ magnétique

Le second angle d'approche a été proposé au début des années 90 [PHC88] et découle de l'étude du diagramme de phase des systèmes d'anisotropie de type Ising sou champ magnétique. Le diagramme de phase de ces systèmes a été déterminé expérimentalement [PCP90] [TPPC93] [KGA+93] [EFS94], ainsi que théoriquement par une étude de type champ moyen[PHC88]. Nous donnons une rapide description de ce diagramme, présenté sur la figure 3.10, mais nous nous intéresserons dans la suite à un seul point : le point tétracritique où les quatre lignes de transition se rejoignent.

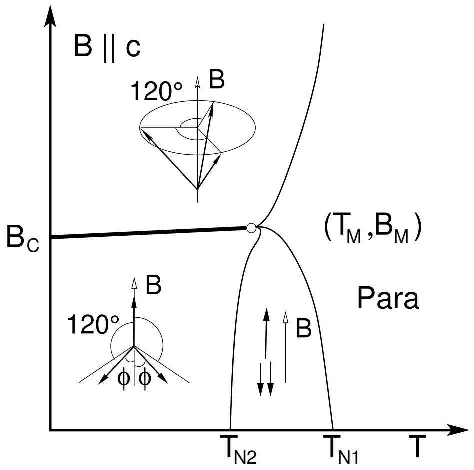


FIG. 3.10 – Diagramme de phase des antiferromagnétiques triangulaires empilés, avec une anisotropie de type Ising, sous un champ magnétique perpendiculaire aux réseaux triangulaires. Pour chaque phase, l'aimantation de chacun des trois sous réseaux est représentée (figure tirée de [BWvL+00]).

Afin de décrire chacune de ces phases, il est nécessaire de diviser le réseau triangulaire initial en trois sous-réseaux (voir figure 3.11), chacun contenant un tiers de l'ensemble des points. La maille de chacun de ces sous-réseaux est $\sqrt{3}$ fois plus grande que celle du réseau initial[12]. La détermination de l'aimantation des trois sous-réseaux permet de différencier chacune des phases. La figure 3.10 présente le diagramme de phase des antiferromagnétiques triangulaires empilés sous champ magnétique[13], ainsi que pour chaque phase, les caractéristiques des aimantations des sous-réseaux.

À basse température et faible champ magnétique, un des trois sous-réseaux s'aimante dans la direction du champ magnétique. les deux autres s'aimantent le long

[12] Notons que dans l'état fondamental (voir figure 3.2), les spins sur chaque sous-réseau pointent dans la même direction.

[13] Le champ magnétique est appliqué perpendiculairement au feuilletage de plans constituant le cristal. Ajouter une composante du champ magnétique dans le plan ne modifie pas qualitativement le diagramme de phase.

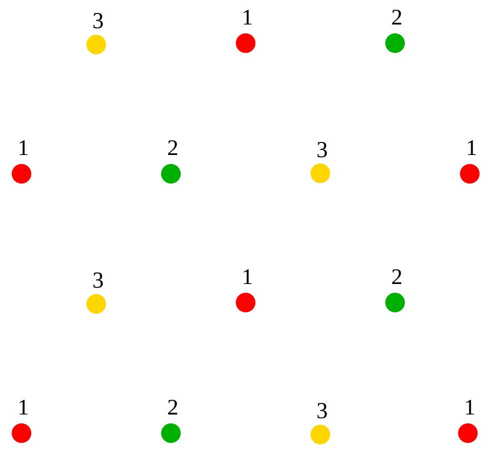


FIG. 3.11 – Division du réseau triangulaire en trois sous-réseaux.

d'axes formant un angle ϕ avec l'axe du champ magnétique, et tels que les trois aimantations soient coplanaires. Lorsque la température est augmentée à champ magnétique fixé, l'angle ϕ diminue, et s'annule continûment à la température $T_{N_2}(B)$. À des températures supérieures, les trois sous-réseaux s'aimantent dans la direction du champ magnétique. À la température $T_{N_2}(B)$, le système présente une première transition de phase du second ordre. La classe d'universalité de cette transition est déterminée en observant qu'à la température critique, les composantes orthogonales au champ magnétique des aimantations s'annulent. Le paramètre d'ordre décrivant la transition est par conséquent un vecteur à deux composantes (orthogonal au champ magnétique). La transition de phase appartient donc à la classe d'universalité du modèle XY[KCP90].

Lorsque la température est augmentée au-delà de $T_{N_2}(B)$, la différence entre les deux aimantations différentes diminue, et s'annule continûment à la température $T_{N_1}(B)$. Pour des températures plus élevées, les trois sous-réseaux présentent des aimantations identiques. Cette phase est appelée paramagnétique dans la littérature, bien qu'elle présente une aimantation globale non nulle. Cette transition de phase est également de type XY[KCP90] [14].

Revenons maintenant à la phase de basse température, à faible champ magnétique, et augmentons ce dernier. Pour une valeur critique du champ magnétique, le système transite vers une phase dans laquelle les aimantations présentent une structure en parapluie(voir figure 3.10). Cette transition est du premier ordre. Lorsque la température est augmentée depuis cette phase, les composantes orthogonales au champ magnétique diminuent et s'annulent continûment à la transition de phase. Cette transition est continue, et appartient à nouveau à la classe d'universalité du modèle chiral XY[KCP90].

[14] Cette transition pourrait naïvement être associée à une transition de type Ising. Toutefois, notons que l'aimantation globale ne présente pas de discontinuité à la transition de phase. Si l'on soustrait $\frac{1}{3}$ de l'aimantation totale à chacune des aimantations des trois sous-réseaux, on obtient alors deux quantités indépendantes qui s'annulent à la transition.

Il est remarquable que les trois lignes de transition de phase du second ordre, et la ligne de transition discontinue se rejoignent, en un point tétracritique. L'étude des symétries de l'action effective de Landau-Ginzburg révèle qu'à ce point, l'isotropie de l'orientation des spins est restaurée. Nous obtenons ainsi une réalisation physique indirecte des systèmes frustrés isotropes. En fixant le champ magnétique à la valeur B_c correspondant au point tétracritique, et en étudiant le comportement des observables physiques avec la température, on peut mesurer les exposants du système de Heisenberg chiral.

Systèmes dilués

Le troisième angle d'approche proposé pour atteindre le cas isotrope a été mis en œuvre beaucoup plus récemment, et consiste à étudier l'alliage $CsMn(Br_xI_{1-x})_3$ [BWvL+00], où x détermine la proportion d'atomes de brome dans le système. pour $x = 0$ le système présente une anisotropie de type Ising ($D < 0$), et pour $x = 1$, une anisotropie de type XY ($D > 0$). En faisant varier la concentration relative en atomes de brome et d'iode, l'anisotropie peut être ajustée à la valeur souhaitée. Ainsi, lorsque x est augmenté depuis 0, le diagramme de phase présenté à la figure 3.10 évolue continûment : les températures critiques T_{N1} et T_{N2} se rapprochent, et B_c diminue. Pour une valeur critique x_c de la densité de brome, le système est isotrope. On a alors $T_{N_1} = T_{N_2}$, et l'on observe une unique transition de phase, quel que soit le champ magnétique appliqué. Sur la figure 3.12 est reportée la chaleur spécifique divisée par la température, en fonction de la température, pour $x = 0.19$ proche de sa valeur critique. Les différentes courbes représentent les résultats obtenus pour différent champs magnétiques. Si ce dernier est suffisamment faible, on observe une unique anomalie, correspondant à la transition entre la phase ordonnée, isotrope, et la phase paramagnétique. Au delà d'un champ de 1 Tesla, une nouvelle anomalie apparaît, indiquée par une flèche sur la figure 3.12, qui indique que le système présente en fait une faible anisotropie de type XY ($D \gtrsim 0$). Le comportement de la chaleur spécifique en fonction de la température permet de déterminer α. L'étude de la chaleur spécifique en fonction de la température est menée à l'aide de la fonction d'ajustement :

$$C^{\pm} = \frac{A_{\pm}}{\alpha}|t|^{-\alpha} + B + E\,t, \tag{3.8}$$

où la température réduite $t = (T - T_c)/T_c$, et où $A_{\pm}$, b et E sont des constantes. La partie régulière permet d'obtenir un accord entre la fonction d'ajustement et les résultats expérimentaux sur un assez grand domaine de valeurs (environ deux ordres de grandeur en température réduite, voir figure 3.13). Toutefois, pour des températures suffisament proches de la température critique (c'est-à-dire pour des températures réduites suffisamment petites) la fonction d'ajustement et les résultats expérimentaux diffèrent significativement. Les auteurs de [BWvL+00] attribuent cette différence à la présence d'impuretés dans le système. Ils tiennent compte de ce désordre en considérant que la température critique T_c varie dans l'échantillon, en suivant une loi gaussienne. Ils ar-

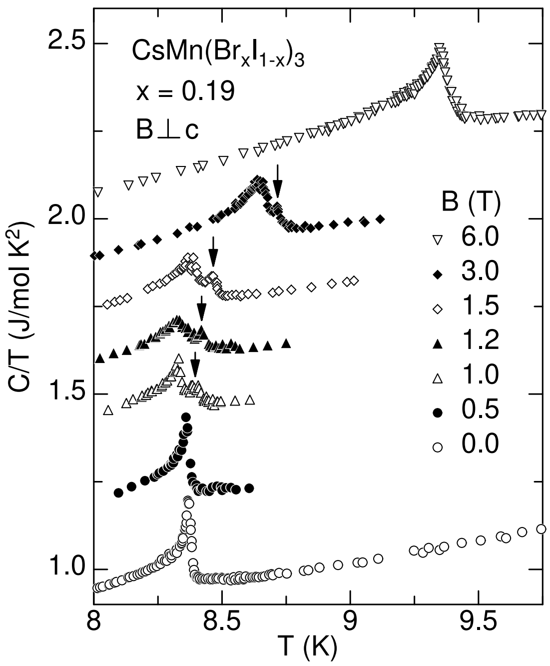


FIG. 3.12 – Chaleur spécifique divisée par la température, en fonction de la température pour CsMn(Br$_x$I$_{1-x}$)$_3$ pour $x = 0.19$ et pour différentes valeurs du champ magnétique (figure tirée de [BWvL+00]). Les flèches indiquent une seconde anomalie, qui indique que les système n'est pas entièrement isotrope, mais présente une faible anisotropie de type XY.

rivent alors à faire coïncider la fonction d'ajustement avec les résultats expérimentaux sur trois ordres de grandeur pour $T > T_c$ (voir figure 3.13) [15].

Ces trois angles d'approche ont été utilisés pour déterminer les propriétés critiques du système isotrope de spins frustrés. Les valeurs des exposants critiques déterminés sont reportés sur la table 3.2. Une série d'expériences menée sur CsMn(Br$_{0.19}$I$_{0.81}$)$_3$ conclut à des valeurs de γ et de ν très petites, et peu compatibles avec les autres déterminations de ces exposants critiques. Comme ces résultats n'ont pas été confirmés par d'autres mesures, nous omettons ces valeurs dans la suite de la discussion, et notons ces résultats entre crochets dans la table 3.2.

[15]Le fait que résultats expérimentaux et fonction d'ajustement diffèrent pour des températures proches de la température critique semble indiquer une bifurcation entre le comportement du système "pur" et le comportement du système en présence de désordre. L'importance du désordre pour des températures proches de la température critique est corroboré par le critère de Harris, qui indique que le désordre est pertinent lorsque l'exposant critique α est positif, ce qui est le cas ici.

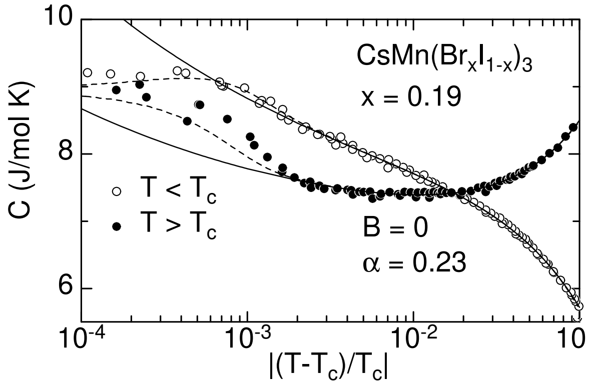


Fig. 3.13 – Chaleur spécifique en fonction de la température réduite (en échelle logarithmique) pour $CsNi(Br_xI_{1-x})_3$, pour une concentration $x = 0.19$ proche de la concentration critique (figure tirée de [BWvL$^+$00]). En traits pleins est représentée la fonction d'ajustement (3.8) pour les valeurs optimales des paramètres. La courbe en pointillés indique le résultat obtenu lorsque le rôle des impuretés est représenté par une dispersion gaussienne des valeurs de T_c dans l'échantillon.

3.2.2 Hélimagnétiques

Nous discutons maintenant les résultats obtenus pour la seconde classe de matériaux présentant un schéma de brisure de symétrie chiral : les hélimagnétiques. Notons tout de suite que, dans ces matériaux, l'anisotropie dans l'orientation des spins est forte, de sorte que l'étude de la transition Heisenberg chirale n'a pas pu être réalisée. De plus, les techniques expérimentales utilisées dans les antiferromagnétiques triangulaires empilés pour réduire l'anisotropie (ajout d'un champ magnétique et dilution) n'ont pas été mis en œuvre pour les hélimagnétiques[16].

Deux matériaux présentant un ordre hélicoïdal à basse température ont été étudiés. Il s'agit de cristaux de holmium (Ho) et de dysprosium (Dy). La détermination des exposants critiques de ces matériaux est plus difficile que pour les antiferromagnétiques triangulaires empilés. En effet, les interactions de type RKKY entre moments magnétiques sont à longue portée, de sorte que le domaine critique est beaucoup plus étroit (de l'ordre de 10^{-2} en température réduite pour Dy [BM79]). Ces matériaux présentent également des bifurcations vers d'autres comportements pour des températures proches de la température critique, ce qui complique la détermination des exposants critiques. Les résultats expérimentaux obtenus pour les hélimagnétiques sont présentés sur la table 3.3.

Un troisième système hélimagnétique a été étudié. Il s'agit d'un cristal de Ter-

[16] La possibilité d'obtenir un hélimagnétique isotrope est discutée dans [GP76].

cristal	ref.	α	β	γ	ν
$CsNiCl_3$	[WBW+95],[BWvLV93]	0.25(8)			
	[EFS94]	0.23(4)			
	[ESMK97]		0.28(3)		
$CsMnI_3$	[WBW+95],[BWvLV93]	0.28(6)			
$CsMn(Br_{0.19}I_{0.81})_3$	[BWvL+00]	0.23(7)			
	[OTK+99]		0.28(2)		
	[OTK+98]		0.29(1)	[0.74(4)]	[0.42(3)]
VCl_2	[KUH+87]		0.20(2)	1.05(3)	0.62(5)
VBr_2	[WDvLK94]	0.30(5)			
CuFUD	[KM85]		0.22(2)		
$Fe[S_2CN(C_2H_5)]_2Cl$	[DPC78][DP81][DL86]		0.24(1)	1.16(3)	

TAB. 3.2 – Exposants critiques des antiferromagnétiques triangulaires isotropes ($n = 3$) déterminés expérimentalement. Les résultats très différents des valeurs trouvées dans d'autres matériaux, et qui n'ont pas été confirmés par des mesures indépendantes sont notés entre crochets.

bium (Tb). Les études expérimentales sont toutefois délicates pour ce matériau, et l'on dispose de peu de déterminations des exposants critiques.

3.3 Situation numérique

Nous présentons maintenant les résultats obtenus en simulant des systèmes tridimensionnels de spins frustrés par des algorithmes de type Monte Carlo. Plusieurs réalisations microscopiques, présentant le même schéma de brisure de symétrie, et qui devraient par conséquent avoir le même comportement critique, ont été simulées.

- **STA** (Stacked Triangular Antiferromagnets). Ce modèle est le plus proche de la situation expérimentale, et consiste à disposer des spins à n composantes sur des réseaux triangulaires empilés, soumis à une interaction antiferromagnétique entre plus proches voisins. Le Hamiltonien décrivant les interactions dans le système est donné par l'équation (3.7), où l'on choisit $D = 0$ et $\vec{B} = 0$.
- **STAR** (Stacked Triangular Antiferromagnets with Rigid constraint). On définit ce modèle par rapport au précédent. Pour ce faire, on regroupe les sites du réseau triangulaire par plaquettes (voir figure 3.14) et l'on impose sur chaque plaquette la contrainte que les trois spins soient disposés à 120° les uns par rapport aux autres. Cette contrainte correspond à remplacer le mode d'aimantation total (somme des trois spins sur une plaquette), qui n'est pas critique, par sa valeur moyenne : $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 = \langle \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 \rangle = 0$. L'étude de STAR permet de tester le rôle des fluctuations de l'aimantation totale.

cristal	ref.	α	β	γ	ν
Dy	[LCW74]		0.335(10)		
	[dVDPDD83]		$0.39^{+0.04}_{-0.02}$		
	[dVDPVB95]		0.38(2)		
	[BdVdP88]		0.39(1)		
	[GHC88]			1.05(7)	0.57(5)
	[JCS85a]	0.24(2)			
Ho	[THH+94]		0.30(10)	1.24(15)	0.54(4)
	[THH+94]		0.37(10)		
	[BdVdP88]		0.39(3)		
	[dVDPVB95]		0.39(2)		
	[SEB+87]		0.39(4)		
	[HHT+94]		0.39(4)		
	[HHT+94]		0.41(4)		
	[GHC88]			1.14(10)	0.57(4)
	[JCS85b]	0.27(2)			
	[WBG91][WBG92]	0.22(2)			
Tb	[JSCG84]	0.20(3)			
	[THS+95]		0.23(4)		
	[TSJ+92]		0.21(2)		
	[HNI91]				0.53

TAB. 3.3 – Exposants critiques des hélimagnétiques, d'anisotropie XY ($n = 2$).

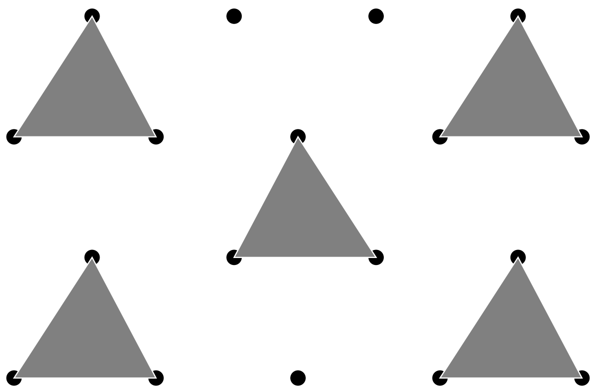


FIG. 3.14 – Regroupement des sites du réseau triangulaire en plaquettes.

– **modèle de Stiefel $\mathbf{V_{n,2}}$.** Le modèle de Stiefel représente un système de dièdres (ensemble de deux vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à n composantes, orthogonaux et normés à l'unité) en interaction ferromagnétique. Le Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = J \sum_{<i,j>} \Big(\vec{e}_1(i).\vec{e}_1(j) + \vec{e}_2(i).\vec{e}_2(j)\Big), \tag{3.9}$$

avec une constante de couplage J négative (c'est-à-dire ferromagnétique) pour favoriser l'alignement des vecteurs. Comme nous l'avons vu dans la détermination du schéma de brisure de symétrie des hélimagnétiques, le paramètre d'ordre associé à une transition de phase chirale est composé de deux vecteurs. Dans la phase de basse température, les deux vecteurs sont orthogonaux et ont la même norme. Par conséquent, le modèle de Stiefel $V_{n,2}$ correspond à une version discrétisée du modèle de Landau-Ginzburg[17].

– **CC.** Ce modèle permet d'étudier une situation assez similaire aux hélimagnétiques, présentant en particulier un état fondamental hélicoïdal. On définit le modèle sur un réseau cubique centré (CC) avec un spin sur chaque nœud.

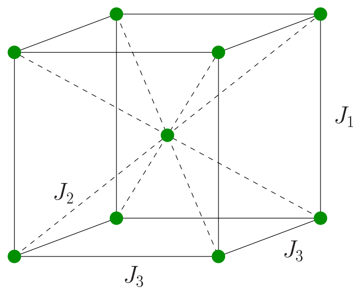


Fig. 3.15 – Maille du réseau cubique centré, et interaction entre les spins.

L'interaction entre spins est déterminée par les trois constantes d'échange J_1, J_2 et J_3 (voir figure 3.15). Pour des constantes d'échange J_1 et J_2 positives, correspondant à une interaction antiferromagnétique, et une constante J_3 négative, l'état fondamental présente une structure hélicoïdale : tous les spins d'un plan horizontal pointent dans la même direction, et l'orientation des spins diffèrent de plan à plan par un angle déterminé par le rapport J_1/J_2. La difficulté majeure rencontrée dans la simulation des hélimagnétiques provient du fait qu'il faut choisir des conditions périodiques au bord, ce qui est difficilement réalisé pour une structure hélicoïdale dont la période est grande. Une façon de contourner ce problème consiste à fixer le rapport J_1/J_2 à $1/2$, de sorte que les spins dans des plans voisins forment un angle de 120°. La période de la structure magnétique est alors de trois plans. Loison [Loi99] fixe également $J_3 = 0$, et développe l'argument que les valeurs relatives des constantes d'échange ne doivent pas influencer les propriétés critiques du système (voir également [Kaw90]).

Ces différentes réalisations microscopiques de la transition de phase des systèmes frustrés ont été étudiées pour le modèle d'anisotropie XY (n=2) et pour le modèle isotrope (n=3). Une simulation du modèle STA pour n=6 a également été effectuée, pour une raison qui deviendra apparente dans la suite. Les résultats obtenus dans ces diverses études sont respectivement présentées dans les tables 3.4, 3.5 et 3.6. Dans la plupart des simulations numériques, tous les exposants critiques ne sont pas

[17] De la même façon, le modèle d'Ising est la version discrétisée de la théorie scalaire en "φ^4".

système	ref.	α	β	γ	ν	η
STA	[Kaw86][Kaw92]	0.34(6)	0.253(10)	1.13(5)	0.54(2)	-0.09(8)
	[PM94]	0.46(10)	0.24(2)	1.03(4)	0.50(1)	-0.06(4)
	[BLD96]	0.43(10)			0.48(2)	
STAR	[LS98]	1^{er} ordre				
$V_{2,2}$	[LS98]	1^{er} ordre				

Tab. 3.4 – Exposants critiques obtenus par simulation Monte Carlo, pour le modèle chiral XY ($n = 2$).

système	ref.	α	β	γ	ν	η
STA	[Kaw85][Kaw92]	0.240(80)	0.300(20)	1.170(70)	0.590(20)	0.020(180)
	[MPC94]	0.242(24)	0.285(11)	1.185(3)	0.586(8)	-0.033(19)
	[BBLJ94]	0.245(27)	0.289(15)	1.176(26)	0.585(9)	-0.011(14)
	[LD94]	0.230(30)	0.280(15)		0.590(10)	0.000(40)
STAR	[LS00]	0.488(30)	0.221(9)	1.074(29)	0.504(10)	-0.131(13)
$V_{3,2}$	[LS00]	0.479(24)	0.193(4)	1.136(23)	0.507(8)	-0.240(10)
	[KZ93]	0.460(30)		1.100(100)	0.515(10)	-0.100(50)
CC	[Loi99]	0.287(30)	0.247(10)	1.217(32)	0.571(10)	-0.131(18)

Tab. 3.5 – Exposants critiques obtenus par simulation Monte Carlo, pour le modèle chiral Heisenberg ($n = 3$).

système	ref.	α	β	γ	ν	η
STA	[LSD$^+$00]	-0.100(33)	0.359(14)	1.383(36)	0.700(11)	0.025(20)

Tab. 3.6 – Exposants critiques obtenus par simulation Monte Carlo, pour le modèle antiferromagnétique triangulaire empilé, pour des spins à six composantes ($n = 6$).

calculés simultanément. Toutefois, une fois que deux exposants sont déterminés, les autres découlent des lois d'échelle (voir les équations 2.54).

3.4 Discussion des résultats expérimentaux et numériques

Dans cette section, nous montrons qu'à partir des résultats expérimentaux et numériques rapportés précédemment, il est possible de conclure que le modèle chiral XY ne présente non pas une transition du second ordre, mais plutôt une transition faiblement du premier ordre. Dans le cas du modèle de Heisenberg chiral, nous ne pouvons pas tirer de conclusion définitive sur l'ordre de la transition. Toutefois, un certain nombre de signes indiquent que la transition est aussi faiblement du premier ordre.

La discussion qui suit se fonde sur trois hypothèses concernant les données expérimentales :

- les barres d'erreur données dans la littérature sont fiables ;
- les erreurs systématiques sont faibles, et les barres d'erreur ont une interprétation statistique ;
- les corrections aux lois d'échelle sont faibles ;

La première hypothèse est raisonnable, et nous ne sommes pas en position de la remettre en cause. D'autre part, le type d'erreur (*i.e.* systématique ou statistique) n'est pas discuté dans les articles expérimentaux. En l'absence de cette information nous adoptons la deuxième hypothèse. Finalement, l'importance des corrections aux lois d'échelle est difficile à évaluer, du fait que les domaines de température accessibles sont relativement petits. Toutefois, il n'existe pas à notre connaissance d'observation indiquant que cet effet est important. De plus, l'influence de cet effet sur la détermination des exposants critiques n'est probablement pas suffisant pour changer les conclusions que nous tirons dans la suite[18].

Notons tout de suite que les résultats obtenus dans la suite sont très prononcées. Aussi, même si les hypothèses précédentes ne sont pas entièrement satisfaites, les conclusions restent probablement valables.

3.4.1 Spins XY frustrés

Plusieurs conclusions[TDM01] peuvent être déduites des données expérimentales et numériques rapportées précédemment. Le fait le plus marquant lorsque les différents résultats sont comparés vient de la grande plage de variation des exposants critiques. Pour un même matériau ($CsMnBr_3$), l'exposant β varie entre 0.21(1) et 0.25(1) (voir table 3.1), ce qui représente une différence de presque trois écarts standards.

Les variations de système à système sont encore plus marquées. Ainsi, on observe que les jeux d'exposants critiques se divisent en deux classes. La première regroupe les antiferromagnétiques frustrés, ainsi que Tb, et pour les simulations numériques, STA. La seconde classe est constituée de Ho et Dy. Une estimation naïve de la valeur moyenne de l'exposant critique β donne 0.23 pour la première, et 0.39 pour la seconde. Ces deux valeurs ne sont pas du tout compatibles. Dans l'ensemble des systèmes considérés ici (antiferromagnétiques frustrés, Ho, Dy, STA), qui présentent le même schéma de brisure de symétrie, et appartiennent donc naïvement à la même classe d'universalité, celle-ci semble être violée.

[18] L'étude de la classe d'universalité du modèle d'Ising en trois dimensions, qui est beaucoup plus documentée [BLH95] confirme ce fait. En effet, la détermination des exposants critiques sans tenir compte des corrections aux lois d'échelle diffère des valeurs couramment admises d'au plus 10%. Si cet effet est important pour des mesures précises des exposants critiques, il n'en est pas de même des mesures obtenues dans les systèmes étudiés ici.

Le deuxième point que nous voulons relever ici est le fait que la dimension anormale η pour les systèmes de la première classe, obtenue par les lois d'échelles est, dans la majorité des cas, négative. Considérons par exemple $CsMnBr_3$, matériau pour lequel nous avons le plus de données. Si nous attribuons les variations des exposants critiques à des fluctuations statistiques, nous pouvons tirer une valeur moyenne, et un écart type à partir des données de la table 3.1. Nous obtenons ainsi $\beta = 0.228(6)$ et $\nu = 0.555(21)$. En utilisant la loi d'échelle :

$$\eta = \frac{2\beta}{\nu} - 1, \tag{3.10}$$

nous tirons $\eta = -0.177(38)$. La probabilité pour que η soit positif est donc très faible (de l'ordre de 10^{-6}). De la même façon, l'étude de la dimension anormale de STA (voir table 3.4) conduit à $\eta = -0.075(37)$, qui est marginalement compatible (probabilité de 2%) avec une valeur positive de η. Or, on peut montrer que la dimension anormale d'une théorie en φ^4, à une transition de phase du second ordre doit être positive. En effet, la décomposition spectrale de Källen-Lhemann mène à la conclusion que la renormalisation du champ doit être comprise entre zéro et un ($0<Z<1$). D'autre part, la renormalisation du champ se comporte, en fonction de l'échelle de prescription μ, comme :

$$Z \propto \mu^{-\eta}. \tag{3.11}$$

Par conséquent, la dimension anormale doit être positive (voir par exemple [ZJ89b] pour une discussion plus détaillée). On en conclut que les résultats expérimentaux sur $CsMnBr_3$, et numériques sur STA sont difficilement compatibles avec une transition du second ordre.

La conclusion n'est pas la même pour les systèmes du second groupe (Ho et Dy). En effet, les exposants critiques du second groupe conduisent à des valeurs positives de la dimension anormale. Toutefois, ces matériaux présentent une caractéristique qui n'est pas observée dans la première classe : les lois d'échelle sont violées. Ainsi, les exposants critiques d'une transition continue doivent vérifier :

$$\gamma + 2\beta - \nu d = 0. \tag{3.12}$$

Or, si l'on attribue à nouveau la dispersion des résultats à des erreurs statistiques, on peut combiner les résultats obtenus pour Ho (pour lequel on a le plus de données), et en déduire $\beta = 0.390(13)$, $\gamma = 1.17(8)$ et $\nu = 0.555(28)$, qui mènent à $\gamma + 2\beta - \nu d = 0.28(11)$. La loi d'échelle est donc violée de 2.5 écarts standards. Cette violation n'est pas assez forte pour assurer que les lois d'échelle ne sont pas vérifiées, mais donne un fort signal dans ce sens, ce qui semble indiquer que les systèmes de la seconde classe ne présentent pas non plus de transition du second ordre.

Finalement, notons que les simulations numériques sur STAR et $V_{2,2}$, ainsi que les expériences les plus précises menées sur $CsCuCl_3$ mènent à la conclusion que la transition de phase est très faiblement du premier ordre.

Les points précédents tendent à prouver que les systèmes de spins XY frustrés appartenant à la première classe (*i.e.* les antiferromagnétiques empilés et Tb) ne présentent pas une transition de phase du second ordre, mais plutôt du premier ordre.

Toutefois, la discontinuité du paramètre d'ordre doit être très faible car elle n'est en général pas observée expérimentalement. Une telle transition est dite faiblement du premier ordre. La conclusion pour les systèmes de la seconde classe (Ho et Dy) est moins tranchée. Toutefois, la violation des relations d'échelle est une bonne indication que la transition de phase n'est pas du second ordre.

3.4.2 Spins de Heisenberg frustrés

Dans le cas des systèmes frustrés sans anisotropie, les conclusions sont moins tranchées. Nous étudions dans ce cas les résultats expérimentaux et numériques séparément, en commençant par les résultats expérimentaux.

On dispose malheureusement de peu de déterminations d'exposants critiques, notamment pour γ et ν, de sorte que l'étude des lois d'échelle n'est pas conclusive. Remarquons tout de même que l'exposant β permet de diviser les systèmes en deux classes : d'une part les systèmes quasi-isotropes, pour lesquels $\beta \simeq 0.22$, et d'autre part les systèmes sous champ magnétique, ou dilués, pour lesquels $\beta \simeq 0.28$. Les exposants critiques pour les systèmes quasi isotropes indiquent que la transition est, dans ce cas faiblement du premier ordre. En effet, en utilisant les valeurs de β et de ν reportées dans la table 3.2, ainsi que les relations entre exposants critiques, nous déduisons $\eta = -0.118(25)$, qui est significativement négatif. En utilisant l'argument présenté dans la section précédente, nous déduisons que ceci est très peu compatible avec une transition continue. D'autre part, les lois d'échelle ne sont pas vérifiées. Ainsi, la relation :

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \tag{3.13}$$

n'est pas vérifiée. On obtient $\alpha + 2\beta + \gamma = 1.865(56)$, qui se trouve à 2.5 écarts standards du résultat théorique, ce qui indique une violation assez significative de cette loi d'échelle. L'étude des exposants critiques des systèmes sous champ magnétique, et dilués ne mènent pas à la même conclusion. Ainsi, la dimension anormale n'est pas significativement négative, et nous ne pouvons pas tester les lois d'échelle.

Passons maintenant à la discussion des résultats numériques. On observe deux grands groupes d'exposants critiques (voir table 3.5). Le premier est constitué de STA, présente un β plus grand que 0.28, et le second regroupe STAR et $V_{3,2}$, systèmes pour lesquels β est plus petit que 0.25. Les résultats de CC semblent être à mi-chemin entre ces deux groupes. Les deux jeux d'exposants ne sont pas compatibles, et à nouveau le phénomène d'universalité n'est pas rencontré. Observons tout de suite que la dimension anormale est très nettement négative pour les systèmes du second groupe (STAR et $V_{3,2}$), ce qui indique à nouveau que la transition n'est probablement pas continue dans ce cas. Les résultats obtenus pour STA sont au contraire compatibles avec une valeur positive de la dimension anormale, et les lois d'échelle sont bien vérifiées.

Nous observons finalement que les exposants critiques de STA et des systèmes sous champ magnétique et dilués sont très proches. L'ensemble de ces trois systèmes sont donc susceptibles de présenter une transition continue, présentant de l'universalité. Pour autant, la discussion précédente ne prouve pas que la transition est effectivement continue. Nous verrons d'ailleurs que le traitement non perturbatif du problème conduit plutôt à la conclusion inverse.

3.5 Situation théorique

Passons maintenant à la discussion des résultats théoriques obtenus à partir des théories de perturbations. Nous présentons les résultats obtenus par des développements en constantes de couplage, à basse température et à n grand. Nous repoussons la discussion des résultats obtenus grâce aux méthodes de resommation des séries asymptotiques à la fin du chapitre.

3.5.1 Modèle de Landau-Ginzburg

Les propriétés critiques des antiferromagnétiques triangulaires empilés et des hélimagnétiques découlent de l'étude de la fonction de partition du système au voisinage de la température critique.

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\vec{\varphi}_1 \mathcal{D}\vec{\varphi}_2 \exp\left(-\mathcal{S}\left[\vec{S}_1, \vec{S}_2\right] + \int \vec{J}_i \vec{\varphi}_i\right). \tag{3.14}$$

Les champs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ ont été introduits lors de la transformation de Hubbard-Stratonovitch (voir l'annexe B), pour remplacer la contrainte stricte d'orthogonalité des vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ par une contrainte régulière, représentée par un potentiel. L'action $\mathcal{S}$ détermine l'interaction entre degrés de liberté microscopiques, et découle également de la transformation de Hubbard-Stratonovitch. Toutefois, la transformation de Hubbard-Stratonovitch ne peut être effectuée que si l'interaction microscopique est bien connue, et assez simple. Dans la pratique, on est rarement dans cette situation, et l'on adopte alors un point de vue plus phénoménologique : les champs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ sont introduits, mais la forme précise de $\mathcal{S}$ n'est pas déterminée. Nous utilisons alors une forme phénoménologique pour cette dernière. Ceci est en général justifié à un point de transition continue en invoquant le phénomène d'universalité qui indique que les détails microscopiques du système n'ont pas d'influence sur les propriétés universelles. L'action $\mathcal{S}$ se réécrit comme l'intégrale sur tout l'espace d'un lagrangien : $\mathcal{S} = \int d^dx\ \mathcal{L}$. Dans ce dernier, interviennent toutes les combinaisons des champs autorisées par symétrie. Dans une approximation simple, où nous ne considérons qu'un terme cinétique, et les termes de potentiel faisant intervenir au plus quatre puissances du champ, le lagrangien prend la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}((\partial\vec{\varphi}_1)^2 + (\partial\vec{\varphi}_2)^2) + \frac{1}{2}r(\vec{\varphi}_1^2 + \vec{\varphi}_2^2) &+ \frac{\lambda}{16}(\vec{\varphi}_1^2 + \vec{\varphi}_2^2)^2 \\ &+ \frac{\mu}{16}\left((\vec{\varphi}_1^2 - \vec{\varphi}_2^2)^2 + 4(\vec{\varphi}_1.\vec{\varphi}_2)^2\right).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Afin de mettre en valeur les symétries du problème, réécrivons le lagrangien précédent à l'aide d'une matrice φ à n lignes et deux colonnes, dans laquelle sont rangées les n coordonnées des deux champs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_{n,1} & \varphi_{n,2} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Le lagrangien prend alors la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \partial^t\varphi\partial\varphi + \frac{1}{2} r \operatorname{Tr} {}^t\varphi\varphi + \frac{\lambda}{16}(\operatorname{Tr} {}^t\varphi\varphi)^2 + \frac{\mu}{8} \operatorname{Tr} \left({}^t\varphi.\varphi - \mathbb{1}\frac{\operatorname{Tr} {}^t\varphi\varphi}{2}\right)^2. \tag{3.17}$$

En utilisant la cyclicité de la trace, on vérifie que le lagrangien est invariant sous :

$$\varphi \to U.\varphi.V, \tag{3.18}$$

où U est une matrice de $O(n)$ et V une matrice de $O(2)$. On retrouve ainsi le groupe de symétrie de la phase de haute température déterminé précédemment (voir équation (3.4)).

L'interaction à quatre corps est déterminée par deux variables λ et μ, au lieu d'une seule pour les théories vectorielles. La première correspond à une interaction $O(2n)$-invariante[19]. La seconde représente une contrainte d'orthogonalité et de normalisation des champs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ [20]. Notons à ce propos que seules les propriétés pour $\mu > 0$ nous intéressent ici. En effet, dans le cas cas où $\mu < 0$, la minimisation du lagrangien (3.17) conduit à une configuration où les deux vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ sont colinéaires. La théorie ne présente alors plus le schéma de brisure de symétrie qui nous intéresse.

3.5.2 Étude perturbative de Landau-Ginzburg-Wilson

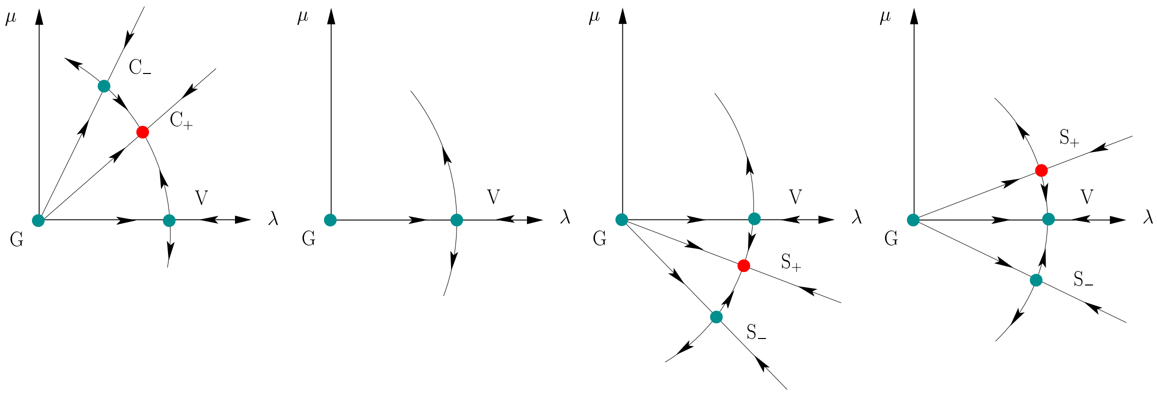
L'étude perturbative de la théorie des champs décrite par le lagrangien (3.17) a été menée au milieu des années 70 [BKM76], [GP76], [JLM76]. La différence majeure avec le cas plus simple des théories vectorielles vient du fait que l'interaction à quatre corps dépend de deux paramètres (au lieu d'un dans la théorie vectorielle). L'espace des paramètres est donc plus grand, ce qui permet, comme nous le verrons dans la suite, d'obtenir un diagramme de flot beaucoup plus riche. Les fonctions β à une boucle [BKM76], [GP76], [JLM76] sont données par :

$$\begin{cases} \beta_\lambda = \dfrac{d\lambda_r}{dt} = (-4+d)\lambda_r + \dfrac{1}{16\pi^2}(\lambda_r^2(4+n) + 4\lambda_r\mu_r + 4\mu_r^2) \\ \beta_\mu = \dfrac{d\mu_r}{dt} = (-4+d)\mu_r + \dfrac{1}{16\pi^2}(6\lambda_r\mu_r + n\mu_r^2) \end{cases}. \tag{3.19}$$

[19]Sur la ligne $\mu = 0$, on retrouve d'ailleurs la théorie vectorielle $O(2n)/O(2n-1)$.

[20]Le deuxième terme de l'interaction à quatre corps est minimisé lorsque ${}^t\varphi.\varphi \propto \mathbb{1}$, soit $\vec{\varphi}_i.\vec{\varphi}_j \propto \delta_{ij}$, c'est-à-dire encore lorsque les vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ sont orthogonaux et ont même norme.

Il existe génériquement quatre solutions de point fixe, annulant simultanément les deux fonctions β. Toutefois, suivant la valeur de n, on observe des différences qualitatives dans le diagramme de flot :



(a) $n > n_{\rm I}$ (b) $n_{\rm I} > n > n_{\rm II}$ (c) $n_{\rm II} > n > n_{\rm III}$ (d) $n_{\rm III} > n$

FIG. 3.16 – Diagramme de flot dans le plan (λ, μ). Les points G, V, C_+, C_-, S_+, S_- correspondent aux points fixes gaussien, vectoriel $O(2n)/O(2n-1)$, chiral, antichiral, sinusoïdal et antisinusoidal.

• $\mathbf{n > n_{\rm I} = 21.8 + o(\varepsilon)}$: pour des valeurs de n suffisamment grandes, on trouve quatre points fixes (voir figure 3.16(a)). Le point fixe à $\lambda = \mu = 0$ est le point fixe gaussien G, et le point fixe V à $\mu = 0$, correspond à la théorie vectorielle $O(2n)/O(2n-1)$. Ces deux points fixes sont instables, et ont au moins deux directions répulsives : la direction correspondant à la température, et une autre dans l'espace des constantes de couplage (λ, μ). On trouve également deux points fixes non triviaux C_+ et C_-, le premier stable, et l'autre instable. Ces points fixes sont qualifiés respectivement de chiral et d'antichiral. Le point fixe chiral C_+ gouverne la transition de phase du second ordre.

• $\mathbf{n_{\rm I} = 21.8 + o(\varepsilon) > n > n_{\rm II} = 2.2 + o(\varepsilon)}$: lorsque le nombre de composantes de spin diminue, les deux points fixes C_+ et C_- se rapprochent, coïncident lorsque $n = n_{\rm I} \simeq 21.8 + o(\varepsilon)$, et disparaissent ensuite. Ce phénomène est la conséquence du fait que les coordonnées $\lambda^\star$ et $\mu^\star$ des points fixes sont les deux racines d'un polynôme du second ordre. Lorsque n devient plus petit que $n_{\rm I}$, le discriminant de ce polynôme change de signe, et les coordonnées des deux points fixes deviennent complexes conjuguées. Il y a donc toujours quatre solutions annulant les fonctions β, mais deux sont complexes, et ne correspondent pas à une situation physique. La détermination numérique $n_{\rm I} \simeq 21.8$ découle de l'étude des fonctions β à une boucle (équation (3.19)). Lorsque cette étude est poussée aux ordres supérieurs, on trouve des corrections à cette valeur, en puissances de $\varepsilon = 4 - d$. La valeur critique $n_{\rm I}$ du nombre de composantes de spin dépend alors de la dimension. Ainsi un calcul à trois boucles donne [ASV95] :

$$n_{\text{I}}(\varepsilon) \simeq 21.80 - 23.43\varepsilon + 7.09\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \tag{3.20}$$

Le flot des constantes de couplage est représenté sur la figure 3.16(b). Ce flot conduit le système dans une région d'instabilité, où le potentiel n'est plus borné. Pour stabiliser le potentiel, il est alors nécessaire d'introduire des constantes de couplage en "φ^6", et on s'attend à ce que le système présente une transition du premier ordre.

• $\mathbf{n}_{\text{II}} = \mathbf{2.2} + \mathbf{o}(\varepsilon) > \mathbf{n} > \mathbf{n}_{\text{III}} = \mathbf{2} + \mathbf{o}(\varepsilon)$: si n est encore diminué, et devient plus petit que n_{II} [JLM76] :

$$n_{\text{II}}(\varepsilon) \simeq 2.20 - 0.57\varepsilon, \tag{3.21}$$

les deux points fixes complexes, émanant de C_+ et C_-, redeviennent réels, dans le cadran ($\lambda > 0$, $\mu < 0$) (voir figure 3.16(c)). Ces points fixes sont appelés sinusoïdal (point fixe stable) et antisinusoïdal (point fixe instable), et sont notés respectivement S_+ et S_-. Dans la région $\mu < 0$, le lagrangien (3.15) est minimisé pour une configuration des champs où $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ sont colinéaires et de même norme. Le schéma de brisure de symétrie dans cette région de paramètre n'est donc pas celui que l'on veut étudier, de sorte que le point fixe S_+ n'est pas pertinent dans notre étude.

• $\mathbf{n} < \mathbf{n}_{\text{III}} = \mathbf{2} + \mathbf{o}(\varepsilon)$: finalement, si n devient plus petit que n_{III} :

$$n_{\text{III}}(\varepsilon) = 2 - \varepsilon, \tag{3.22}$$

le point fixe S_+ passe dans le cadran $\mu > 0$, en échangeant sa stabilité avec le point fixe vectoriel $O(2n)/O(2n-1)$ (voir figure 3.16(d)). Le seul point fixe du diagramme de flot est le point fixe vectoriel, qui ne présente pas le bon schéma de symétrie.

En résumé, les équations d'évolution des constantes de couplage admettent un point fixe stable, correspondant au bon schéma de brisure de symétrie uniquement lorsque $n > n_{\text{I}}$. Les exposants critiques à l'ordre dominant sont obtenus en étudiant les propriétés de la théorie au voisinage du point fixe stable (lorsque celui-ci existe), et donne :

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{1}{2} + \dfrac{n(n^2+n+48) + (n+4)(n-3)\sqrt{n^2-24n+48}}{8(n^3+4n^2-24n+144)}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\[2ex] \eta = \dfrac{C_n + (n+4)(n-3)(n^2-24n+48)^{\frac{3}{2}}}{8(n^3+4n^2-24n+144)^2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{cases}, \tag{3.23}$$

où

$$C_n = 5n^5 - 3n^4 - 16n^3 - 656n^2 + 3072n - 1152. \tag{3.24}$$

Une extrapolation naïve des résultats précédents montre que la ligne $n_{\text{I}}(\varepsilon)$ passe près de la région physique $d = 3$, $n = 2, 3$, de sorte qu'il est difficile de conclure *a priori* sur l'ordre de la transition de phase des systèmes étudiés. De plus, les termes successifs ne décroissent pas très vite. La série pour $\varepsilon = 1$ ne converge donc pas très vite, de sorte qu'il est difficile d'obtenir une détermination précise de $n_{\text{I}}(d = 3)$ à partir des séries perturbatives.

3.5.3 Modèle σ non linéaire

Outre le développement en puissances de la constante de couplage, mené au voisinage de la dimension quatre que nous avons discuté précédemment, la théorie a été étudiée dans le cadre du modèle σ non linéaire [21]. Cette approche a déjà été discutée dans le chapitre précédent, lors de l'étude du modèle vectoriel $O(n)/O(n-1)$. Les propriétés critiques du système sont obtenues dans un développement à basse température. Les modes massifs (mode radial dans le cas de la théorie vectorielle) ont alors une contribution négligeable à la fonction de partition, et la physique critique est gouvernée par les seuls modes de Goldstone.

Le développement à basse température induit une simplification supplémentaire. Considérons un système en dimension $d = 2 + \varepsilon$. Il existe une phase de basse température, dans laquelle ce système présente une aimantation spontanée. Alors seules les petites fluctuations du paramètre d'ordre au voisinage de l'aimantation (excitations d'ondes de spin) ont une contribution importante à la fonction de partition. Les autre configurations donnent des contributions sous-dominantes à la fonction de partition (typiquement en $e^{-\frac{1}{T}}$). Ceci a deux conséquences importantes :

- premièrement, la physique de basse température n'est sensible qu'aux propriétés locales de l'espace du paramètre d'ordre G/H, qui sont codées dans les algèbres de Lie des groupes G et H [22]. Ceci permet d'exprimer la théorie en termes d'objets géométriques (voir plus loin), ce qui simplifie beaucoup les calculs [Fri85] ;
- deuxièmement, si les propriétés *locales* de la variété G/H du paramètre d'ordre déterminent la physique de basse température, il n'en est pas de même de ses propriétés *globales*, topologiques. En effet, les configurations de champ testant la structure globale du paramètre d'ordre donnent une contribution en $e^{-\frac{1}{T}}$ à la fonction de partition, qui ont une contribution nulle à tous les ordres de la théorie de perturbation. Par conséquent, deux systèmes dont les variétés des paramètres d'ordre sont localement isomorphes, mais diffèrent globalement, ont la même physique de basse température, et par conséquent la même physique critique au voisinage de la dimension deux. La différence entre ces deux systèmes est codée dans des termes non analytiques en température, qui ne sont pas accessibles dans le cadre du modèle σ non linéaire perturbatif.

Écrivons maintenant la fonction de partition de la théorie des champs déterminée par le schéma de brisure de symétrie (3.4), et exprimée à l'aide du paramètre d'ordre $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\vec{e}_1 \mathcal{D}\vec{e}_2 \, \delta\left(\vec{e}_i.\vec{e}_j - \delta_{ij}\right) e^{-\mathcal{S}}. \tag{3.25}$$

[21] Seuls les modèles pour lesquels $n > 2$ peuvent être étudiés par cette méthode. Pour $n = 2$, les modes de Goldstones ne sont soumis à aucune interaction, et l'on trouve dans une approche perturbative à basse température que la théorie est libre, avec une longueur de corrélation infinie à toute température.

[22] Plus précisément, la physique de basse température dépend des générateurs brisés de G, *i.e.* $\mathrm{Lie}(G) - \mathrm{Lie}(H)$. Ces générateurs brisés sont associés aux modes de Goldstone de la théorie.

La fonction δ impose la contrainte d'orthonormalité des deux champs vectoriels, et gèle donc les modes massifs[23]. L'action $\mathcal{S}$ détermine la propagation des modes de Goldstone, et contient tous les termes à deux dérivées autorisés par symétrie. Dans le cas traité ici, l'action est constituée de deux termes, et dépend donc de deux constantes de couplage[ADDJ93] :

$$\mathcal{S} = \int d^d x \left\{ \frac{\eta_1}{2}(\partial\vec{e}_1^{\,2} + \partial\vec{e}_2^{\,2}) + \left(\frac{\eta_2}{8} - \frac{\eta_1}{4}\right)(\vec{e}_1.\partial\vec{e}_2 - \vec{e}_2.\partial\vec{e}_1)^2 \right\}. \tag{3.26}$$

Le premier terme de l'action est invariant sous les opérations de $O(2n)$, et le deuxième, appelé terme courant, réduit la symétrie de l'action à $O(n) \times O(2)$.

Il existe une reformulation du modèle σ non linéaire, se basant uniquement sur les propriétés géométriques du paramètre d'ordre. Cette reformulation nécessite d'intégrer, dans la fonction de partition (3.25), les modes massifs. Les contraintes imposées à travers les fonctions δ permettent d'effectuer cette intégration simplement. La fonction de partition s'exprime alors sous la forme[24] :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\pi \, \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^d x \; g_{ij}(\pi) \; \partial_\mu \pi_i \partial_\mu \pi_j\right), \tag{3.27}$$

où les π_i représentent les modes de Goldstone du système, et $g_{ij}(\pi)$ détermine leurs interactions. Les π_i peuvent être vus comme les coordonnées d'un point de l'espace du paramètre d'ordre $G/H = \frac{O(n)\times O(2)}{O(n-2)\times O(2)}$. Le tenseur $g_{ij}(\pi)$ permet en outre de munir cet espace d'une métrique. La théorie étant décrite uniquement en termes d'objets géométriques, il est naturel de penser que les équations d'évolution des constantes de couplage s'exprime également à l'aide d'objets géométriques. Ceci a été prouvé dans le cas général par Friedan [Fri85]. En dimension $d = 2 + \varepsilon$, les équations d'évolution des constantes de couplage à deux boucles s'expriment alors en fonction des tenseurs de Riemann (R_{ijkl}) et de Ricci (R_{ij}) de la variété G/H, déduits de la métrique g_{ij} :

$$\beta_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial l} = -\varepsilon g_{ij} + R_{ij} + \frac{1}{2} T R_i^{\,klm} R_{jklm} + O(T^2). \tag{3.28}$$

Dans le cas particulier des systèmes frustrés considérés ici, les fonctions β ont été obtenues par Azaria *et al* [ADDJ93] :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \varepsilon\eta_1 - \left(n - 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)\right) - \frac{1}{\eta_1}\left(\frac{3n-4}{8}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 + \frac{6-3n}{2}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right) + (3n-8)\right) \\ \beta_2 = \varepsilon\eta_2 - \frac{n-2}{2}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 - \frac{1}{\eta_2}\frac{n-2}{8}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^3 \end{array}\right., \tag{3.29}$$

[23] On appelle ici modes massifs les excitations propres du paramètre d'ordre *microscopique* e_i, et non pas les excitations propres du potentiel thermodynamique en fonction de l'aimantation. C'est pourquoi nous avons ici un mode massif et $n-1$ modes de Goldstone, alors que le spectre exact de la théorie est constitué de $2n$ excitations de même masse.

[24] L'intégrale fonctionnelle sur les modes π_i est normalement limitée à un domaine fini. Toutefois, dans le cadre de la théorie de perturbation, il est nécessaire de se débarrasser de cette contrainte et d'intégrer les modes de Goldstone sur l'ensemble des réels. Ceci induit une erreur en $\exp(-1/T)$ pour la fonction de partition.

Les solutions de point fixe sont obtenues en résolvant le système d'équations $\beta_1 = \beta_2 = 0$. En plus de la solution triviale $\eta_1 = \eta_2 = \infty$, correspondant au point fixe de température nulle, il existe une autre solution. En définissant $T_{1,2} = 1/\eta_{1,2}$, la solution de point fixe est :

$$\begin{cases} T_1^\star = \dfrac{n-1}{(n-2)^2}\left(\varepsilon - \dfrac{1}{2}\dfrac{3n^2-10n+4}{(n-2)^3}\varepsilon^2\right) + O(\varepsilon^3) \\ T_2^\star = \dfrac{1}{2}\dfrac{(n-1)^2}{(n-2)^3}\left(\varepsilon - \dfrac{1}{2}\dfrac{5n^2-16n+4}{(n-2)^3}\varepsilon^2\right) + O(\varepsilon^3) \end{cases} \tag{3.30}$$

L'exposant critique ν est déduit de la diagonalisation de la matrice de stabilité autour de la solution de point fixe. On obtient ainsi à l'ordre sous dominant :

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{6n^3 - 27n^2 + 32n - 12}{2(n-2)^3(2n-3)} + O(\varepsilon) \tag{3.31}$$

La dimension anormale s'obtient dans le même cadre, et donne à l'ordre dominant :

$$\eta = \frac{3n^2 - 10n + 9}{2(n-2)^3}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{3.32}$$

Le cas $n = 3$ est particulièrement intéressant, puisqu'il correspond au cas physique des antiferromagnétiques triangulaires empilés isotropes (transition Heisenberg chirale). De plus, nous allons voir qu'en ce qui concerne la physique critique, la théorie est équivalente (dans un développement à basse température à deux boucles) à la théorie vectorielle $O(4)/O(3)$. Cette équivalence est la conséquence de deux propriétés de ce modèle :

- premièrement, les équations de flot du modèle Heisenberg chiral au voisinage de $d = 2$ présentent un phénomène d'élargissement de la théorie : le schéma de brisure de symétrie de la théorie est initialement $O(3) \times O(2) \to O(1) \times O(2)$ et devient au point fixe des équations de flot $O(3) \times SO(3) \to O(3)$ [ADDJ93]. Cette propriété est observée à deux boucles dans le cadre perturbatif du modèle σ non linéaire ;
- deuxièmement, les variétés $\frac{O(3)\times SO(3)}{O(3)}$ et $\frac{O(4)}{O(3)}$ sont localement isomorphes, de sorte que les prédictions du modèle σ non linéaire pour ces deux modèles coïncident *à tous les ordres* de la théorie de perturbation.

Nous discutons ces deux propriétés dans la suite.

Phénomène d'élargissement de symétrie

Remarquons tout de suite que la théorie avec $n = 3$ possède un statut particulier. Dans ce cas, en effet, le deuxième terme de l'action (3.26) a une interprétation simple. En utilisant le produit vectoriel de $\vec{e}_1$ avec $\vec{e}_2$, il est possible de réécrire ce terme sous la forme :

$$\int d^dx(\vec{e}_1.\partial\vec{e}_2 - \vec{e}_2.\partial\vec{e}_1)^2 = 2\int d^dx\left(\partial\vec{e}_1^{\,2} + \partial\vec{e}_2^{\,2} - \partial(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)^2\right). \tag{3.33}$$

On en déduit une nouvelle expression de l'action (3.26) :

$$\mathcal{S} = \int d^d x \; \frac{\eta_2}{4}(\partial\vec{e}_1^{\,2} + \partial\vec{e}_2^{\,2}) + \left(\frac{\eta_1}{2} - \frac{\eta_2}{4}\right)\partial\vec{e}_3^{\,2}, \tag{3.34}$$

où nous avons introduit $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$. Sous cette forme, il est apparent que la ligne $\eta_1 = \eta_2$ correspond à une symétrie plus grande de l'action, puisqu'alors les termes en facteur de $\partial\vec{e}_1^{\,2}$, $\partial\vec{e}_2^{\,2}$ et $\partial\vec{e}_3^{\,2}$ sont égaux. Toutefois les champs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ d'une part, et $\vec{e}_3$ d'autre part ne jouent pas le même rôle. En effet, l'intégration fonctionnelle apparaissant dans le calcul de la fonction de partition ne porte que sur les deux premiers champs. Il est toutefois possible d'élever $\vec{e}_3$ au rang de variable dynamique, au même titre que $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, à condition d'ajouter une contrainte imposant au champ $\vec{e}_3$ d'être de norme unité, et orthogonal à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, à l'aide d'une fonction δ. Nous pouvons donc réécrire la fonction de partition (3.25) sous la forme :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\vec{e}_1\mathcal{D}\vec{e}_2\mathcal{D}\vec{e}_3 \; \delta(\vec{e}_i.\vec{e}_j - \delta_{ij}) \; e^{-\mathcal{S}}, \tag{3.35}$$

où les indices i et j prennent maintenant les trois valeurs 1, 2 et 3, et où $\vec{e}_3$ est maintenant une variable indépendante de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans $\mathcal{S}$. Étudions maintenant la solution de point fixe, donnée par l'équation (3.30). Dans le cas $n = 3$, il apparaît que les deux constantes de couplage prennent la même valeur :

$$T^\star_{1,2} = 2\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right). \tag{3.36}$$

Comme nous l'avons remarqué précédemment, l'égalité des deux constantes de couplage correspond à une symétrie plus grande de l'action, qui devient invariante sous $O(9)$! Toutefois les contraintes auxquelles sont soumises les champs, par l'intermédiaire de la fonction δ, réduit la symétrie de la théorie au sous groupe $O(3) \times SO(3)$. Nous vérifions donc que la symétrie de la théorie est élargie au point fixe [25].

Ce groupe de symétrie se comprend plus aisément si l'on regroupe les trois vecteurs $\{\vec{e}_i\}$ en colonne dans une matrice 3×3, notée R. La contrainte d'orthonormalité des trois vecteurs $\{\vec{e}_i\}$ fait de R une matrice du groupe $O(3)$. L'action (3.34) peut alors s'écrire :

$$\mathcal{S} = \int d^d x \;\; \mathrm{Tr}\; \left(P.\partial\, {}^t R.\partial R\right), \tag{3.37}$$

où P est la matrice diagonale, dépendant des constantes de couplage :

$$\begin{pmatrix} \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\eta_1 - \eta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

[25]Ce phénomène est en fait plus général. L'étude de la théorie $\frac{O(n)\times O(m)}{O(n-m)\times O(m)}$ [DJ96][PRV01b] mène à la conclusion que pour toutes les théories où $n = m - 1$, la symétrie au point fixe est élargie à $\frac{O(n)\times SO(n)}{O(n)}$.

Au point fixe, $\eta_1 = \eta_2$, de sorte que P est proportionelle à l'identité. On vérifie aisément que l'action (3.37) est invariante sous la transformation :

$$R \to U.R.V \ , \tag{3.39}$$

où U et V sont des matrices de $O(3)$.

Équivalence des modèles $\frac{O(3)\times SO(3)}{O(3)}$ et $\frac{O(4)}{O(3)}$

Cette équivalence provient du fait que d'une part, le modèle σ non linéaire n'est sensible qu'aux propriétés locales du paramètre d'ordre, et que d'autre part l'espace du paramètre d'ordre des antiferromagnétiques frustrés pour $n = 3$ est localement isomorphe (*i.e.* aux propriétés topologiques près) à $O(4)/O(3)$. Cette dernière propriété se démontre par une suite d'équivalence. Notons tout d'abord que $\frac{O(3)\times SO(3)}{O(3)}$ est isomorphe à $SO(3)$, le groupe des rotations de l'espace à trois dimensions. Le groupe des rotations est lui-même localement isomorphe au groupe $SU(2)$. L'application permettant d'associer à toute matrice unitaire U une matrice de rotation R est :

$$R_{ij}(U) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}\ \left(\sigma_i U \sigma_j U^{-1}\right), \tag{3.40}$$

où σ_i sont les matrices de Pauli et U une matrice unitaire. Finalement, utilisons la représentation des matrices unitaires à l'aide d'un vecteur normé à quatre composantes ψ :

$$U = \psi_0 \mathbb{1} + i\ \sigma_i \psi_i\ , \tag{3.41}$$

qui donne un isomorphisme entre l'ensemble des matrices unitaires, et l'ensemble des vecteurs à quatre composantes normés. En résumé :

$$\frac{O(3)\times O(2)}{O(1)\times O(2)} \simeq SO(3) \tag{3.42}$$

$$\simeq SU(2) \tag{3.43}$$

$$\simeq \frac{SO(4)}{SO(3)} \tag{3.44}$$

La conséquence importante de cette discussion est que, dans un développement de basse température, parfaitement justifié au voisinage de la dimension critique inférieure, la physique critique est gouvernée par le point fixe du modèle vectoriel à quatre composantes ! On peut d'ailleurs vérifier que l'exposant critique ν tiré de l'équation (3.31) pour $n = 3$ coïncide avec le résultat classique obtenu pour la théorie vectorielle $O(4)/O(3)$, et donné dans le chapitre précédent (voir l'équation (2.113)). Toutefois, si l'exposant critique ν coïncide dans ces deux calculs, il n'en est pas de même pour η. En effet, la dimension anormale dépend de la représentation engendrée par le paramètre d'ordre. Dans le cas particulier considéré ici, ceci se comprend aisément en remarquant que la relation entre les matrices de rotation R, et les vecteurs à quatre composantes

ψ n'est pas linéaire (voir les équations (3.40) et (3.41)). Schématiquement, $R \propto \psi\psi$, de sorte que R est un opérateur composite en terme de ψ. Aussi il est naturel que les dimensions anormales pour R et ψ diffèrent.

L'équivalence des théories $\frac{O(3)\times SO(3)}{O(3)}$ et $\frac{O(4)}{O(3)}$ à tous les ordres de la théorie de perturbation est au premier abord surprenante. En effet, si l'on étudie ces deux théories au voisinage de la dimension quatre, on observe deux comportements très différents : le second modèle admet un point fixe, et présente donc une transition de phase du second ordre, alors que le premier n'a pas de point fixe, et subit donc une transition (faiblement) du premier ordre. Les deux théories sont donc équivalentes à tous les ordres de la théorie de perturbation en $\varepsilon = d - 2$, mais diffèrent pour $\varepsilon = 2$! On peut comprendre ce phénomène en observant que lors de l'étude perturbative du modèle σ non linéaire, nous avons à plusieurs reprises utilisé des approximations induisant des erreurs en $e^{-\frac{1}{T}}$, non analytiques en T. Ces termes non analytiques peuvent être responsables de la différence de comportement de ces deux modèles. Dans le paragraphe suivant, nous discutons le rôle des excitations topologiques, qui représente une source de termes non analytiques.

Défauts topologiques des antiferromagnétiques empilés

Nous avons signalé précédemment que l'espace du paramètre d'ordre des systèmes frustrés considérés ici avait une topologie non triviale, et nous discutons dans cette section ces caractéristiques topologiques, et les implications physiques qui en découlent. On peut consulter [Mer79] pour une description plus complète

Mathématiquement, les propriétés topologiques d'un espace topologique E sont décrites par les groupes d'homotopie $\Pi_n(E)$, où n est à valeur dans les entiers. Décrivons tout d'abord le groupe $\Pi_1(E)$. Pour cela, considérons l'ensemble des chemins fermés, continus, dans l'espace du paramètre d'ordre. Un tel chemin $\mathcal{C}$ est décrit par une application continue $\gamma_{\mathcal{C}}(t)$ de [0,1] vers E. Le chemin étant fermé, la fonction $\gamma_{\mathcal{C}}(t)$ vérifie $\gamma_{\mathcal{C}}(0) = \gamma_{\mathcal{C}}(1)$. On peut introduire une relation d'équivalence entre chemins : deux chemins sont équivalents si l'on peut déformer continûment l'un en l'autre. Finalement, introduisons une loi de composition de deux chemins $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, consistant à coller bout-à-bout ces deux chemins. Le chemin $\mathcal{C} + \mathcal{C}'$ est alors décrit par la fonction :

$$\gamma_{\mathcal{C}+\mathcal{C}'}(t) = \begin{cases} \gamma_{\mathcal{C}}(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ \gamma_{\mathcal{C}'}(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}. \tag{3.45}$$

Alors, l'ensemble des classes d'équivalence des chemins, muni de cette loi de composition forme un groupe, appelé premier groupe d'homotopie, et noté $\Pi_1(E)$. Considérons d'abord le cas de l'espace $\mathbb{R}^n$. Il est facile de voir que tous les chemins fermés peuvent être continûment déformés en un chemin trivial, décrit par une fonction $\gamma(t)$ constante. Le premier groupe d'homotopie de $\mathbb{R}^n$ est donc le groupe trivial. Il n'en est pas de même du cercle S^1. En effet, les deux chemins schématisés sur la figure 3.17 ne peuvent pas être continûment déformés l'un dans l'autre. Les différentes classes d'équivalence de

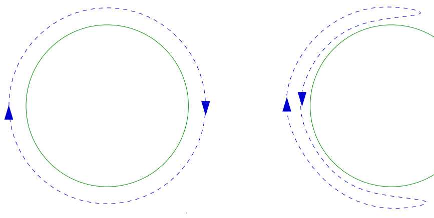


Fig. 3.17 – En pointillés, sont représentés deux chemins non équivalent sur le cercle.

chemins sont caractérisées par un entier relatif : le nombre de tours effectués autour du cercle. Ainsi $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Les autres groupes d'homotopie Π_n sont définis de la même façon, sauf qu'au lieu de considérer un chemin (objet de dimension un), on considère une surface pour Π_2, un volume pour Π_3, etc. L'équivalent des chemins est alors donné par une application de $[0,1]^n$ vers l'espace topologique E [26].

Les groupes d'homotopie associés à l'espace du paramètre d'ordre donnent une information très intéressante. En effet, un groupe d'homotopie non trivial signale l'existence de configurations non triviales du champ, appelées défauts topologiques ou vortex[27]. Ces configurations sont solutions des équations du mouvement et correspondent à des minima locaux de l'action. Elles présentent une variation brutale du champ dans une région de l'espace, mais surtout, influencent l'orientation du paramètre d'ordre microscopique sur des grandes distances. Ces configurations ont une énergie plus grande que celle de l'état fondamental, et ne jouent par conséquent pas de rôle dans la physique de basse température. Toutefois, à plus haute température, ces degrés de liberté sont excités, et peuvent jouer un rôle important dans la physique critique.

Considérons à titre d'exemple le modèle XY, dont nous avons déjà discuté les propriétés dans le chapitre précédent. Le paramètre d'ordre $SO(2) = S^1$ a un premier groupe d'homotopie non trivial. Ceci doit être mis en correspondance avec l'existence de vortex dans le système bidimensionnel. L'importance physique de ces défauts topologiques est considérable. En effet, en l'absence de défauts topologiques, la théorie en deux dimensions serait libre, et présenterait à toute température une longueur de corrélation infinie. La transition de phase observée dans le modèle XY correspond en fait à une transition de déconfinement des vortex. En utilisant l'image du gaz de Coulomb (où les vortex sont associés à des charges électriques), la phase de basse température est de type dipolaire. Les vortex se regroupent par paires de charge opposées, et la distance entre vortex appariés est petite par rapport à la distance entre paires. La phase de haute température est de type plasma : les vortex sont déconfinés.

[26] Cette application doit vérifier des conditions de continuité aux bords.

[27] Un système ayant d dimensions spatiales, et dont le paramètre d'ordre a un groupe d'homotopie Π_n non trivial, présente des vortex si $d > n + 1$. Les vortex sont alors des objets de dimension $d - n - 1$. Ainsi, le modèle XY (dont le premier groupe d'homotopie $\Pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$) présente des vortex ponctuels en dimension deux, linéaires en dimension trois, etc.

En trois dimensions, les défauts topologiques du modèle XY sont des boucles, qui sont responsables, dans certains scénarios[Kib76], de la transition ferromagnétique-paramagnétique. Ceci est corroboré par des études numériques, qui montrent que la transition de phase coïncide avec une augmentation brutale du nombre de boucles de vortex dans le système [ABH98][AB98].

On reporte sur la table 3.7 les différents groupes d'homotopie du paramètre d'ordre $\frac{O(n)\times O(2)}{O(n-2)\times O(2)}$, pour différentes valeurs de n. On observe en particulier que le

valeurs de n	Π_0	Π_1	Π_2	Π_3
2	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
3	0	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$
4	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
5	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$

TAB. 3.7 – Groupes d'homotopie du paramètre d'ordre des antiferromagnétiques empilés $\frac{O(n)\times O(2)}{O(n-2)\times O(2)}$, pour différentes valeurs de n (tiré de [KZ93]).

paramètre d'ordre des antiferromagnétiques triangulaires empilés de type Heisenberg ($n = 3$) présente un premier groupe d'homotopie non trivial, ce qui signale la présence d'excitations topologiques[28]. En revanche, l'espace du paramètre d'ordre $\frac{O(4)}{O(3)}$ a un premier groupe d'homotopie trivial, et il n'existe donc pas de vortex dans ce système. Ainsi, $SO(3)$ et $\frac{O(4)}{O(3)}$ sont localement isomorphes (voir équation (3.44)), mais diffèrent par des propriétés topologiques. Si cette différence n'a aucune implication physique sur les propriétés de basse température du système, il n'en est pas de même à haute température. Ceci est confirmé en particulier par des simulations numériques[CADM01] qui étudient la longueur de corrélation de ces deux systèmes en fonction de la température. Les comportements à basse température sont identiques, et coïncident avec les prédictions du modèle σ non linéaire. En revanche, au dessus d'une certaine température (appelée T_v), la longueur de corrélation du modèle $SO(3)$ décroît beaucoup plus vite. À cette température on observe également une prolifération du nombre de vortex dans le système. La chute de la longueur de corrélation est imputable à la présence de vortex déconfinés, qui désordonnent le système.

Les défauts topologiques de $SO(3)$ jouent probablement un rôle important en dimension trois. En effet, on s'attend à ce que la physique critique se produise à température non nulle, de sorte que les excitations topologiques sont activés. Le fait que $SO(3)$ présente des défauts topologiques alors que $O(4)/O(3)$ n'en ait pas, peut expliquer la différence des comportements critiques de ces deux systèmes.

[28]Le premier groupe d'homotopie $\mathbb{Z}_2$ pour le système isotrope signale une algèbre inhabituelle pour les vortex. Il n'y a plus d'équivalent de la charge des vortex du modèle XY. D'autre part, si l'on considère une configuration constituée de deux vortex, il est toujours possible de la déformer continûment cette configuration pour retrouver une configuration triviale, invariante sous translation.

3.5.4 Développement à n grand

Le troisième angle perturbatif utilisé pour étudier la théorie des systèmes frustrés consiste en un développement de la théorie pour un grand nombre de composantes du paramètre d'ordre [BLM77], [Kaw88]. Les exposants critiques obtenus à l'ordre $1/n$ dans ce cadre sont :

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{1}{d-2}\left(1 + 12\left(\dfrac{1}{d}-1\right)\dfrac{S_d}{n}\right) + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \\ \eta = 6\left(\dfrac{4}{d}-1\right)\dfrac{S_d}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \end{cases}, \tag{3.46}$$

où

$$S_d = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(d-2)\right]\Gamma[d-1]}{2\pi\Gamma\left[\frac{d}{2}\right]^2}. \tag{3.47}$$

Donnons également, en dimension trois, le développement à l'ordre $1/n^2$ des exposants critiques [PRV01a] :

$$\begin{cases} \nu = 1 - \dfrac{16}{n\,\pi^2} - \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{56}{\pi^2} - \dfrac{640}{3\pi^4}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \\ \eta = \dfrac{4}{n\,\pi^2} - \dfrac{64}{3n^2\pi^4} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \end{cases}. \tag{3.48}$$

On remarque que les coefficients des séries précédentes ne croissent pas trop vite avec l'ordre. Ainsi, pour des valeurs de n supérieures à 16, chaque terme de la série est au moins dix fois plus petit que le précédent. Sous l'hypothèse que ce taux de décroissance se poursuite aux ordres suivants, les séries à l'ordre $1/n^2$ permettent de déterminer les exposants critiques avec une précision de l'ordre du pourcent. Pour les valeurs $n = 16$ et $n = 32$, sur lesquelles nous reviendrons dans la suite, nous obtenons respectivement : $(\nu = 0.885, \eta = 0.0245)$, et $(\nu = 0.946, \eta = 0.0125)$, avec une erreur absolue que l'on peut estimer de l'ordre de 1%.

3.5.5 Discussion des résultats théoriques

Résumons la situation. Les approches perturbatives au voisinage de $d = 2$, ainsi que le développement à n grand, prévoient l'existence d'un point fixe dans l'ensemble de leurs domaines de validité (c'est-à-dire $n > 2$ et $2 < d < 4$ respectivement). En revanche le développement en constantes de couplage au voisinage de $d = 4$ prévoit l'existence d'un point fixe chiral uniquement pour $n > n_{\rm I}(d) = 21.8 + o(4-d)$. Nous avons représenté en ombré sur la figure 3.18 les régions du plan (d, n) où les théories de perturbation prévoient l'existence d'un point fixe chiral stable. Ainsi, nous pouvons relier par continuité, dans le plan (d, n), le point fixe du modèle σ non linéaire au point fixe de Landau-Ginzburg, en passant par la région des grands n.

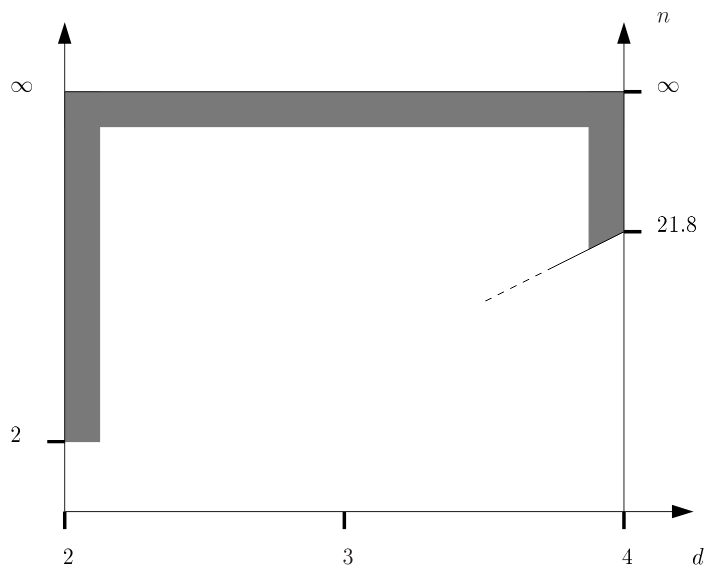


Fig. 3.18 – Dans le plan (d, n), sont représentées en gris les régions dans lesquelles les théories de perturbation conduisent à l'existence d'un point fixe chiral stable.

Nous pouvons vérifier que les expressions des exposants critiques coïncident à l'intersection des zones perturbatives. Ainsi, pour $d \simeq 4$ et n grand, les exposants critiques tirés de (3.23) et de (3.46) donnent :

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{9}{n}\right)\varepsilon + O(\varepsilon^2) + O(\dfrac{1}{n^2}) \\ \eta = \dfrac{3\varepsilon^2}{4n} + O(\varepsilon^3) + O(\dfrac{1}{n^2}) \end{cases} . \tag{3.49}$$

De même, pour $d \simeq 2$ et n grand, les développements de (3.31) et (3.32), et de (3.46) donnent :

$$\begin{cases} \nu = \dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{3}{2n} + O(\varepsilon) + O(\dfrac{1}{n^2}) \\ \eta = \dfrac{3\varepsilon}{2n} + O(\varepsilon^2) + O(\dfrac{1}{n^2}) \end{cases} . \tag{3.50}$$

On en conclut que le point fixe du modèle σ non linéaire est relié par continuité dans le plan (n, d) au point fixe stable de la théorie de Landau-Ginzburg. Ceci tend à prouver que les résultats perturbatifs sont cohérents. Toutefois, certaines questions demeurent.

- Il est difficile de conclure sur l'ordre de la transition de phase que présentent les antiferromagnétiques triangulaires empilés en dimension trois, car les développements au voisinage des dimensions deux et quatre donnent des prédictions contradictoires. D'un coté, le modèle σ non linéaire prévoit l'existence d'un point fixe en toute dimension, alors que l'approche perturbative de Landau-Ginzburg-Wilson prévoit l'absence de point fixe au voisinage de $d = 4$. C'est

là une grande différence avec le modèle vectoriel, pour lequel le modèle σ non linéaire et le modèle de Landau-Ginzburg prévoient, dans leur domaine de validité, l'existence d'un point fixe stable du groupe de renormalisation. Dans le cas du modèle vectoriel, on est naturellement conduit à la conclusion de l'existence d'un point fixe stable en toutes dimensions entre deux et quatre.
- La ligne $n_{\mathrm{I}}(d)$, séparant les régions où la transition est du premier ou du second ordre, calculée en perturbation, semble passer très près des valeurs physiques $n = 2, 3$ en dimension trois. La série perturbative exprimant $n_{\mathrm{I}}(d)$ dans un développement en puissances de $\varepsilon = 4 - d$ semble mal converger. Il est donc difficile d'en extraire une valeur fiable de $n_{\mathrm{I}}(d = 3)$, et par conséquent de déduire si la transition pour $n = 2$ et $n = 3$ est du premier ou du second ordre.

3.6 Résumé et problématique

Dans cette section, nous résumons les différents points soulevés précédemment, en soulignant les problèmes ouverts.

La question la plus importante est de déterminer si les systèmes physiques qui nous intéressent ici *i.e.* les antiferromagnétiques triangulaires empilés, et les hélimagnétiques, correspondant aux cas $n = 2$ et $n = 3$, présentent une transition de phase continue en dimension trois. Les résultats expérimentaux et numériques obtenus pour le modèle chiral XY sont difficilement compatibles avec une transition de phase du second ordre, et nous avons justifié ce point par deux arguments :
- Les exposants critiques ne sont pas universels, et présentent de fortes variations de systèmes à systèmes.
- La dimension anormale est négative, ce qui est interdit par les principes premiers de la théorie des champs.
- Les lois d'échelle, reliant les exposants critiques entre eux, ne sont pas vérifiées.

Dans le cas du modèle de Heisenberg chiral, les conclusions sont moins marquées. Nous avons indiqué un faisceau d'arguments menant plutôt à la conclusion que la transition est faiblement du premier ordre, sans qu'une réponse définitive puisse être extraite des résultats expérimentaux et numériques. Nous avons en particulier noté que :
- l'universalité semble violée : certains systèmes présentant le même schéma de brisure de symétrie ont des exposants critiques différents, et que
- certains de ces systèmes ont une dimension anormale négative, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'une transition continue.

Il est donc important de savoir si une approche théorique permet de confirmer ce fait. Une détermination de la valeur $n_{\mathrm{I}}(d = 3)$, délimitant les zones de transitions de premier et second ordre dans le plan (n, d), permettrait de répondre à cette question.

Dans le cas où la transition n'est pas continue, comme semble l'indiquer la discussion menée précédemment, il reste tout de même à expliquer pourquoi des lois de puissances sont observées sur de grandes gammes de paramètres, tellement grandes que la violation de ces lois de puissances n'est en général pas observée expérimentalement et numériquement. Il serait aussi intéressant de pouvoir évaluer les exposants critiques effectifs, trouvés expérimentalement et numériquement.

La méthode basée sur l'équation exacte régissant l'évolution de l'action effective courante Γ_k avec l'échelle k, et que nous avons décrite dans le chapitre précédent, présente plusieurs avantages dans l'optique de répondre à ces questions. Notons d'abord qu'elle permet d'étudier le modèle directement en $d = 3$, sans avoir recours à une resommation d'une série divergente, et permet donc d'obtenir simplement une détermination de $n_{\mathrm{I}}(d)$. D'autre part, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il était possible de relier explicitement les observables physiques (aimantation, longueur de corrélation,...), à la température, en intégrant les équations de flot pour différentes conditions initiales, correspondant à différentes températures. En l'absence de point fixe, il est donc possible de déterminer les courbes $M(T)$, $\xi(T)$, et de vérifier si elles présentent ou non un comportement en loi de puissance sur de grands intervalles de température. Si c'est le cas, il est également possible d'extraire une détermination d'un exposant critique effectif.

Le problème majeur soulevé par les différentes approches perturbatives est l'apparente contradiction entre les résultats obtenus grâce au modèle σ non linéaire et par le modèle de Landau-Ginzburg. La méthode utilisée ici a le grand avantage de coïncider, à une boucle, avec les résultats de ces deux approches. En étudiant la théorie en différentes dimensions, nous pourrons déterminer comment ces résultats se raccordent.

Enfin, rappelons que les modèles XY et Heisenberg chiraux ($n = 2$ et $n = 3$) présentent des excitations topologiques, qui peuvent jouer un rôle important à température non nulle. L'étude de la transition de phase du modèle XY en deux dimensions (voir la section 2.7.12) indique que la méthode permet de tenir compte des excitations topologiques, même si l'on n'introduit pas de champ associé à ces degrés de liberté.

3.7 Équations de flot pour le modèle chiral

Dans cette section, nous décrivons comment les équations de flot décrivant l'évolution des constantes de couplage avec l'échelle d'impulsion k sont obtenues. Les lignes principales de cette discussion ont été décrites dans le chapitre 2, dans le cadre de la théorie vectorielle $O(n)/O(n-1)$. Nous rappelons ici la méthode utilisée dans la section 2.7, et présentons uniquement les points qui diffèrent de l'analyse menée précédemment.

La première étape consiste à déterminer une bonne troncation de l'action effective courante, c'est-à-dire une troncation contenant le plus de propriétés pertinentes du système, et dépendant d'un minimum de constantes de couplage. Une fois cette troncation déterminée, nous étudions le spectre de la théorie[29], ainsi que les équations d'évolution des constantes de couplage paramétrant notre troncation. Les équations

[29]Par spectre, nous entendons ici les valeurs propres de la matrice de masse, et les vecteurs propres associés.

de flot sont ensuite développées au voisinage des dimensions deux et quatre, ainsi que pour des valeurs grandes de n. Nous vérifions ainsi que les résultats perturbatifs à l'ordre dominant sont reproduits. L'exploitation de ces équations en dimension trois est discutée dans la prochaine section.

3.7.1 Troncation

Dans cette section, nous décrivons le schéma de troncation dans lequel nous travaillons. Une troncation "minimale", permettant de retrouver les différents résultats perturbatifs (modèle σ non linéaire, modèle de Landau-Ginzburg et développement à n grand) est ensuite déterminée. Nous présentons la dérivation des équations d'évolution dans cette troncation simple afin d'alléger la discussion. La troncation peut ensuite être enrichie en considérant de plus en plus de termes, afin d'obtenir des déterminations plus précises des quantités calculées.

Développement en dérivées

Par analogie avec ce qui a été discuté dans le chapitre précédent (voir 2.6.1), nous considérons ici un développement en puissances des dérivées. L'action effective courante prend alors la forme :

$$\begin{aligned}\Gamma_k = \int d^d x \Bigg\{ & U_k(\rho,\tau) + \frac{1}{2} Z_k(\rho,\tau)\left(\partial^\mu \phi_{a\alpha}\right)^2 \\ & + \frac{1}{4}\phi_{a\alpha}\partial^\mu\phi_{a\beta}\Big(Y_k^{(1)}(\rho,\tau)\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta} + Y_k^{(2)}(\rho,\tau)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \\ & + Y_k^{(3)}(\rho,\tau)(2\epsilon_{\alpha\delta}\epsilon_{\beta\gamma} - \epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta})\Big)\phi_{b\gamma}\partial^\mu\phi_{b\delta} + O(\partial^4)\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.51}$$

où

$$\begin{cases} \rho = \ \mathrm{Tr}\ {}^t\varphi.\varphi \\ \tau = \dfrac{1}{2}\ \mathrm{Tr}\ \left({}^t\varphi.\varphi - \dfrac{\mathbb{1}}{2}\ \mathrm{Tr}\ \left({}^t\varphi.\varphi\right)\right)^2 \end{cases} \tag{3.52}$$

sont deux combinaisons des champs invariantes sous le groupe de symétrie du système $O(n)\times O(2)$ (voir (3.18)). À partir de ρ et τ, on génère tous les autre termes invariants sous ce groupe par addition et multiplication. Notons que ces deux invariants sont déjà présents dans le lagrangien (3.17), utilisé dans le modèle de Landau-Ginzburg. Dans une troncation à l'ordre ∂^2, on trouve quatre types de termes cinétiques dans l'action effective (Z_k, $Y_k^{(1)}$, $Y_k^{(2)}$ et $Y_k^{(3)}$), au lieu de deux dans le modèle vectoriel, et d'un seul dans le modèle d'Ising.

Développement en puissances du champ

Nous effectuons de plus un développement en puissances des champs des cinq fonctions paramétrant l'action effective. Comme nous l'avons discuté dans le chapitre précédent (voir 2.6.2), afin d'obtenir une détermination précise des observables physiques, il est important d'effectuer ce développement au voisinage du minimum du potentiel :

$$\left.\frac{\delta U_k}{\delta \varphi_{a\alpha}}\right|_{\text{Min}} = 0. \tag{3.53}$$

La configuration notée Min est invariante sous translation. Afin d'étudier le bon schéma de brisure de symétrie, nous choisissons une configuration de champ correspondant à deux vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ orthogonaux et de même norme. Une bonne paramétrisation de cette configuration est, par exemple[30] :

$$\varphi_{\text{Min}} = \sqrt{\bar{\kappa}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

Seule l'orientation relative des deux vecteurs est importante, et modulo cette contrainte, on peut choisir arbitrairement l'orientation des deux vecteurs sans altérer les résultats physiques. Les deux invariants ρ et τ valent dans cette configuration :

$$\begin{cases} \rho\big|_{\text{Min}} = 2\bar{\kappa} \\ \tau\big|_{\text{Min}} = 0 \end{cases}, \tag{3.55}$$

de sorte que le développement des fonctions paramétrant l'action effective (3.51) au voisinage du minimum s'obtient dans un double développement en puissances de $(\rho - 2\bar{\kappa})$ et τ. Ainsi, à l'ordre "φ^4", le potentiel développé au voisinage du minimum φ_{Min} prend la forme :

$$U_k(\rho, \tau) = \frac{\bar{\lambda}}{16} (\rho - 2\bar{\kappa})^2 + \frac{\bar{\mu}}{4}\tau + O(\varphi^6). \tag{3.56}$$

Cette troncation du potentiel peut être menée à des ordres plus élevés, toutefois il est suffisant de garder uniquement ces deux termes pour retrouver les différents résultats perturbatifs. En ce qui concerne les termes cinétiques, nous les approximons, dans la troncation minimale, par :

$$\begin{cases} Z_k(\rho, \tau) = Z + O(\varphi^2) \\ Y_k^{(1)}(\rho, \tau) = \bar{\omega} + O(\varphi^2) \\ Y_k^{(2)}(\rho, \tau) = O(1) \\ Y_k^{(3)}(\rho, \tau) = O(1) \end{cases}, \tag{3.57}$$

[30] Dans ce chapitre, les quantités avec une barre représentent des quantités dimensionnées, non renormalisées. Nous introduisons dans la suite les quantités dédimensionnées, renormalisées associées qui seront représentées par le même symbole, mais sans barre.

où Z et ω sont des constantes de couplage, indépendantes de φ, et nous obtenons ainsi la troncation “minimale” [31] :

$$\Gamma_k = \int d^d x \Big\{ \frac{Z}{2} \left(\partial \vec{\varphi}_1^2 + \partial \vec{\varphi}_2^2 \right) + \frac{\bar{\omega}}{4} (\vec{\varphi}_1 \partial \vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_2 \partial \vec{\varphi}_1)^2 + \frac{\bar{\lambda}}{16} (\rho - 2\bar{\kappa})^2 + \frac{\bar{\mu}}{4} \tau \Big\}. \quad (3.58)$$

Discutons maintenant chacun des termes de cette troncation. Les deux derniers, termes de potentiel (sans dérivées), sont déjà présents dans le lagrangien (3.15), considéré lors du traitement perturbatif de la théorie au voisinage de $d = 4$. Les équations d'évolution de ces deux termes permettront de retrouver les résultats du modèle de Landau-Ginzburg à l'ordre dominant. La constante de couplage Z représente la renormalisation du champ, et permet de générer la dimension anormale du système. Enfin, $\bar{\omega}$ correspond à une interaction à quatre champs et deux dérivées. Lors du traitement de la théorie par une approche de type Landau-Ginzburg, ce terme n'est pas retenu, car sa dimension canonique ($[\bar{\omega}] = 2 - d$) est négative au voisinage de $d = 4$, et correspond donc à une interaction non pertinente. En revanche, ce terme est très important au voisinage de $d = 2$, puisqu'il s'identifie au terme courant (deuxième terme dans l'action (3.26)), qui est en particulier responsable de l'élargissement de la symétrie pour $n = 3$.

Cette troncation a l'avantage d'être traitée assez simplement, et nous présentons les principales étapes menant à la détermination des équations de flot dans ce cadre. Toutefois, il est nécessaire d'utiliser des troncations plus riches afin d'obtenir des résultats quantitativement meilleurs. Les équations de flot sont alors beaucoup plus longues. Nous ne reportons pas ces équations, qui n'éclairent pas la discussion [32]

3.7.2 Spectre

Maintenant que la troncation est déterminée, il reste à fixer les définitions de constantes de couplage $\{\bar{\kappa}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, Z, \bar{\omega}\}$. Nous pourrons ensuite appliquer l'opérateur ∂_t à ces définitions, et obtenir ainsi les équations d'évolution des constantes de couplage. Toutefois, il est intéressant de commencer par déterminer les excitations propres du système (c'est-à-dire les vecteurs propres de l'inverse propagateur). Ceci a trois avantages :

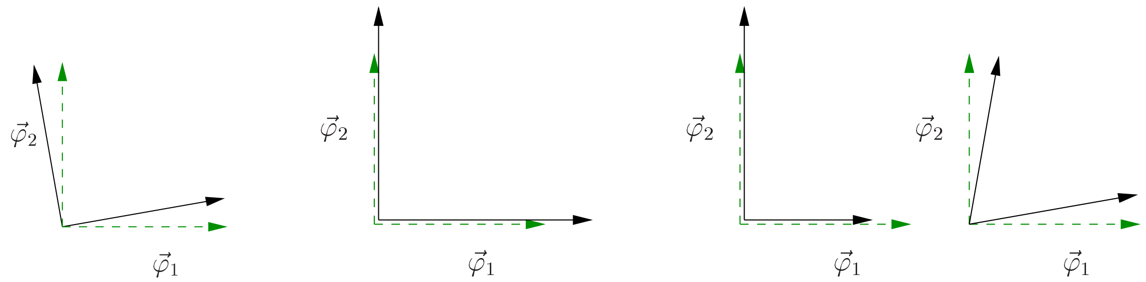
- À la lumière de cette discussion, les différents termes de notre troncation auront un sens plus clair.
- Si nous utilisons, dans les calculs des équations de flot, la base propre des excitations élémentaires, les opérations de multiplication de matrices et de calcul de trace (voir la section 2.7.6) sont beaucoup plus aisées. En effet dans cette base, le propagateur est diagonal, et les fonctions de vertex ont beaucoup d'entrées nulles.

[31] Les constantes de couplage $\{Z, \bar{\omega}, \bar{\kappa}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}\}$ dépendent de l'échelle k. Pour alléger les notations nous supprimons la référence à cette variable.

[32] Ces équations sont disponibles sut le site : `http ://www.lpthe.jussieu.fr/~tissier/`

– Finalement, rappelons que les fonctions seuil apparaissant dans les équations d'évolution des constantes de couplage, ont pour argument les masses des excitations propres du système. Il est donc intéressant, avant de se lancer dans le calcul des équations de flot, de déterminer ces masses.

Commençons donc par calculer la dérivée seconde de l'action effective, évaluée au minimum[33] et notée $\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}^2)$, qui s'identifie à l'inverse du propagateur de la théorie. Cette matrice se diagonalise facilement, et les $2n$ modes de la théorie se rangent en quatre familles.



(a) Singulet de masse nulle

(b) Singulet massif

(c) Doublet massif

FIG. 3.19 – Représentation des excitations propres du modèle d'antiferromagnétiques triangulaires empilés. La configuration de référence des vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ est représentée en pointillés, et la configuration après déformation en lignes pleines.

• On trouve $2n - 4$ modes de Goldstone, correspondant à la rotation rigide du dihèdre, laissant un des deux vecteurs inchangé. La valeur propre de $\Gamma_k^2(\mathbf{q}^2)$ associée est $Z\mathbf{q}^2$. À impulsion nulle, cette valeur propre est nulle, ce qui confirme que ces modes sont des modes Goldstone. Les quatre autres excitations correspondent à des déformations de $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ dans le plan $(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2)$.

• Il existe une autre excitation de masse nulle, correspondant à une rotation simultanée des vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$. Cette excitation est représentée sur la figure 3.19(a), et correspond à la valeur propre $(Z + \bar{\kappa}\bar{\omega})\mathbf{q}^2$ de l'inverse propagateur. On remarque que ce mode de Goldstone n'a pas le même propagateur que les $2n - 4$ autres, et que le terme courant influence la propagation de ce mode.

• On trouve ensuite un mode massif, correspondant à une dilatation (ou une contraction) des deux vecteurs par un même facteur (voir figure 3.19(b)). La valeur propre associée à cette excitation est $Z\mathbf{q}^2 + \bar{\lambda}\bar{\kappa}$. Lors de cette déformation, les contraintes

[33]Rappelons que tous les calculs sont menés au voisinage de la configuration de champ décrite par l'équation (3.54), et que par conséquent nous sommes intéressés par les excitations propres du système autour d'une configuration non triviale du champ.

d'orthogonalité et de normalisation sont respectées, de sorte que τ reste nul. Ceci explique pourquoi $\bar{\mu}$ n'intervient pas dans la masse de ce mode. Notons que dans la troncation considérée ici, le terme cinétique de ce mode (en préfacteur de $\mathbf{q}^2$) est identique à celui des $2n-4$ modes de Goldstone. Toutefois si l'on remplace dans (3.57) l'approximation de $Y_k^{(2)}$ par $Y_k^{(2)}(\rho,\tau) = \bar{Y}^{(2)} + 0(\varphi^2)$, le terme cinétique devient $(Z + \bar{Y}^{(2)}\bar{\kappa})\mathbf{q}^2$.

• Finalement, les deux derniers modes forment un doublet massif. Ces excitations correspondent à des déformations de $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ laissant la quantité $\vec{\varphi}_1^2 + \vec{\varphi}_2^2$ inchangée (voir 3.19(c)). Par conséquent, la constante de couplage $\bar{\lambda}$ ne contribue pas à la masse de cette excitation. La valeur propre de $\Gamma_k^{(2)}$ associée est $Z\mathbf{q}^2 + \bar{\mu}\bar{\kappa}$. À nouveau, si la fonction $Y_k^{(3)}(\rho,\tau)$ est approximée par $\bar{Y}^{(3)}$ le terme cinétique de ces deux modes massifs devient $(Z + \bar{Y}^{(3)}\bar{\kappa})$.

À ce stade, on peut comprendre pourquoi, dans la troncation minimale (3.58), nous considérons la contribution provenant de $Y^{(1)}$, mais pas celles de $Y^{(2)}$ et $Y^{(3)}$. En effet, $Y^{(1)}$ donne une contribution à la renormalisation du champ du mode de Goldstone, qui joue un rôle important au voisinage de la dimension deux. En revanche $Y^{(2)}$ et $Y^{(3)}$ influencent uniquement les modes massifs, et il n'est pas nécessaire de tenir compte de ces termes pour retrouver les résultats du modèle σ non linéaire à l'ordre dominant.

Afin de profiter de la symétrie du problème, nous considérons dans la suite les fonctions de vertex obtenues par dérivation de l'action effective Γ_k dans les directions propres du problème. Nous introduisons donc :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_{1,1}} + \frac{\delta}{\delta\varphi_{2,2}}\right)\\
\delta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_{1,1}} - \frac{\delta}{\delta\varphi_{2,2}}\right)\\
\delta_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_{1,2}} + \frac{\delta}{\delta\varphi_{2,1}}\right)\\
\delta_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_{1,2}} - \frac{\delta}{\delta\varphi_{2,1}}\right)\\
\delta_5 &= \frac{\delta}{\delta\varphi_{3,1}}\\
\delta_6 &= \frac{\delta}{\delta\varphi_{3,2}}\\
&\dots\\
\delta_{2n-1} &= \frac{\delta}{\delta\varphi_{n,1}}\\
\delta_{2n} &= \frac{\delta}{\delta\varphi_{n,2}}
\end{aligned}$$

La direction 1 correspond au singulet massif (voir figure 3.19(b)), les directions 2 et 3 au doublet massif (figure 3.19(c)), la direction 4 au singulet de masse nulle (figure 3.19(a)), et les dernières directions correspondent aux $2n-4$ modes de Goldstone.

3.7.3 Définition des constantes de couplage

Dans cette section nous fixons les prescriptions, définissant les constantes de couplage qui paramétrisent la troncation (3.58). Nous commençons par les constantes de couplage $\{\bar{\kappa}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}\}$, qui paramétrisent le potentiel, puis $\{Z, \bar{\omega}\}$, décrivant les termes cinétiques, dépendant de l'impulsion.

Rappelons que $\bar{\kappa}$ a été introduit comme coefficient paramétrant la configuration minimisant le potentiel (voir l'équation (3.54)). Nous définissons donc $\bar{\kappa}$ implicitement par la formule :

$$\delta_1 \Gamma_k \Big|_{\text{Min}} = 0. \tag{3.59}$$

Les constantes de couplage $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ sont définies à partir des dérivées seconde de l'action effective [34] :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\bar{\kappa}\delta(\mathbf{0})} \delta_1 \delta_1 \Gamma_k \Big|_{\text{Min}}, \tag{3.60}$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\bar{\kappa}\delta(\mathbf{0})} \delta_2 \delta_2 \Gamma_k \Big|_{\text{Min}}. \tag{3.61}$$

Les constantes de couplage $\{Z, \bar{\omega}\}$ paramétrisent les termes cinétiques, et il faut dons faire appel à une dérivée par rapport aux impulsions pour les définir. L'étude des valeurs propres de l'inverse propagateur Γ_k^2 associées aux différents modes propres de la théorie nous conduisent à choisir les prescriptions [35] :

$$Z = \frac{1}{\delta(\mathbf{0})} \frac{d}{d\mathbf{q}^2} \left\{ \delta_{5,\mathbf{q}} \delta_{5,-\mathbf{q}} \Gamma_k \right\} \tag{3.62}$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\bar{\kappa}\delta(\mathbf{0})} \frac{d}{d\mathbf{q}^2} \left\{ \delta_{4,\mathbf{q}} \delta_{4,-\mathbf{q}} \Gamma_k - \delta_{5,\mathbf{q}} \delta_{5,-\mathbf{q}} \Gamma_k \right\}. \tag{3.63}$$

3.7.4 Équations de flot

Les équations d'évolution pour les constantes de couplage s'obtiennent en suivant la procédure décrite au chapitre 2.7.6. On applique d'abord l'opérateur ∂_t aux équations définissant les constantes de couplage. À l'aide de l'équation d'évolution exacte (2.37)

[34] $\delta(\mathbf{0})$ est proportionnel au volume du système.

[35] Le symbole en gras en indice de δ signifie que la dérivée fonctionnelle est effectuée par rapport à des champs d'impulsion $\mathbf{q}$.

page 32, on ramène le calcul du flot des constantes de couplage à un problème de multiplication de matrices, et de calcul de traces. Afin d'étudier les propriétés critiques le plus commodément possible, nous introduisons ensuite des quantités dédimensionnées, renormalisées, définies à partir des quantités initiales par :

$$\begin{cases} \kappa = Zk^{2-d}\bar{\kappa} \\ \lambda = Z^{-2}k^{d-4}\bar{\lambda} \\ \mu = Z^{-2}k^{d-4}\bar{\mu} \\ \omega = Z^{-2}k^{d-2}\bar{\omega} \end{cases} \tag{3.64}$$

Nous introduisons finalement les fonctions seuil, qui permettent d'écrire les équations d'évolution sous une forme plus concise. Il y a deux nouveautés dans le présent calcul, par rapport à ce que l'on a vu dans le modèle vectoriel. D'abord, il est nécessaire d'introduire une nouvelle fonction seuil, notée $n^d_{n_1,n_2}$, pour exprimer les équations de flot. D'autre part, il est nécessaire de spécifier plusieurs arguments dans les fonctions seuil. En effet, afin de décrire les quatre propagateurs de la théorie, correspondant aux quatre types d'excitations propres du système, il est nécessaire de déterminer le terme de masse (*i.e.* 0, $\bar{\lambda}\bar{\kappa}$ ou $\bar{\mu}\bar{\kappa}$), mais également le préfacteur du terme en q^2, qui peut prendre les valeurs Z ou $Z+\bar{\omega}\bar{\kappa}$. Les fonctions seuil utilisées dans la suite ont trois arguments. Les deux premiers sont des masses, et peuvent prendre les trois valeurs rapportées plus haut. Le troisième vaut 0 ou $\bar{\omega}\bar{\kappa}$. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour une discussion détaillée de ces fonctions.

Nous obtenons ainsi les équations d'évolution des constantes de couplage dédimensionnées, renormalisées [TDM00] :

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa}{dt} =& -(d-2+\eta)\kappa + 4v_d\Bigg[\frac{1}{2}l^d_{01}[0,0,\kappa\omega] + (n-2)l^d_{10}[0,0,0]+ \\ &+ \frac{3}{2}l^d_{10}[\kappa\lambda,0,0] + \left(1+2\frac{\mu}{\lambda}\right)l^d_{10}[\kappa\mu,0,0] + \frac{\omega}{\lambda}l^{2+d}_{01}[0,0,\kappa\omega]\Bigg] \end{aligned} \tag{3.65a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} =&(d-4+2\eta)\lambda + v_d\Bigg[2\lambda^2(n-2)l^d_{20}[0,0,0] + \lambda^2 l^d_{02}[0,0,\kappa\omega]+ \\ &+ 9\lambda^2 l^d_{20}[\kappa\lambda,0,0] + 2(\lambda+2\mu)^2 l^d_{20}[\kappa\mu,0,0] + 4\lambda\omega l^{2+d}_{02}[0,0,\kappa\omega]+ \\ &+ 4\omega^2 l^{4+d}_{02}[0,0,\kappa\omega]\Bigg] \end{aligned} \tag{3.65b}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} =&(d-4+2\eta)\mu - 2v_d\mu\Bigg[-\frac{2}{\kappa}l^d_{01}[0,0,\kappa\omega] + \frac{3(2\lambda+\mu)}{\kappa(\mu-\lambda)}l^d_{10}[\kappa\lambda,0,0]+ \\ &+ \frac{8\lambda+\mu}{\kappa(\lambda-\mu)}l^d_{10}[\kappa\mu,0,0] + \mu l^d_{11}[\kappa\mu,0,\kappa\omega] + \mu(n-2)l^d_{20}[0,0,0]\Bigg] \end{aligned} \tag{3.65c}$$

$$\begin{aligned}\eta = -\frac{d\ \ln(Z)}{dt} = 2\frac{v_d}{d\kappa}\Big[&(4-d)\kappa\omega l_{01}^d[0,0,\kappa\omega] + 2\kappa^2\omega^2 l_{02}^{2+d}[0,0,\kappa\omega]+\\ &+ 2m_{02}^d[0,0,\kappa\omega] + 2(-2+d)\kappa\omega l_{10}^d[0,0,0] - 4m_{11}^d[0,0,\kappa\omega]+\\ &+ 2m_{20}^d[0,0,\kappa\omega] + 2\kappa^2\lambda^2 m_{2,2}^d[\kappa\lambda,0,0] + 4\kappa^2\mu^2 m_{2,2}^d[\kappa\mu,0,0]+\\ &+ 4\kappa\omega n_{02}^d[0,0,\kappa\omega] - 8\kappa\omega n_{11}^d[0,0,\kappa\omega] + 4\kappa\omega n_{20}^d[0,0,\kappa\omega]\Big]\end{aligned} \tag{3.65d}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} =&(d-2+2\eta)\omega + \frac{4v_d}{d\kappa^2}\Big[\kappa\omega\Big\{\frac{(4-d)}{2}l_{01}^d[0,0,\kappa\omega] + \frac{(d-16)}{2}l_{01}^d[\kappa\lambda,0,\kappa\omega]+\\ &+ \kappa\omega l_{02}^{2+d}[0,0,\kappa\omega] - 3\kappa\omega l_{02}^{2+d}[\kappa\lambda,0,\kappa\omega] + (d-2)l_{10}^d[0,0,0]-\\ &-(d-8)l_{10}^d[\kappa\lambda,0,0] + 8\kappa\lambda l_{11}^d[\kappa\lambda,0,\kappa\omega] + 2\kappa\omega(n-2)l_{20}^{2+d}[0,0,0]+\\ &+ 2\kappa\omega l_{20}^{2+d}[\kappa\mu,0,0]\Big\} + m_{02}^d[0,0,\kappa\omega] - m_{02}^d[\kappa\lambda,0,\kappa\omega] - 2m_{11}^d[0,0,\kappa\omega]+\\ &+ 2m_{11}^d[\kappa\lambda,0,\kappa\omega] + m_{20}^d[0,0,\kappa\omega] - m_{20}^d[\kappa\lambda,0,\kappa\omega] + \kappa^2\lambda^2 m_{22}^d[\kappa\lambda,0,0]+\\ &+ 2\kappa^2\mu^2 m_{22}^d[\kappa\mu,0,0] + 2\kappa\omega n_{02}^d[0,0,\kappa\omega] - 4\kappa\omega n_{02}^d[\kappa\lambda,0,\kappa\omega]-\\ &- 4\kappa\omega n_{11}^d[0,0,\kappa\omega] + 8\kappa\omega n_{11}^d[\kappa\lambda,0,\kappa\omega] + 2\kappa\omega n_{20}^d[0,0,\kappa\omega]-\\ &- 4\kappa\omega n_{20}^d[\kappa\lambda,0,\kappa\omega]\Big]\end{aligned} \tag{3.65e}$$

3.8 Lien avec les théories de perturbation

Dans cette section, nous vérifions que les équations non perturbatives (3.65) permettent de retrouver les résultats perturbatifs en constantes de couplage, à basse température et à n grand à l'ordre dominant.

3.8.1 Développement à petites constantes de couplage

Nous avons montré au chapitre précédent (voir 2.7.7), dans le cas de la théorie vectorielle, que les équations non perturbatives redonnent les équations à une boucle une fois développées à l'ordre dominant en constantes de couplage. Cette procédure peut être appliquée à nouveau ici. Toutefois pour simplifier la discussion, nous proposons une autre approche. Nous supposons *a priori* un comportement pour les coordonnées du point fixe, en fonction de $\varepsilon = 4 - d$ [36] :

$$\begin{cases} \kappa \propto \text{cte} \\ \lambda \propto \varepsilon \\ \mu \propto \varepsilon \\ \eta \propto \varepsilon^2 \\ \omega \propto \varepsilon^2 \end{cases} \tag{3.66}$$

Nous pouvons maintenant développer les équations non perturbatives (3.65) en puissances de ε à l'ordre dominant. On vérifie *a posteriori* que les comportements des constantes de couplage au point fixe coïncident avec ceux de (3.66), ce qui assure la cohérence de la procédure. Nous vérifions ainsi que les équations d'évolution pour les deux constantes de couplage en "φ^4" coïncident avec les expressions (3.19). Par conséquent, le diagramme de flot, ainsi que les exposants critiques obtenus à partir des équations (3.65) au voisinage de $d = 4$ s'identifient, à une boucle, à ceux présentés dans le chapitre 3.5.2.

3.8.2 Développement à basse température

Au voisinage de $d = 2$, les propriétés critiques peuvent être étudiées dans un développement à basse température. Comme nous l'avons décrit au chapitre précédent (voir 2.7.8), un tel développement correspond, dans notre paramétrisation, à un développement à κ grand. On s'attend également aux comportements suivants pour les autres constantes de couplage :

$$\begin{cases} \kappa \propto \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \lambda \propto \text{cte} \\ \mu \propto \text{cte} \\ \eta \propto \varepsilon \\ \omega \propto \varepsilon \end{cases} . \tag{3.67}$$

En supposant ces comportements, nous pouvons développer les équations d'évolution (3.65). Nous vérifions *a posteriori* que ces équations de flot développées admettent des solutions de point fixe en accord avec les comportements décrits par l'équation (3.67). Nous obtenons à l'ordre dominant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\kappa}{dt} = -(d-2+\eta)\kappa + \dfrac{n-2}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi(1+\kappa\omega)} \\ \dfrac{d\omega}{dt} = (-2+d+2\eta)\omega + \dfrac{1+\kappa\omega+(n-1)\kappa^2\omega^2+(n-2)\kappa^3\omega^3}{2\pi\kappa^2(1+\kappa\omega)} \\ \eta = \dfrac{3+4\kappa\omega+2\kappa^2\omega^2}{4\pi\kappa(1+\kappa\omega)} \end{cases} \tag{3.68}$$

[36]Des comportements identiques ont été déduits pour le modèle vectoriel.

En effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} \eta_1 = 2\pi\kappa \\ \eta_2 = 4\pi\kappa(1+\kappa\omega) \end{cases} \tag{3.69}$$

on retrouve, à une boucle, les équations d'évolution des constantes de couplage obtenues dans la théorie de perturbation (voir eq (3.29)). Les équations non perturbatives (3.65) permettent ainsi de retrouver, à l'ordre dominant, les résultats obtenus en théorie de perturbation.

Remarquons ici que, dans l'approximation du potentiel local[Zum93], ni la renormalisation du champ Z, ni le terme courant ω ne sont pris en compte. On ne peut donc pas retrouver la fonction β du modèle σ perturbatif à une boucle. On ne peut pas non plus observer l'effet de symétrie élargie lorsque $n = 3$.

3.8.3 Développement à n grand

Dans la limite où le nombre de composantes du paramètre d'ordre devient grand, on s'attend que les coordonnées du point fixe se comportent comme :

$$\begin{cases} \kappa \propto n \\ \lambda \propto \dfrac{1}{n} \\ \mu \propto \dfrac{1}{n} \\ \eta \propto \dfrac{1}{n} \\ \omega \propto \dfrac{1}{n} \end{cases} \tag{3.70}$$

Nous pouvons à nouveau développer, à l'ordre dominant, les équations d'évolution non perturbatives (3.65) en puissances de $1/n$. Nous obtenons ainsi des fonctions β plus simples, sur lesquelles on vérifie *a posteriori* que les coordonnées de point fixe suivent les comportements (3.70). Le comportement de η avec n nous indique que la dimension anormale est nulle à une boucle. À l'ordre dominant, l'équation d'évolution sur κ (3.65a), développée à l'ordre dominant prend la forme :

$$\frac{d\kappa}{dt} = -(d-2)\kappa + 4n\, v_d\, l_1^d[0,0,0]. \tag{3.71}$$

Cette équation d'évolution ne dépend que de κ, aussi en la linéarisant au voisinage du point fixe, on obtient une valeur propre négative de la matrice de stabilité, d'où l'on tire l'exposant ν :

$$\nu = \frac{1}{d-2}. \tag{3.72}$$

Ce résultat coïncide avec le résultat obtenu par la théorie de perturbation à l'ordre dominant (voir l'équation (3.46)).

3.9 Résultats

Dans la section précédente, nous avons vérifié que tous les résultats perturbatifs à l'ordre dominant peuvent être déduits des équations de flot non perturbatives (3.65). Toutefois, l'intérêt principal de ces équations vient du fait qu'elles peuvent être étudiées directement en trois dimensions. Afin d'obtenir des résultats plus précis, nous avons considéré des troncations plus riches que celle qui a mené aux équations (3.65). La troncation la plus riche que nous ayons considéré contient les termes de potentiel ayant au plus huit puissances du champ. Pour les termes cinétiques, faisant intervenir les dérivées spatiales du champ, nous avons développé les fonctions $Z_k(\rho,\tau)$ et $Y_k^i(\rho,\tau)$ (voir équation (3.51)) au voisinage du minimum, en ne gardant que le premier terme. Explicitement, la troncation prend la forme :

$$\begin{aligned}\Gamma_k = \int d^dx \Bigg(& \frac{Z}{2}((\partial\vec{\varphi}_1)^2 + (\partial\vec{\varphi}_2)^2) + \frac{\omega_1}{4}\left(\vec{\varphi}_1\partial\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_2\partial\vec{\varphi}_1\right)^2 + \frac{\omega_2}{4}\left(\vec{\varphi}_1\partial\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2\partial\vec{\varphi}_2\right)^2 \\ & + \frac{\omega_3}{4}\left(\left(\vec{\varphi}_1\partial\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_2\partial\vec{\varphi}_2\right)^2 + \left(\vec{\varphi}_1\partial\vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_2\partial\vec{\varphi}_1\right)^2\right) \\ & + \frac{\lambda}{16}(\rho-2\kappa)^2 + \frac{\mu}{4}\tau + \frac{u_1}{96}(\rho-2\kappa)^3 + \frac{u_2}{16}(\rho-2\kappa)\tau + \\ & + \frac{v_1}{768}(\rho-2\kappa)^4 + \frac{v_2}{64}(\rho-2\kappa)^2\tau + \frac{v_3}{16}\,\tau^2\Bigg)\end{aligned} \tag{3.73}$$

Rappelons que ρ et τ sont les deux combinaisons des champs invariants sous les transformations du groupe de symétrie $O(n)\times O(2)$, et ont été introduits précédemment (voir (3.52)). Cette troncation est assez proche de celle que nous avons présenté dans le chapitre précédent, lors de l'étude du modèle vectoriel (voir la troncation c) dans la table 2.1 page 57). Nous avons déterminé les équations d'évolution non perturbatives des constantes de couplage pour cette troncation. Celles-ci sont assez longues (de l'ordre de dix pages), et n'apportent pas d'éclaircissement à la discution. Nous ne les rapportons donc pas ici. Nous présentons dans la suite les résultats qui peuvent être déduits de ces équations de flot.

3.9.1 Courbe $n_{\mathrm{I}}(d)$

Un des résultats les plus frappants qui ressort de l'approche perturbative au voisinage de $d=4$, discutée à la section 3.5.2, est l'existence d'une ligne $n_{\mathrm{I}}(d)$ séparant le plan (n,d) en deux régions : l'une dans laquelle existe d'un point fixe (pour $n > n_{\mathrm{I}}(d)$), et l'autre où aucun point fixe stable n'existe. Commençons la discussion des résultats obtenus à partir des équations de flot non perturbatives en discutant la forme de cette courbe. Sur la figure 3.20 sont données les valeurs de $n_{\mathrm{I}}(d)$ obtenues à partir des équations de flot non perturbatives, pour différentes valeurs de d (représentées par des croix). La courbe en trait continu correspond à une détermination de la courbe

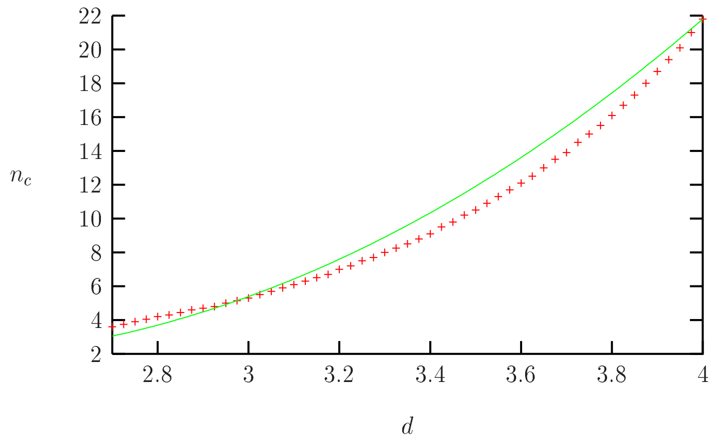


FIG. 3.20 – Courbe $n_{\rm I}(d)$ séparant les régions où la transition est du premier ($n < n_{\rm I}(d)$) ou du second ordre ($n > n_{\rm I}(d)$). Les croix correspondent aux données obtenues à partir des équations non perturbatives. La ligne continue est obtenue à partir des résultats à trois boucles, et d'une condition en dimension deux (voir texte).

$n_{\rm I}(d)$ proposée dans [PRV01b]. Cette détermination repose sur le développement de $n_{\rm I}(d)$ en puissances de $\varepsilon = 4 - d$ déduit de la théorie de perturbation à trois boucles :

$$n_{\rm I}(d) = 21.80 - 23.43(4-d) + 7.09(4-d)^2 + o\Big((4-d)^3\Big). \tag{3.74}$$

Les auteurs de [PRV01b] utilisent l'hypothèse supplémentaire que $n_{\rm I}(d = 2) = 2$ [37] pour réécrire la série perturbative comme la valeur de $n_{\rm I}(d = 2)$ plus un terme s'annulant en dimension deux :

$$n_{\rm I}(d) = 2 + (d-2)\Big(9.90 - 6.67(4-d) + 0.016(4-d)^2\Big) + o\Big((4-d)^3\Big). \tag{3.75}$$

L'intérêt de cette réécriture est que la série semble avoir un meilleur comportement, car les coefficients de la série décroissent plus vite que dans la série initiale (3.74). L'idée d'utiliser une contrainte pour réécrire une série perturbative a été souvent utilisée (voir par exemple [GZJ87], [PV98]), et permet d'obtenir des estimations précises des quantités universelles. On voit sur la figure 3.20 qu'il y a un assez bon accord entre les deux déterminations de la courbe $n_{\rm I}(d)$. En particulier, les deux approches conduisent à une valeur très proche pour $d = 3$: $n_{\rm I}(3) \simeq 5.3$.

Nous discutons dans la suite les résultats obtenus pour des valeurs de n supérieures à cette valeur critique. Il existe alors un point fixe stable des équations d'évolution, et nous pouvons déterminer les exposants critiques associés à la transition de phase en utilisant la méthode décrite dans le chapitre précédent (voir les sections 2.7.4

[37] Cette hypothèse découle de l'étude des propriétés critiques du modèle $\frac{O(n)\times O(m)}{O(n-m)\times O(m)}$, à la fois au voisinage de $d = 2$ dans le cadre du modèle σ non linéaire à deux boucles, et dans un développement en constantes de couplage au voisinage de $d = 4$ [PRV01b].

et 2.7.5), lors de l'étude du modèle vectoriel. Notons toutefois que les valeurs physiquement intéressantes de n sont plus petites que $n_{\text{I}}(d=3)$. Nous étudions donc ensuite les équations de flot non perturbatives pour des valeurs de n inférieures à la valeur critique.

3.9.2 $n > n_{\text{I}}(d=3)$

En trois dimensions, et pour des valeurs suffisamment grandes de n, on trouve quatre points fixes, qui sont reliés par continuité dans le plan (d,n) aux quatre points fixes trouvés dans la théorie de perturbation au voisinage de $d=4$ (voir figure 3.16(a) page 91). En étudiant les équations de flot au voisinage du point fixe chiral, stable, nous pouvons déterminer les exposants critiques associés à la transition de phase. Nous nous sommes intéressés particulièrement à trois valeurs de n, qui ne correspondent à aucune réalisation physique, mais qui permettent de tester la précision de notre approche. Nous avons étudié les exposants critiques pour $n=6$, et les avons comparés à ceux obtenus par simulation Monte Carlo [LSD+00], et qui sont reportés à la table 3.6 page 85. Nous avons également étudié les équations pour $n=16$ et $n=32$. Pour ces valeurs, les premiers termes du développement en puissances de $1/n$ des exposants critiques η et ν permettent de déterminer les valeurs de ces exposants avec une assez bonne précision. Les valeurs des exposants critiques pour ces trois valeurs de n sont reportés sur la table 3.8 [38].

n	méthode	α	β	γ	ν	η
6	simulation	-0.100(33)	0.359(14)	1.383(36)	0.700(11)	0.025(20)
	non pert.	-0.121	0.372	1.377	0.707	0.0527
16	$1/n$	-0.655	0.453	1.749	0.885	0.0245
	6 boucles				0.858(4)	
	non pert.	-0.694	0.460	1.773	0.898	0.0252
32	$1/n$	-0.838	0.479	1.881	0.946	0.0125
	6 boucles				0.936(2)	
	non pert.	-0.850	0.481	1.888	0.950	0.0134

Tab. 3.8 – Exposants critiques pour différentes valeurs de n. Les lois d'échelle sont utilisées pour déterminer α, β et γ. $1/n$ provient des séries d'ordre $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$[PRV01a], 6 boucles correspond aux résultats des théories de perturbation à six boucles resommées, simulation correspond aux résultats numériques (voir [LSD+00]) et non pert. provient de l'étude des équations de flot non perturbatives, dans la troncation la plus riche.

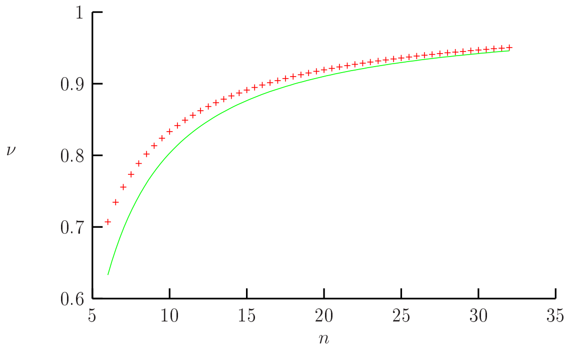
Les exposants critiques pour $n=6$ sont en bon accord avec la simulation numérique effectuée sur ce système. Les exposants α, β, γ et ν sont à moins d'un écart

[38]Nous avons également reporté dans la table 3.8 les résultats obtenus par resommation des séries perturbatives à six boucles. Nous discuterons ces résultats plus tard.

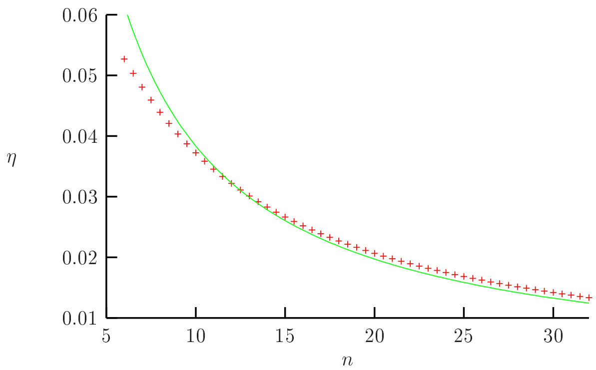
standard de la valeur obtenue par simulation. La détermination de η est la moins bonne, et diffère de 1.4 écarts standards. Ceci n'est pas une surprise, et nous avons déjà observé, dans l'étude des exposants critiques du modèle vectoriel, que la détermination de la dimension anormale n'est pas très précise en valeur relative (voir section 2.7.11). Toutefois, notons que l'erreur absolue est de l'ordre du pour cent. Aussi, lorsque les lois d'échelle sont utilisées pour déterminer, à partir de η et ν, les autres exposants critiques, l'erreur commise n'est pas trop grande (de l'ordre du pourcent pour β et γ).

Venons-en maintenant aux grandes valeurs de n. On a vu dans la section 3.5.4 que les séries perturbatives à l'ordre $1/n^2$ permettent d'obtenir des déterminations très précises des exposants critiques pour des valeurs suffisamment élevées de n. Nous avons reporté dans la table 3.8 ces résultats pour $n = 16$ et $n = 32$, valeurs de n pour lesquelles les erreurs sont probablement de l'ordre du pourcent. Ces valeurs des exposants critiques sont en très bon accord avec celles déduites des équations non perturbatives (les différences sont à nouveau de l'ordre du pourcent).

Finalement, nous avons représenté sur la figure 3.21 les exposants critiques η et ν en fonction de n, déduits des équations non perturbatives (représentés par des croix) et du développement en puissances de $1/n$ en trait plein), en dimension trois. On observe à nouveau un assez bon accord entre ces deux déterminations.



(a) ν



(b) η

FIG. 3.21 – Comparaison des exposants critiques déduits des équations non perturbatives (représentés par des croix), et du développement en puissances de $1/n$ au deuxième ordre (ligne continue), pour $d = 3$.

Tous les résultats obtenus pour $n > n_{\rm I}(d = 3)$ semblent montrer que l'approche considérée ici donne des résultats fiables et convergés en dimension trois.

3.9.3 $n < n_{\rm I}(d=3)$

Lorsque n est diminué, et devient plus petit que $n_{\rm I}(d = 3)$, le point fixe qui gouverne la transition de phase s'annihile avec un point fixe instable, tricritique. La situation est similaire à celle décrite dans le cadre de la théorie de perturbation au voisinage de $d = 4$, et le phénomène de disparition de point fixe est illustré sur la figure 3.16 page 91. En l'absence de point fixe des équations de flot, on conclut que la transition de phase n'est pas continue. Il faut alors réviser la signification des exposants critiques. Les études expérimentales et numériques mènent à la conclusion que dans une grande gamme de température, le système se comporte comme s'il présentait une transition continue. Sur ce domaine de température, les différentes observables suivent des lois de puissance. Les exposants trouvés expérimentalement et numériquement décrivent cette loi de puissance sur ce domaine restreint de température. On parle alors d'exposants effectifs, ou de pseudo-exposants. Il faut toutefois s'attendre à ce que les observables physiques dévient de ces lois de puissance lorsqu'on s'approche suffisamment de la température critique, puisque la transition est en fait du premier ordre.

L'absence de point fixe permet de comprendre les points soulignés lors de la discussion des résultats expérimentaux et numériques : le phénomène d'universalité, les lois d'échelle et la positivité de la dimension anormale peuvent tout à fait être violés si la transition n'est pas continue. Toutefois, on ne sait *a priori* plus expliquer l'existence des lois de puissance qui sont observées aussi bien numériquement qu'expérimentalement. D'autre part, les approches traditionnelles pour déterminer les exposants critiques associés à une transition ne peuvent plus être appliqués. Afin de déterminer des exposants critiques effectifs associés à cette transition, il faut avoir recours à une autre méthode.

Afin de clarifier ce problème, nous avons intégré numériquement des équations de flot des constantes de couplage déterminées par l'action (3.73), où nous avons fait la simplification supplémentaire : $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$. Ceci permet d'utiliser la fonction de régularisation (2.9), pour laquelle les fonctions seuil peuvent être calculées analytiquement, ce qui réduit considérablement le temps de calcul. D'autre part, comme nous le verrons dans la suite, les "exposants critiques" ne sont pas définis de façon univoque lorsque $n < n_{\rm I}(d)$. Nous ne cherchons donc pas à obtenir des déterminations très précises, mais plutôt à présenter un comportement qualitatif. Dans cet optique, la simplification précédente est justifiée.

Intégration des équations de flot

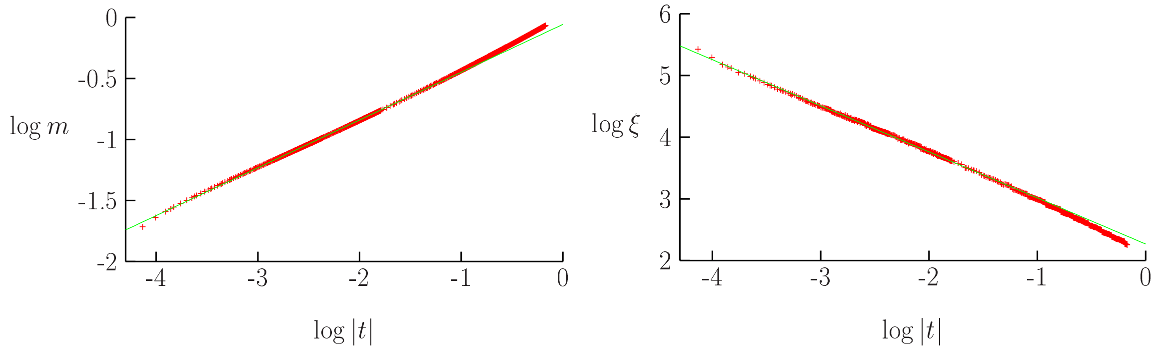
Nous avons intégré les équations de flot non perturbatives pour différentes conditions, correspondant à différentes températures. Nous avons typiquement choisi une famille de conditions initiales pour lesquelles la valeur de κ, déterminant la position du minimum augmente lorsque la température diminue, en accord avec le comportement observé dans une analyse de champ moyen[39]. Pour chaque condition initiale (chaque température), nous déduisons de l'intégration du flot l'aimantation, la longueur de corrélation et la renormalisation du champ du système. Nous pouvons ainsi étudier l'évolution de ces quantités avec la température. Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus dans ce cadre.

Commençons par décrire ce qui est observé dans le cas $n = 3$, correspondant au modèle de Heisenberg chiral.

• À titre d'exemple, choisissons une famille de conditions initiales pour lesquelles les constantes de couplage $\{\lambda, \mu, u_i, v_i\}$ sont indépendantes de la température, et κ varie linéairement avec la température ($\kappa = a - bT$, où a et b sont des constantes). Dans l'exemple considéré dans la suite, nous avons choisi $\lambda = 2$, $\mu = 0.5$ et $u_i = v_i = 0$. On observe alors, sur un assez grand domaine de température un comportement en loi de puissance de l'aimantation, de la longueur de corrélation, de la susceptibilité et de la renormalisation du champ. Dans la suite, on appelle cet intervalle de température le domaine "pseudo-critique", en gardant à l'esprit que la longueur de corrélation ne diverge pas sur cet intervalle. Sur la figure 3.22, on a représenté la dépendance de l'aimantation et de la longueur de corrélation en fonction de la température réduite $t = (T - T_c)/T_c$, en échelle logarithmique, et l'on peut vérifier que, sur un domaine s'étendant de -0.5 à -4, la dépendance est linéaire. La méthode numérique que nous utilisons ne nous permet pas d'étudier des températures plus proches de la température critique. Remarquons que la longueur de corrélation la plus grande que nous observons est de l'ordre de 10^5 fois la maille du réseau. Les équations de flot permettent donc d'obtenir des longueurs de corrélation très grandes, même en l'absence d'un point fixe. Expérimentalement et numériquement, il est très difficile de déterminer si un système présentant des longueurs de corrélation si grandes subit une transition de phase continue ou non. En faisant un ajustement des observables par une loi de puissance, sur le domaine pseudo-critique, il est possible d'extraire des exposants critiques effectifs. Dans l'exemple traité ici, on trouve $\beta = 0.39$, $\gamma = 1.47$, $\nu = 0.74$ et $\eta = 0.03$.

• Le comportement décrit précédemment est assez robuste aux changements opérés sur les conditions initiales : pour tout un ensemble de conditions initiales, on observe une grande plage de température sur laquelle la dépendance des observables suit une loi de puissance. Toutefois, les exposants effectifs varient avec les conditions initiales. Les valeurs que nous avons obtenues varient entre 0.30 et 0.42 pour β, et 0.56 et 0.75 pour ν. Ces domaines de variations sont reportés à titre indicatif. Nous ne pouvons en effet pas étudier l'ensemble des conditions initiales possibles, et il existe probablement des conditions initiales menant à des exposants critiques hors de ces domaines. Notons que les valeurs des exposants critiques trouvés expérimentalement pour les systèmes dilués, ou sous champ magnétique (voir table 3.2 page 82) et numériquement pour STA (voir table 3.5 page 85) se situent dans ces domaines de variation des exposants

[39]Il y a une grande part d'arbitraire dans le choix de la famille de conditions initiales. En effet la dépendance en température du minimum dépend des détails microscopiques du système, qui ne sont pas bien connues. De plus, chacune des constantes de couplage peut avoir sa dépendance propre avec la température.



(a) Aimantation

(b) Longueur de corrélation

Fig. 3.22 – Les logarithmes de différentes observables sont tracés en fonction du logarithme de la température réduite.

critiques. Nous avons observé des valeurs de β de l'ordre de 0.2 (observés pour VBr_2, VCl_2, STAR, $V_{3,2}$ et CC), mais sur des petites plages de température, de sorte que ces valeurs dépendent beaucoup du choix de la température critique utilisée dans la fonction d'ajustement.

• Si l'on varie plus fortement les conditions initiales, le domaine en température où les observables suivent une loi de puissance devient de plus en plus petit. On sort alors du régime où la transition peut être assimilée, sur un domaine fini de température, à une transition continue. Il devient d'autre part difficile de déterminer les exposants critiques effectifs, et ces derniers sont très sensibles au choix de la température critique, et à l'intervalle de température utilisés pour ajuster les données à une loi de puissance.

Passons maintenant au cas $n = 2$, correspondant au modèle XY chiral. On retrouve les caractéristiques principales décrites précédemment :

- Les observables suivent, sur un domaine assez grand de température un comportement en loi de puissance et il est possible d'extraire des exposants effectifs.
- Les exposants critiques effectifs varient lorsque les conditions initiales sont changées. On trouve ainsi $0.25 < \beta < 0.38$ et $0.47 < \nu < 0.58$.
- À nouveau, les résultats expérimentaux et numériques se trouvent pour la plupart dans l'intervalle de variation des exposants critiques (voir les figures 3.1 page 76, 3.3 page 83 et 3.4 page 85). Signalons que pour tout un jeu de conditions initiales, on arrive à reproduire les données expérimentales de Dysprosium et Holmium.
- Lorsque l'on change beaucoup les conditions initiales, le domaine pseudo-critique devient de plus en plus petit, et il devient difficile de déterminer des exposants critiques.

La différence principale avec le cas $n = 3$ est que le domaine pseudo-critique est génériquement plus petit. Les exposants critiques sont également plus sensibles aux variations des conditions initiales, et le domaine de constantes de couplage où les quantités thermodynamiques suivent de belles lois de puissance est plus petit.

Inversement, si l'on augmente n, en passant par exemple de $n = 3$ à $n = 4$, on observe le comportement inverse. Le domaine pseudo-critique est génériquement plus grand, les pseudo-exposants sont moins sensibles aux variations des conditions initiales, et le domaine de constantes de couplage conduisant à de bonnes lois de puissance est plus grand. Dans la limite où n tend vers $n_{\text{I}}(d = 3)$, un point fixe apparaît, de sorte que le domaine pseudo-critique comprend toutes les températures, jusqu'à la température critique. Les exposants critiques sont alors définis de façon non ambiguë, et deviennent indépendants des conditions initiales, pour peu que cette condition initiale appartienne au bassin d'attraction du point fixe.

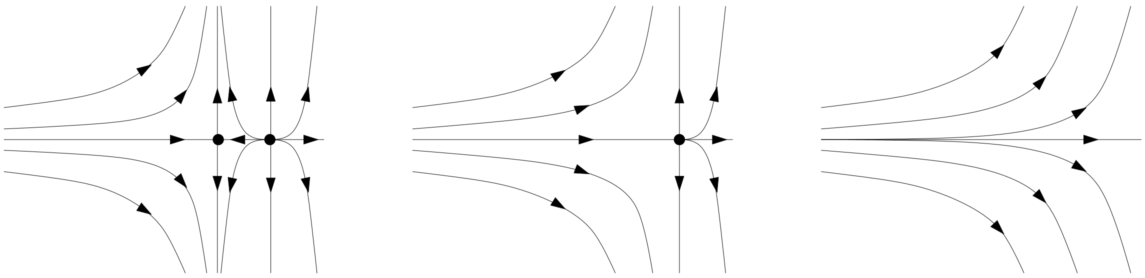
Point fixe complexe

Zumbach [Zum93] a proposé une explication à la présence de lois de puissance pour $n < n_{\text{I}}(d = 3)$. Celle ci est basée sur l'observation que lorsqu'on diminue n vers $n_{\text{I}}(d)$, les points fixes chiral et antichiral (voir figure 3.16 page 91) s'annihilent. Pour $n < n_{\text{I}}(d)$, les deux points fixes deviennent complexes : il existe toujours des valeurs des constantes de couplage annulant les équations de flot, mais ces valeurs sont complexes. Les points fixes complexes ne correspondent pas à une situation physiquement acceptable, et le système ne présente donc pas de divergence de la longueur de corrélation. Toutefois, le comportement des fonctions β pour des constantes de couplage réelles est dominé par la présence des point fixes complexes : au voisinage des points fixes complexes, les fonctions β sont petites, de sorte que le flot dans cette région est très lent. Les trajectoires du groupe de renormalisation passant au voisinage de cette région peuvent y rester assez longtemps, de sorte que la longueur de corrélation est grande.

D'autre part, si nous étudions les fonctions β assez loin des points fixes, il est impossible de différencier les situations où il existe, et où il n'existe pas de point fixe. Ainsi, nous avons représenté sur la figure 3.23 les trajectoires du flot au voisinage des points fixes. Nous observons que les trajectoires partant de la gauche du point fixe stable, qui passent suffisamment loin des points fixes sont très similaires, que n soit supérieur, égal ou inférieur à $n_{\text{I}}(d)$. Seules les trajectoires passant près du point fixe peuvent discriminer ces trois cas. Ceci a pour conséquence que pour $n < n_{\text{I}}(d)$, seules les quantités thermodynamiques pour des températures très proches de la température critique sont sensibles à l'absence de point fixe. En revanche, les propriétés à plus haute température *imitent* le comportement d'une transition de phase continue.

Il faut ajouter à la discussion précédente que plus les parties imaginaires des coordonnées des points fixes complexes sont petites, plus les propriétés du système ressemblent à une transition du second ordre. Ceci permet de comprendre pourquoi lorsque n augmente, tout en restant inférieur à $n_{\text{I}}(d)$, le domaine pseudo-critique s'agrandit et les exposants critiques sont moins sensibles aux variations des conditions initiales.

Toutefois, ces considérations ne sont pas d'un grand intérêt pratique. En l'absence de point fixe réel, Zumbach utilise un critère permettant de déterminer un point où



(a) $n > n_{\mathrm{I}}(d)$ (b) $n = n_{\mathrm{I}}(d)$ (c) $n < n_{\mathrm{I}}(d)$

FIG. 3.23 – Lignes de flot au voisinage des points fixes chiral et antichiral, pour des valeurs de n supérieure, égale et inférieure à la valeur critique. L'axe vertical correspond à la direction pertinente de la température, et l'axe horizontal aux constantes de couplage de "φ^4".

le flot est le plus lent. Il identifie ce point à un pseudo-point fixe, et en étudiant les fonctions β dans son voisinage, il en déduit un jeu unique d'exposants critiques. Ceci ne permet pas de discuter la dispersion des résultats expérimentaux. D'autre part, si le critère utilisé permet effectivement de déterminer un pseudo-point fixe pour $n = 3$, il échoue pour $n = 2$, alors que des lois de puissance sur des grands domaines de température sont observés lorsqu'on intègre les équations de flot non perturbatives.

Conclusion

Le comportement des observables avec la température, que nous avons obtenu par intégration des équations de flot non perturbatives est compatible avec les résultats expérimentaux et numériques pour les cas physiques $n = 2$ et $n = 3$. Les comportements en lois de puissance sont observés sur de grandes plages de température, et les déviations à cette loi sont observés à des températures très proches de la température critique, région qui est très difficilement atteinte expérimentalement. Comme nous l'avons souligné précédemment, en l'absence de point fixe, il n'y a plus de raison pour que l'universalité se manifeste, pour que la dimension anormale soit positive et pour que les lois d'échelle soient satisfaites. D'autre part, nous pouvons trouver une explication simple concernant le fait que certains systèmes appartenant naïvement à la classe d'universalité du modèle XY chiral présentent une transition du premier ordre (voir la table 3.5 page 85). On peut en effet penser que les conditions initiales correspondant à ces systèmes ne permettent pas aux trajectoires du groupe de renormalisation de passer suffisamment près des points fixes complexes pour en subir l'influence. Finalement, nous pouvons comprendre pourquoi le modèle de Heisenberg chiral présente une transition plus similaire à une transition de phase du second ordre que le modèle XY chiral. En effet, plus les valeurs de n sont grandes, plus l'influence des points fixes complexes sur le domaine physique est grand, et plus la transition imite une transition continue.

3.9.4 Résumé et conclusions

En utilisant les équations de flot non perturbatives, nous avons déterminé la courbe $n_{\rm I}(d)$ qui sépare les régions de transition du premier et du second ordre. Celle-ci est proche d'une détermination indépendante, obtenue en imposant aux résultats de la série perturbative en $\varepsilon = 4 - d$ à trois boucles la contrainte $n_{\rm I}(d = 2) = 2$. En particulier, les deux méthodes conduisent à une valeur très proches : $n_{\rm I}(d = 3) \simeq 5.3$. Pour $n = 16$ et $n = 32$, les exposants critiques sont en bon accord avec ceux déduits des premiers termes de la série perturbative en $1/n$. Pour $n = 6$, les exposants critiques sont en bon accord avec les résultats numériques. Tous ces résultats donnent une bonne indication sur la convergence de notre troncation.

Pour des valeurs de n plus petites que $n_{\rm I}(d = 3)$, nous avons intégré les équations de flot, et avons observé des lois de puissance sur des domaines de température assez grands. Les exposants critiques effectifs varient avec les conditions initiales, ce qui est en accord avec les données expérimentales et numériques. En outre les exposants effectifs déterminés expérimentalement et numériquement appartiennent dans la plupart des cas aux domaines de variation des exposants obtenus en intégrant les équations de flot non perturbatives (voir toutefois plus bas). Finalement, l'absence de point fixe permet d'expliquer la violation des lois d'échelle, la négativité de la dimension anormale et la variation des exposants critiques de système à système qui est observé expérimentalement et numériquement.

Nous concluons donc que les équations non perturbatives permettent d'obtenir une vision cohérente des transitions de phase des antiferromagnétiques triangulaires empilés et des hélimagnétiques. Notons toutefois que pour $n = 2$, nous n'avons pas trouvé de conditions initiales menant à des β aussi petit que 0.21 (voir table 3.1 page 76), mesurés dans $CsMnBr_3$, et pour $n = 3$ des η de l'ordre de -0.1 qui sont observés dans STAR, CC et $V_{2,2}$ (voir table 3.5 page 85). Un autre inconvénient de la méthode présentée ici est que l'on n'est pas capable d'étudier précisément la discontinuité du paramètre d'ordre, lors de la transition de phase. Pour voir cet effet, il faudrait calculer l'évolution du potentiel $U_k(\rho, \tau)$ (voir équation (3.51)) sans effectuer de développement en puissances du champ. Ceci permettrait de déterminer si le minimum du potentiel considéré dans notre étude, présente effectivement une énergie plus basse que la configuration à champ nul.

3.9.5 Comparaison avec les approches perturbatives resommées

Pour terminer ce chapitre sur les systèmes frustrés, nous discutons les résultats obtenus en dimension trois par d'autres méthodes, et les comparons aux résultats expérimentaux et numériques, ainsi qu'aux résultats obtenus à l'aide des équations non perturbatives.

Deux types d'approches ont été menées pour étudier les propriétés critiques en trois dimensions des systèmes considérés ici. La première consiste à utiliser les séries perturbatives obtenues par une analyse de type Landau-Ginzburg en dimension $d = 4 - \varepsilon$. La seconde se base sur les séries perturbatives en constantes de couplages, obtenues directement en dimension trois. Dans les deux cas, les séries sont seulement asymptotiquement convergentes, et il est nécessaire d'utiliser des techniques de resommation de séries (comme par exemple la resommation de Padé-Borel) afin d'extraire des résultats quantitatifs.

Ces deux procédures ont été utilisées avec succès dans le cas du modèle vectoriel, et permettent, dans ce cas, de déterminer avec une grande précision les exposants critiques. La situation est beaucoup moins claire dans le modèle considéré ici. Ainsi, les séries à trois boucles obtenues en dimension $d = 4 - \varepsilon$ n'ont pas un bon comportement, et il semble très difficile d'en extraire des résultats fiables [ASV95]. Une estimation de la valeur $n_{\mathrm{I}}(d = 3)$ par cette méthode conduit à $n_{\mathrm{I}}(d = 3) = 3.39$ [ASV95]. La deuxième approche semble être mieux contrôlée, et consiste à calculer les séries perturbatives directement en trois dimensions. Les séries à trois boucles [AS94][LSD$^+$00] et à six boucles [PRV01a] ont été obtenues. Les résultats à trois boucles conduisent à $d_{\mathrm{I}}(d = 3) = 3.91$. Toutefois, Loison *et al.* remarquent que ces séries ont un comportement très irrégulier. En particulier, l'étude des fonctions β au voisinage du point fixe montre que les termes successifs de ces séries ne sont pas monotonement décroissants, et le signe de ces termes semble irrégulier. Ceci se traduit par le fait que leur détermination des exposants critiques pour $n = 6$ n'est pas en accord avec les résultats numériques. Les résultats obtenus pour $n = 6$ sont reportés sur la table 3.9, et l'on observe un franc désaccord avec les résultats numériques (voir figure 3.6 page 85). Ainsi, l'exposant α diffère de plus de 11 écarts standards de la valeur trouvée numériquement. Les valeurs obtenues pour $n = 16$ (par exemple $\nu \simeq 0.82$ sont également assez significativement différentes de celles obtenues par les autres méthodes, et reportées à la table 3.8 page 117.

n	α	β	γ	ν	η
6	0.275	0.302	1.121	0.575	0.0507

Tab. 3.9 – Exposants critiques pour le modèle $\frac{O(6)\times O(2)}{O(4)\times O(2)}$ obtenus par resommation des séries perturbatives à trois boucles, calculées directement en dimension trois [LSD$^+$00].

Les résultats déduits des séries à six boucles [PRV01a] semblent être mieux contrôlées, et sont en grande partie en opposition avec ceux trouvés grâce aux équations non perturbatives. Pour des valeurs suffisamment grandes de n, Pelissetto *et al.* trouvent un point fixe, et les exposants critiques associés sont reportés dans la table 3.8 page 117. Rappelons que les termes de la série en $1/n$ semblent décroître assez rapidement (pour $n = 16$, chaque terme est dix fois plus petit que le précédent), de sorte que l'estimation des exposants critiques déduite des séries en $1/n$ est probablement très bonne, et l'erreur sur ν et η est probablement de l'ordre de 1%. On remarque que la détermination des exposants critiques déduits des équations non perturbatives sont en meilleur accord avec les résultats du $1/n$, que les résultats obtenus à partir des séries à six boucles. D'autre part, les barres d'erreur données par Pelissetto *et al.* sont trop petites pour être en accord avec les résultats du $1/n$ [40]. Lorsque l'on décroît n, le point fixe régissant la transition de phase disparaît, pour des valeurs de n plus grandes que sept. La théorie à six boucles prévoit donc une transition faiblement du premier ordre pour $n = 6$, en désaccord avec les simulations numériques.

Lorsqu'on décroît encore n, un nouveau point fixe apparaît. Les auteurs de [PRV01a] affirment que ce point fixe est non-perturbatif, et n'est pas relié par continuité aux points fixes observés au voisinage de la dimension quatre. Celui-ci persiste pour $n = 3$ et $n = 2$, et cette approche prédit donc une transition du second ordre dans les cas physiques correspondant aux modèles XY frustré et Heisenberg frustré. Les exposants associés à ces points fixes sont reportés dans la table 3.10.

n	α	β	γ	ν
2	0.29(9)	0.31(2)	1.10(4)	0.57(3)
3	0.35(9)	0.30(2)	1.06(5)	0.55(3)

TAB. 3.10 – Exposants critiques déduits des séries perturbatives à six boucles en dimension trois pour les modèles XY frustré et Heisenberg frustré [PRV01a].

Les exposants critiques trouvés pour le modèle de Heisenberg frustré sont en assez bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus pour $CsNiCl_3$ et $CsMnI_3$ sous champ magnétique et pour le système dilué $CsMn(Br_{0.19}I_{0.81})_3$ (voir 3.2 page 82). L'accord avec les exposants critiques de STA est moins bon (voir table 3.5 page 85). En particulier, la valeur de γ diffère de plus de deux écarts standards de la valeur trouvée numériquement : $\gamma \simeq 1.175$.

En revanche, et contrairement à ce qu'affirment Pelissetto *et al.* [PRV01a], les exposants critiques déterminés pour le modèle XY frustré ne sont compatibles avec aucun jeu d'exposants critiques (voir les tables 3.1 page 76, 3.3 page 83 et 3.4 page 85). On remarquera en particulier que leur détermination de β est significativement plus grande que celle obtenue pour les antiferromagnétiques triangulaires empilés et pour les simulations numériques sur STA (qui indiquent $\beta \simeq 0.24$), et significativement plus grande que les résultats obtenus pour les hélimagnétiques (compatibles avec $\beta \simeq 0.39$). Ceci n'est en fait pas une surprise puisque nous avons vu dans la section 3.4.1 que les exposants critiques du modèle XY frustré ne sont pas compatibles avec une transition

[40] La méthode de resommation utilisée dépend de deux paramètres libres. En variant ces paramètres, les auteurs déterminent un intervalle de variation des exposants critiques, et déduisent les barres d'erreur de telle sorte que l'ensemble des exposants critiques se trouvent à moins d'un écart standard de la valeur moyenne.

de phase du second ordre, et donc pas compatibles avec l'existence d'un point fixe des équations du groupe de renormalisation. Notons également que les barres d'erreur sur les résultats obtenus par resommation des séries perturbatives sont très grandes. Citons à titre d'exemple les résultats obtenus par la même technique de resommation, pour le modèle d'Ising en dimension trois : $\beta = 0.3270 \pm 0.0015$, $\nu = 0.6310 \pm 0.0015$ et $\eta = 0.0375 \pm 0.0025$. Ces barres d'erreur sont dix fois plus petites que dans les systèmes frustré. Ceci indique clairement que les techniques de resommation convergent beaucoup moins bien dans le cas qui nous intéresse ici [41].

Il est très remarquable que la théorie de perturbation à six boucles ne permette pas d'obtenir le bon comportement critique de la théorie. Ceci peut être imputé à plusieurs causes :

• Pelissetto *et al.* indiquent que la théorie n'est pas Borel-sommable au point fixe, ce qui remet en cause la convergence de cette approche [42].

• Il se peut que le point fixe trouvé ici existe effectivement, mais que son bassin d'attraction ne contienne aucune des conditions initiales correspondant aux systèmes physiques. Dans ce cas, la théorie de perturbation perd tout caractère prédictif, puisqu'il parait impossible de déterminer le bassin d'attraction d'un point fixe, et les conditions initiales associées à un système physique.

• Il est possible finalement que le système soit effectivement gouverné par le point fixe de Pelissetto *et al.* , mais que les corrections aux comportements en loi de puissance soient très importantes. Dans ce cas, les exposants obtenus expérimentalement et numériquement seraient des exposants effectifs pour les domaines de température accessibles expérimentalement, mais tendraient vers les valeurs reportées dans la table 3.10 au fur et à mesure que l'on étudierait des températures proches de la température critique. Toutefois, il n'existe pas à notre connaissance d'indication de ce phénomène dans la littérature des systèmes frustrés. De plus, dans les systèmes qui ont été plus abondamment étudiés, les corrections aux lois d'échelle ne semblent pas affecter assez fortement la détermination des exposants critiques pour que, par exemple, la dimension anormale devienne positive. Ainsi, dans le modèle d'Ising, l'omission de ces corrections semblent induire, dans les domaines de température expérimentalement accessibles, une erreur de quelques pourcents (voir par exemple [BLH95]). Finalement, on a observé que la dimension anormale obtenue à l'aide des lois d'échelle était systématiquement négative pour les antiferromagnétiques empilés et le modèle STA, et il est assez improbable que cette tendance soit attribuable à des corrections aux lois d'échelle.

[41] La mauvaise convergence des techniques de resommation est probablement due à la présence de deux termes d'interaction en "φ^4" dans le lagrangien de la théorie. Les techniques de resommation utilisées avec succès dans le modèle vectoriel doivent être généralisées. On discute ce problème plus en détail dans le prochain chapitre, lors de l'étude du modèle d'Ising en présence de désordre, qui est également décrit par un lagrangien ayant deux termes d'interaction.

[42] Notons que dans le cas du modèle de Heisenberg frustré, la série n'est également pas Borel-sommable au point fixe.

3.10 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés critiques des antiferromagnétiques empilés et des hélimagnétiques. Ces deux classes de matériaux présentent le même schéma de brisure de symétrie à la transition de phase, et le phénomène d'universalité nous conduit donc à étudier ces deux systèmes simultanément. Le paramètre d'ordre de cette transition de phase est une matrice 3×2 lorsque l'anisotropie dans l'espace des spins n'est pas pertinente, et une matrice 2×2 si l'anisotropie confine les spins dans un plan, et les schémas de brisure de symétrie sont respectivement $SO(2) \times \mathbb{Z}_2 \to 1$ et $SO(3) \times SO(2) \to SO(2)$. L'étude des résultats expérimentaux et numériques semblent indiquer que l'universalité dans ces systèmes n'est pas vérifiée. D'autre part, nous avons observé que les jeux d'exposants critiques du modèle XY frustré n'étaient pas compatibles avec une transition du second ordre. Nous avons en particulier noté que les lois d'échelle étaient violées, ou que la dimension anormale obtenue grâce aux lois d'échelle était négative, ce qui est interdit par la décomposition spectrale de Källen-Lhemann.

Nous avons ensuite décrit les différentes approches perturbatives de cette théorie. L'approche de Landau-Ginzburg-Wilson prédit une valeur critique de n : $n_{\rm I}(d) = 21.8 - 23.4(4-d) + o\left((4-d)^2\right)$. Pour des valeurs de n supérieures à $n_{\rm I}(d)$, les équations du groupe de renormalisation admettent un point fixe, et la transition est du second ordre. Lorsqu'on diminue n en-dessous de cette valeur critique, le point fixe disparaît (et s'annihile avec un point fixe tricritique). La transition est alors du premier ordre. Le modèle a aussi été étudié dans le cadre du modèle σ non linéaire. On trouve alors un point fixe stable pour toutes les valeurs de n (strictement) supérieures à deux. Enfin, les résultats obtenus dans un développement en puissances de $1/n$ ont été discutés. Les exposants critiques obtenus dans ces différents schémas perturbatifs concordent, mais ne permettent pas de déterminer la physique critique en dimension trois, pour les cas $n = 2$ et $n = 3$ d'intérêt physique.

Nous avons traité cette théorie à l'aide de l'équation exacte du groupe de renormalisation. Dans la troncation de l'action effective la plus simple, ne dépendant que de cinq constantes de couplage, nous avons montré que les exposants critiques coïncident, à l'ordre dominant avec ceux trouvés grâce aux théories de perturbation. Pour étudier les équations en trois dimensions, nous avons utilisé une troncation plus riche. Nous avons testé la convergence des résultats en comparant les exposants ainsi déterminés avec ceux déduits de la série en $1/n$[PRV01b] pour des valeurs assez grandes de n, et avec ceux obtenus par simulation numérique pour $n = 6$[LSD$^+$00]. Dans les deux cas, nous trouvons un bon accord. La détermination de la valeur critique de n conduit à $n_{\rm I}(d = 3) = 5.3$, qui est en bon accord avec une détermination utilisant à la fois les résultats de la théorie de perturbation à trois boucles au voisinage de $d = 4$ et l'hypothèse $n_{\rm I}(d = 2) = 2$[PRV01b].

Pour des valeurs de n plus petites que $n_{\rm I}(d)$, nous n'avons trouvé aucun point fixe des équations de flot. La transition est par conséquent du premier ordre. Ceci permet de comprendre les caractéristiques inhabituelles des exposants critiques (lois d'échelle violées, dimension anormale négative,...). En intégrant les équations de flot numériquement, nous avons relié les observables thermodynamiques (aimantation, susceptibilité, etc.) à la température. Nous avons observé assez génériquement que ces quantités ont un comportement en loi de puissance, sur un intervalle fini en température. Ce comportement est à nouveau compatible avec les études numériques et expérimentales, qui permettent de mesurer des exposants critiques effectifs pour des gammes de température finies.

Des conclusions assez différentes ressortent de l'analyse de la théorie par les séries perturbatives à six boucles. Dans ce cas, un point fixe stable est observé pour $n = 2$ et $n = 3$. Notons toutefois que les exposants critiques associés au modèle XY frustré sont difficilement compatibles avec les résultats expérimentaux et numériques. Les résultats obtenus à partir des équations de flot non perturbatives sont plus convaincants, et permettent de reproduire dans un cadre unique la quasi totalité des résultats connus sur ces systèmes, sans invoquer un nouveau point fixe non perturbatif, et de très fortes corrections aux lois d'échelles.

Nous avons proposé[TDM01] un certain nombre de tests expérimentaux et numériques qui permettent de tester nos prédictions plus précisément. Du point de vue expérimental, il serait très important d'obtenir des déterminations des exposants critiques γ et ν, en particulier pour les systèmes Heisenberg chiraux (comme les systèmes sous champ magnétique, et les systèmes dilués. En l'absence de ces données, nous ne pouvons pas savoir si les lois d'échelle sont satisfaites ou non. Il serait également intéressant d'avoir une détermination plus précise de α pour les systèmes $CsMnBr_3$, $CsNiCl_3$ et $CsMnI_3$. Ces résultats sont pour l'instant marginalement compatibles entre eux. S'ils s'avèrent être significativement différents, ceci serait une bonne indication que l'universalité n'est pas présente dans ces systèmes, et favoriserait le scénario d'une transition du premier ordre. Du point de vue numérique, il serait intéressant d'étudier une famille de modèles, paramétrés par une variable, permettant d'interpoler continûment entre STA et STAR [43]. Si la transition de phase de STA est effectivement continue, comme l'indique l'étude des séries perturbatives à six boucles, les exposants critiques doivent être indépendant de ce paramètre sur une plage finie. Les exposants doivent ensuite varier brusquement pour atteindre les exposants critiques de STAR. En revanche, si la transition de STA est faiblement du premier ordre, on s'attend plutôt à observer une variation continue des exposants critiques avec le paramètre.

Un certain nombre de questions importantes concernant les systèmes considérés ici restent en suspens. En particulier, il serait intéressant de quantifier le rôle des défauts topologiques des modèles XY frustré et d'Heisenberg frustré. Sont-ils responsables de la déstabilisation du point fixe stable en dimension trois ? En dimension deux, des simulations numériques montrent que, au-delà d'une certaine température, la présence de défauts topologiques fait chuter la longueur de corrélation. Sommes-nous capables

[43] Ceci peut être mené à bien en ajoutant au Hamiltonien de STA un terme favorisant les configurations où les spins sur une plaquette pointent à 120° les uns des autres. En variant la constante de couplage de zéro à l'infini, on passe de l'absence de contrainte (STA), à une contrainte imposée de façon stricte (STAR).

de reproduire cet effet à partir des équations de flot non perturbatives ? Ces questions ne se limitent pas aux systèmes étudiés ici, mais sont en fait beaucoup plus générales. Il serait intéressant d'avoir une méthode systématique pour traiter le rôle des excitations topologiques.

Un problème certainement plus important du point de vue expérimental est le rôle des impuretés dans ce système. On remarque en effet que les valeurs de α dans les matériaux considérés ici sont fortement positives. En invoquant le critère de Harris, on s'attend donc à ce que le désordre soit fortement pertinent. Ceci est corroboré par une étude expérimentale, qui considère l'ajout d'impuretés non-magnétiques dans un système antiferromagnétique XY empilé. On observe alors une brusque variation de α. Toutefois, les dilutions considérées sont trop faibles (de l'ordre de 5%) pour que l'on puisse observer le comportement du système désordonné, et α reste positif dans ce domaine de dilution. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de détermination d'un Hamiltonien effectif, permettant d'étudier le système en présence d'impuretés magnétiques. Un phénomène très intéressant du point de vue expérimental peut émerger de cette étude. En effet, on sait que la présence d'impuretés dans le système a tendance à stabiliser les transitions du second ordre. Ainsi, il est probable que la valeur critique $n_{\rm I}(d)$ diminue en présence de désordre. Dans ce cas, on peut imaginer que les systèmes physiques correspondant à $n = 2$ et $n = 3$ admettent un véritable point fixe stable, et que les transitions des systèmes désordonnés soient continues, caractérisés par de nouveaux exposants critiques.

3.11 Modèle principal chiral

3.11.1 Introduction

Pour clore ce chapitre, nous discutons le lien entre les modèles $\frac{O(3)\times SO(3)}{O(3)}$ et $\frac{O(4)}{O(3)}$. Rappelons brièvement la discussion que nous avons mené dans la section 3.5.3. Dans le cadre du modèle σ non linéaire perturbatif, les propriétés critiques d'un système sont entièrement décrites par les propriétés locales de la variété du paramètre d'ordre, et par conséquent indépendantes des propriétés globales, topologiques de cette variété. Or, nous avons observé que les variétés $\frac{O(3)\times SO(3)}{O(3)}$ et $\frac{O(4)}{O(3)}$ sont localement isomorphes, de sorte que ces deux modèles sont équivalent à tous les ordres de la théorie de perturbation. Toutefois, les propriétés topologiques de ces deux systèmes diffèrent. En particulier le modèle $\frac{O(3)\times SO(3)}{O(3)}$ présente des défauts topologiques, alors que $\frac{O(4)}{O(3)}$ n'en a pas. Nous avons proposé que ceci pouvait être la cause de la différence de comportement des deux modèles au voisinage de $d = 4$, où le modèle $\frac{O(4)}{O(3)}$ admet un point fixe du groupe de renormalisation, alors que $\frac{O(3)\times SO(3)}{O(3)}$ n'en a pas.

Dans le but d'étudier la relation entre ces deux modèles, nous considérons ici le modèle principal chiral. Une réalisation microscopique de ce modèle est donnée par un ensemble de matrices de rotations $R_i \in SO(3)$, situées sur les sites i d'un réseau. Les matrices R_i satisfont les contraintes :

$$ {}^tR_i\, R_i = \mathbb{1} \tag{3.76a}$$
$$ \det R_i = 1 \tag{3.76b}$$

sur chaque site du réseau. Les interactions sont décrites par le Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathrm{Tr}\,\{{}^tR_i\, R_j\}, \tag{3.77}$$

où la constante de couplage J est positive, et où la somme doit être effectuée sur l'ensemble des paires de sites plus proches voisins. En utilisant la cyclicité de la trace, on vérifie aisément que le Hamiltonien précédent est invariant sous :

$$R_i \to U.R_i.V, \tag{3.78}$$

où U et V sont des matrices de $SO(3)$. Le sous-groupe de symétrie résiduelle dans l'état fondamental est $SO(3)_{\mathrm{diag}}$, correspondant, comme d'habitude, à l'opération d'une rotation à droite, compensée par une rotation à gauche. Le schéma de brisure de symétrie est donc $SO(3) \times SO(3) \to SO(3)_{\mathrm{diag}}$.

Dans le cadre de la théorie de Landau-Ginzburg, ce modèle peut être étudié en remplaçant les contraintes rigides (3.76) par des contraintes régulières, représentées par un potentiel. Remarquons que pour imposer la contrainte (3.76b) sur le déterminant, il faut mettre dans la fonctionnelle de Landau-Ginzburg un terme de la forme $\det \varphi$. Lors du traitement en champ moyen de la théorie, ce terme cubique en champs est responsable d'une transition du premier ordre.

Cette théorie est donc difficile à étudier dans une approche de type Landau-Ginzburg. Nous avons donc considéré une théorie légèrement plus simple, qui ne souffre pas de ce problème. On obtient cette nouvelle théorie en relaxant la contrainte (3.76b), et en la remplaçant par :

$$\det R_i = \pm 1. \tag{3.79}$$

Ceci revient à choisir sur le réseau, des matrices R_i appartenant à $O(3)$ au lieu de $SO(3)$. Le schéma de brisure de symétrie devient :

$$O(3) \times O(3) \to O(3) \tag{3.80}$$

En l'absence de la contrainte sur le déterminant, nous n'avons plus à considérer le terme cubique en champs, et l'approche de Landau-Ginzburg en champ moyen mène à la conclusion de l'existence d'une transition de second ordre dans le système.

Le paramètre d'ordre associé à cette nouvelle théorie est toutefois un peu différent de celui qu'on aurait voulu étudier. Toutefois, cette différence réside dans l'existence d'une excitation de type Ising dans la nouvelle théorie, excitation dont on peut espérer qu'elle ne joue pas de rôle dans la physique critique au voisinage de la dimension deux. En effet, au voisinage de la dimension critique inférieure, la physique critique apparaît à très basse température, et les excitations de type Ising ne peuvent donc pas être excitées.

3.11.2 Équations de flot

Nous avons étudié la théorie associée au schéma de brisure de symétrie (3.80) à l'aide de l'équation exacte régissant l'évolution de l'action effective courante Γ_k. La théorie est décrite en terme d'un champ φ émanant des variables $R_i \in O(3)$ sur le réseau. Le champ φ est donc une matrice 3×3 non contrainte. Nous considérons une troncation très simple, où seuls les termes les plus pertinents sont considérés :

$$\Gamma_k = \int d^dx \left\{ \frac{1}{2} Z_k \ \partial_\mu \varphi_{ab} \partial_\mu \varphi_{ab} + \frac{\lambda}{12} (\rho - 3\kappa)^2 + \mu\tau \right\} \tag{3.81}$$

φ_{ab} représente les éléments de la matrice 3×3 (a et b prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, 3\}$), et ρ et τ sont deux combinaisons des champs invariants sous le groupe de symétrie $O(3) \times O(3)$ [44] :

$$\begin{cases} \rho = \ \mathrm{Tr}\ {}^t\varphi.\varphi \\ \tau = \dfrac{1}{6} \left(\mathrm{Tr}\ {}^t\varphi.\varphi \right)^2 - \dfrac{1}{2} \mathrm{Tr}\ \left({}^t\varphi.\varphi \right)^2 \end{cases} . \tag{3.82}$$

La troncation considérée ici permet, comme nous le montrons dans la suite de retrouver, à l'ordre dominant, les résultats perturbatifs obtenus au voisinage de $d = 2$ par le modèle σ non linéaire, et au voisinage de $d = 4$ grâce au développement en constantes de couplage.

Les équations de flot non perturbatives sont obtenues en utilisant la méthode décrite dans a section 3.7. Nous obtenons ainsi [TMD99] [45] :

$$\frac{d\kappa}{dt} = -\ (d - 2 + \eta)\kappa + 2v_d \left[2\ l_1^d(0) + 2\ l_1^d(2\lambda\kappa) + \frac{10}{3\lambda}(\lambda - 4\mu)\ l_1^d(-4\mu\kappa) \right] \tag{3.83a}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = (d - 4 + 2\eta)\lambda + 2v_d \left[2\ \lambda^2\ l_2^d(0) + 6\lambda^2\ l_2^d(2\lambda\kappa) + \frac{10}{3}(\lambda - 4\mu)^2\ l_2^d(-4\mu\kappa) \right] \tag{3.83b}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} =& (d - 4 + 2\eta)\mu - 2v_d\ \mu \left[\frac{3}{2\kappa}\ l_1^d(0) + 21\mu\ l_2^d(-4\mu\kappa) + \mu\ l_2^d(0) + \right. \\ & \left. + \frac{4(\lambda - \mu)}{(\lambda + 2\mu)\kappa} l_1^d(2\lambda\kappa) - \frac{(11\lambda - 2\mu)}{2(\lambda + 2\mu)\kappa} l_1^d(-4\mu\kappa) \right] \end{aligned} \tag{3.83c}$$

$$\eta = -\ \frac{d \log Z}{dt} = \frac{8v_d}{3\,d} \left[20\mu^2\kappa\ m_{2,2}^d(0, -4\mu\kappa) + 4\lambda^2\kappa\ m_{2,2}^d(0, 2\lambda\kappa) \right] \tag{3.83d}$$

[44] Notons qu'il existe maintenant trois combinaisons indépendantes des champs invariants sous le groupe de symétrie $O(3) \times O(3)$, au lieu de deux pour $O(3) \times O(2)$. Toutefois ce troisième invariant est d'ordre "φ^6", et nous ne le considérons pas dans cette troncation. Plus généralement, la théorie $O(n) \times O(m)$ avec $n \geq m$ admet m invariants indépendants. Ces invariants sont d'ordre φ^2, φ^4, ..., φ^{2m}.

[45] Les équations présentées ici sont légèrement différentes de celles de [TMD99]. Ceci vient du fait que les fonctions seuil ne sont pas définies de la même façon.

Nous commençons la discussion de ces équations de flot en retrouvant les développements perturbatifs au voisinage des dimensions critiques supérieure et inférieure.

3.11.3 Lien avec le modèle σ non linéaire

Au voisinage de la dimension critique inférieure, la physique critique se déroule à basse température. Nous avons vu à plusieurs reprises que le développement à basse température est équivalent, avec nos conventions, à un développement en puissances de $1/\kappa$. Nous développons donc les équations (3.83) à l'ordre dominant. En utilisant les comportements des fonctions seuil donnés dans la section (A.3) nous déduisons de (3.83d) :

$$\eta = \frac{3}{8\pi\kappa} + o\left(\frac{1}{\kappa^2}\right). \tag{3.84}$$

De même l'équation, (3.83a) donne :

$$\frac{d\kappa}{dt} = -(d-2+\eta)\kappa + \frac{1}{2\pi}. \tag{3.85}$$

En effectuant la substitution $\kappa \to 1/T$, on retrouve la fonction β obtenue à une boucle dans le cadre du modèle σ non linéaire [Pol75]. En combinant les deux résultats précédents, nous déduisons :

$$\frac{d\kappa}{dt} = -\varepsilon\kappa + \frac{1}{8\pi} \tag{3.86}$$

La valeur de point fixe de κ est donc :

$$\kappa^\star = \frac{1}{8\pi\varepsilon}, \tag{3.87}$$

d'où l'on tire :

$$\eta = 3\varepsilon, \tag{3.88}$$

en accord avec le résultat (3.32) pour $n = 3$. L'exposant critique ν est obtenu en diagonalisant la matrice de stabilité. On obtient ainsi $\nu = 1/\varepsilon$, qui coïncide, à l'ordre dominant, avec le résultat du modèle σ non linéaire (3.31).

3.11.4 Lien avec le développement en constantes de couplage

Développons maintenant les équations d'évolution (3.83) en puissances de λ et μ à l'ordre dominant. En dimension quatre, on obtient ainsi :

$$\frac{d\lambda_r}{dt} = -\varepsilon\lambda_r + \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{17}{3}\lambda_r^2 - \frac{40}{3}\lambda_r\mu_r + \frac{80}{3}\mu_r^2\right) \tag{3.89a}$$

$$\frac{d\mu_r}{dt} = -\varepsilon\mu_r + \frac{1}{8\pi^2}\left(-12\mu_r^2 + 4\lambda_r\mu_r\right) \tag{3.89b}$$

Ce résultat coïncide avec les calculs menés à une boucle dans le cadre de la théorie de perturbation en constantes de couplage [Kaw90] [PRV01b]. Il n'existe pas de point fixe stable pour ces équations de flot, et la transition est par conséquent du premier ordre.

3.11.5 Résultats entre deux et quatre dimensions

L'étude des équations de flot non perturbatives peut être effectuée en n'importe quelle dimension située entre deux et quatre. On peut en particulier chercher le point fixe des équations de flot, et caractériser ainsi le type de transition de phase que présente le système.

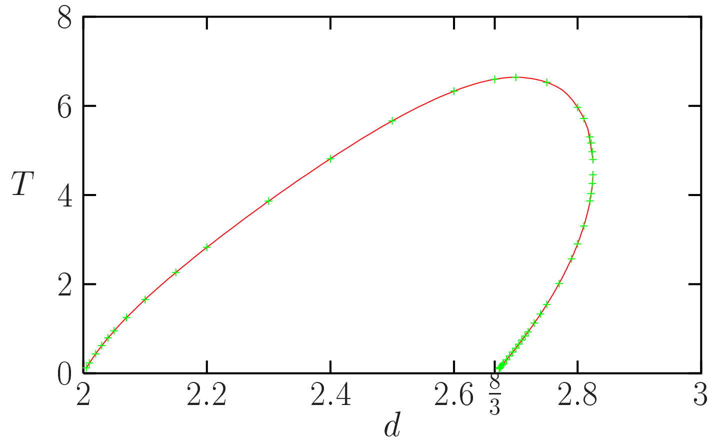


Fig. 3.24 – Température critique en fonction de la dimension pour le modèle principal chiral. Les points ont été obtenus en résolvant les équations de point fixe non perturbatives, et la ligne continue est une extrapolation de ces résultats. Les deux branches correspondent à deux points fixes, l'un stable, l'autre instable. Ces deux points fixes s'annihilent en dimension $d \simeq 2.8$.

Le résultat de cette analyse est représenté sur la figure 3.24, où nous avons tracé $1/\kappa$ (qui s'identifie au voisinage de la dimension deux à la température) en fonction de la dimension. On observe donc deux branches de solutions. La première émerge de la température nulle en dimension deux. Sur cette branche, et au voisinage de $d = 2$, on retrouve les résultats perturbatifs du modèle σ non linéaire. L'autre branche émerge de la température nulle en dimension 8/3 [46]. Le point fixe des équations de flot associé à cette température critique a deux directions d'instabilité, et correspond donc à un point fixe tricritique. Lorsqu'on augmente la dimension au delà de 8/3, les deux points fixes s'approchent, et s'annihilent, pour $d \simeq 2.8$. Ce scénario est très similaire à ce que nous avons déjà observé dans le modèle $\frac{O(n)\times O(2)}{O(n-2)\times O(2)}$.

[46] Cette valeur est obtenue analytiquement à partir des équations d'évolution non perturbatives. Toutefois, cette valeur est susceptible de varier lorsque des termes sont ajoutés dans la troncation.

Notons que le comportement de la température critique en fonction de la dimension pour le modèle vectoriel $\frac{O(4)}{O(3)}$ est très différent. En particulier, il existe une température de transition pour toutes les dimensions comprises entre deux et quatre.

3.11.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre le modèle principal chiral $\frac{O(3)\times O(3)}{O(3)}$, qui est localement isomorphe à $\frac{O(4)}{O(3)}$, mais qui diffère par des propriétés topologiques : le modèle principal chiral présente des excitations de type Ising, et des défauts topologiques que n'a pas le modèle vectoriel. Au voisinage de $d = 2$, le modèle σ non linéaire prévoit la même physique critique pour ces deux modèles, à tous les ordres de la théorie de perturbation. Toutefois, au voisinage de la dimension quatre, la physique critique des deux modèles est drastiquement différente : le modèle vectoriel présente une transition de phase continue, alors que le modèle principal chiral subit une transition du premier ordre.

Nous avons obtenu les équations de flot non perturbatives du modèle principal chiral dans une troncation “minimale”, qui permet de retrouver les résultats perturbatifs à une boucle obtenus dans le cadre du modèle σ non linéaire et dans un développement en constantes de couplage. Les comportements du modèle principal chiral et du modèle vectoriel à quatre composantes sont donc similaires au voisinage de $d = 2$. Pour $d > 2$, les équations de flot du modèle principal chiral admettent un nouveau point fixe, qui déstabilise le point fixe chiral, et est responsable de l'absence de point fixe au voisinage de $d = 4$.

Cet exemple montre clairement la capacité de la méthode présentée ici pour étudier des aspects non perturbatifs d'une théorie.

Chapitre 4

Modèle d'Ising désordonné

L'étude des propriétés critiques que nous avons menée dans les deux chapitres précédents repose sur l'hypothèse implicite que les systèmes considérés sont purs : ils ne présentent pas d'impureté, de dislocation, de lacune, etc, qui induisent des inhomogénéités dans le système. Cette hypothèse est sujette à caution dans la mesure où il est très difficile, voire impossible de produire de tels échantillons. Il est donc légitime de se poser la question de l'influence de ces impuretés sur les propriétés critiques d'un système.

Au milieu des années 70, plusieurs scénarios ont été proposés concernant l'influence des impuretés :

- en présence d'impuretés, les fluctuations à grande distance sont amoindries. Le comportement des observables physiques, qui est singulier dans le cas pur, est adouci et devient régulier en présence d'impuretés.
- Inversement, les impuretés induisent un changement des quantités non universelles (par exemple la température critique), sans influencer le comportement critique.

Un traitement par groupe de renormalisation a conduit à un scénario différent. La présence d'impuretés dans certains systèmes peut induire un nouveau type de comportement universel, avec des lois de puissance caractérisées par un nouveau jeu d'exposants critiques. Le système en présence d'impuretés, de désordre, appartient alors à une nouvelle classe d'universalité. Aujourd'hui, ce dernier scénario est communément accepté, tout au moins lorsque la densité d'impuretés n'est pas trop importante.

Un des problèmes les plus importants est de savoir quels sont les systèmes qui sont influencés par la présence d'impuretés. Harris [Har74] a montré qu'une réponse pouvait être obtenue en étudiant les exposants critiques du système pur. Les impuretés induisent un changement de comportement critique dans les systèmes si et seulement si :

$$\nu < \frac{2}{d}. \tag{4.1}$$

En utilisant la relation d'hyperscaling $\alpha = 2 - \nu d$, on peut exprimer les relations précédentes à l'aide de l'exposant critique α : la présence d'impuretés influence les propriétés d'un système pur si $\alpha_{\text{pur}} > 0$.

On peut maintenant faire la liste des systèmes qu'il faut réexaminer à la lumière du critère de Harris. Ainsi, en étudiant l'exposant α des modèles vectoriels $O(n)/O(n-1)$ en dimension trois, on constate que seul le modèle d'Ising satisfait l'inégalité (4.1). Il est donc intéressant d'étudier la nouvelle classe d'universalité du modèle d'Ising en présence d'impuretés. Notons également que les antiferromagnétiques triangulaires empilés, ainsi que les hélimagnétiques présentent un α fortement positif, ce qui indique que le rôle des impuretés dans le système doit être étudié avec soin.

Dans ce chapitre, nous étudions le modèle d'Ising en présence d'une faible densité d'impuretés, appelé modèle d'Ising dilué, à l'aide de l'équation exacte d'évolution de l'action effective courante Γ_k [1]. Nous commençons notre étude en discutant le critère de Harris. Nous adoptons ensuite le même plan que celui utilisé lors de l'étude des antiferromagnétiques triangulaires empilés. Nous présentons donc dans un premier temps les résultats expérimentaux et numériques. Les approches perturbatives sont ensuite décrites. Nous discutons avec plus de détails les techniques de resommation de série, et les problèmes inhérents à cette approche. Le reste du chapitre est dédié au traitement de ce problème par la technique de l'action effective courante. On présente les troncations utilisées dans ce travail, et discutons les résultats obtenus dans ce cadre.

4.1 Critère de Harris

Il existe plusieurs démonstrations du critère de Harris. La plus générale, qui englobe un très grand nombre de situations a été proposée dans [CCFS86]. Nous présentons ici un argument plus simple.

L'idée consiste à faire l'hypothèse que la présence de désordre ne change pas les propriétés du calcul. Nous verrons que cette hypothèse est auto-cohérente ou non suivant le signe de α. Dans le premier cas, nous conclurons qu'effectivement la présence d'impuretés ne change pas les propriétés critiques du système, et que dans le second cas, le désordre est pertinent. Considérons un système de spins, soumis à une interaction ferromagnétique entre plus proches voisins $J_{i,j}$. Nous considérons ici que l'interaction est une variable aléatoire, décorrélée, et très piquée autour d'une valeur moyenne non nulle. Plaçons maintenant ce système à une température T différente de la température critique du système pur. Alors, sous l'hypothèse que les propriétés critiques du système ne sont pas influencés par le désordre, la longueur de corrélation est $\xi \propto |T - T_c|^{-\nu}$, d'où l'on tire la relation :

$$|T - T_c| \propto \frac{1}{\xi^{1/\nu}} . \tag{4.2}$$

[1] Nous n'avons pas encore traité le cas des antiferromagnétiques triangulaires empilés en présence de désordre, qui représente pourtant une situation très intéressante.

On peut donc imaginer que le système est composé de domaines décorrélés, d'extension spatiale ξ. Dans chaque domaine, on a une réalisation différente du désordre, et donc des valeurs différentes pour les constantes d'interaction. Il en résulte donc des fluctuations des températures critiques de domaine à domaine. La loi des grands nombres nous indique que les variations de température sont de l'ordre de $\Delta T_c \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$, où N représente le nombre de liens par domaines. Pour un système à d dimensions spatiales, le nombre de liens d'un domaine est de l'ordre de ξ^d, de sorte que :

$$\Delta T_c \propto \frac{1}{\xi^{d/2}} \tag{4.3}$$

En rapprochant les équations 4.2 et 4.3, on observe que la situation est radicalement différente suivant que $1/\nu$ est plus petit ou plus grand que $d/2$. Dans le premier cas, lorsque la longueur de corrélation augmente, les fluctuations de la température critique de domaine à domaine décroît beaucoup plus vite que $|T - T_c|$. Autrement dit, pour une longueur de corrélation suffisamment grande, les températures critiques de tous les domaines peuvent être considérées comme égales. Inversement, si $\frac{1}{\nu} > \frac{d}{2}$, la dispersion des températures critiques croît beaucoup plus vite que $|T - T_c|$. La température critique globale du système est donc très mal déterminée, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ.

Il est maintenant facile de vérifier que le premier cas, dans lequel le désordre n'est pas pertinent correspond au critère (4.1).

4.2 Phénomène de bifurcation

Même lorsque le critère de Harris indique que l'effet des impuretés est important, on retrouve le comportement du système pur dans tout une gamme de température. Un argument simple permet de montrer que l'effet des inhomogénéités dans le système ne se manifeste que pour des températures proches de la température de transition. Considérons un système pur de spins en interactions, tel que $\alpha > 0$ (l'effet du désordre est important). Ajoutons une faible densité d'impuretés. Cette densité peut être exprimée à l'aide de la distance moyenne entre impuretés l. Plaçons maintenant ce système à une température suffisamment éloignée de la température critique pour que la longueur de corrélation soit beaucoup plus petite que la distance entre les impuretés. On peut se représenter le système comme un ensemble de domaines, d'extension spatiale de l'ordre de ξ, dans lesquels les spins sont corrélés. Comme $\xi \ll l$, il n'y a presque pas d'impuretés dans chaque domaine. En revanche, si l'on approche la température de transition, la longueur de corrélation augmente, et le nombre d'impuretés par domaine de spins corrélés devient grand. Les impuretés vont alors influencer les caractéristiques universelles du système.

On assiste donc à un phénomène de bifurcation entre le comportement du système désordonné et le comportement du système pur lorsque la longueur de corrélation devient de l'ordre de la distance typique entre impuretés dans le système. On note également que plus la densité d'impuretés est faible, plus le domaine de température sur lequel les impuretés sont importantes se rétrécit. Ce domaine de température a d'ailleurs une extension nulle pour un système complètement pur. Ces propriétés expliquent que les comportements des systèmes purs puissent être étudiés expérimentalement, bien que les échantillons présentent toujours une faible densité d'impuretés.

4.3 Résultats expérimentaux

Depuis le début des années 80, de nombreuses études expérimentales ont été menées dans le but d'étudier les propriétés des systèmes dans la classe d'universalité du modèle d'Ising dilué. Les systèmes les plus couramment étudiés sont des cristaux de FeF_2 ou de MnF_2, dans lesquels une certaine proportion, notée $1-x$, d'atomes magnétiques (fer ou manganèse) sont remplacés par des atomes non magnétiques de zinc. Ces alliages sont référencés sous la forme $Fe_xZn_{1-x}F_2$ et $Mn_xZn_{1-x}F_2$. L'intérêt de ces matériaux est qu'en l'absence d'impuretés magnétiques, ils donnent une très bonne réalisation du modèle d'Ising pur [BLH95].

Il est important de noter que l'échelle de temps typique de déplacement des impuretés est beaucoup plus grand que le temps caractéristique sur lequel se déroulent les expériences. On considère donc que les impuretés sont gelées [2].

Les premières mesures des exposants γ, ν, mais surtout α [MCY+86] [BCS+83] [BKJ86], ont donné des résultats qui diffèrent significativement de ceux obtenus pour le système pur, ce qui accrédite l'existence d'une nouvelle classe d'universalité pour le modèle d'Ising dilué. Les études menées depuis ont confirmé ce fait, et ont permis d'obtenir des déterminations précises du jeu d'exposants critiques associé à cette nouvelle classe d'universalité. Sur la table 4.1 sont rapportées les valeurs de ces exposants critiques.

Les exposants critiques obtenus dans tous ces systèmes sont en bon accord entre eux, mais diffèrent des résultats obtenus pour le système pur. Pour comparer ces deux jeux d'exposants critiques, nous rapportons sur la table 4.2 les valeurs communément admises des exposants critiques pour le modèle d'Ising pur. On remarque en particulier que la valeur de α obtenue expérimentalement est significativement négative (au moins de trois écarts standards), alors que sa valeur dans le système pur est positive.

4.4 Simulations numériques

Un grand nombre de simulations numériques ont été effectuées pour déterminer les exposants critiques du modèle d'Ising dilué en trois dimensions. La première étape

[2] ceci est très important dans le traitement théorique de ces matériaux, et nous reviendrons en détail sur cette propriété dans la suite.

cristal	ref.	α	β	γ	ν
$Mn_xZn_{1-x}F_2$	[DG81]		0.349(8)		
	[MCY+86]			1.364(76)	0.715(35)
	[TPBH88]		0.33(2)		
	[RKJ88]	-0.09(3)			
$Fe_xZn_{1-x}F_2$	[BCS+83]	-0.09(3)		1.44(6)	0.73(3)
	[BKJ86]			1.31(3)	0.69(1)
	[Bar86]		0.36(1)		
	[RKL+88]		0.350(9)		
	[FKJ91]	-0.09			
	[BWS+95]		0.35		
	[BWS+96]		0.35		
	[HFH+97]		0.36(2)		
	[SB98]	-0.10(2)			
	[SBFB98]			1.35(1)	0.71(1)
	[SB99]			1.34(6)	0.70(2)

Tab. 4.1 – Exposants critiques de $Fe_xZn_{1-x}F_2$ et $Mn_xZn_{1-x}F_2$.

α	β	γ	ν	η
0.1100(45)	0.3250(15)	1.2405(15)	0.6300(15)	0.032(3)

Tab. 4.2 – Exposants critiques communément admis pour le modèle d'Ising pur [ZJ89a].

de ces études consiste à déterminer une réalisation du désordre : sur chaque site du réseau, on place un spin avec probabilité x. Ceci donne une bonne image des échantillons considéré dans la section précédente, où certains ions magnétiques sont remplacés par des ions non magnétiques. On détermine ainsi les sites occupés et les sites vacants une fois pour toutes. Un algorithme Monte-Carlo est ensuite utilisé pour déterminer les propriétés critiques du système.

Les résultats de ces simulations sont rapportés sur la table 4.3. Les premières simulations numériques [Lan80] retrouvent les exposants critiques du système pur, sans indication de bifurcation vers le comportement du système en présence d'impuretés. Les simulations effectuées à partir de 1985 ont été menées sur des réseaux plus grands, et pour des concentrations d'impuretés $1-x$ assez élevées, les exposants critiques diffèrent de ceux obtenus pour le système pur. Toutefois, on observe que les exposants critiques varient avec la densité d'impuretés dans le système.

Il est apparu plus tard que cet effet devait être attribué à de fortes corrections aux lois d'échelle. Les exposants mesurés sont en fait des exposants effectifs, non universels, qui dépendent effectivement de la dilution. Les exposants asymptotiques sont probablement universels, c'est-à-dire indépendant de la dilution.

ref.	concentration	β	γ	ν
[Lan80]	$0.4 \leq x \leq 1$	0.31	1.25	
[MLT86]	1	0.30(2)		
	0.985	0.31(2)		
	0.95	0.32(3)		
	0.9	0.355(10)		
	0.8	0.385(15)		
[CS86]	1	0.29(2)		
	0.95	0.28(2)		
	0.9	0.31(2)		
	0.8	0.37(2)		
[BF88]	0.8	0.392(30)		
[WC89]	$0.4 \leq x \leq 0.8$		1.52(7)	0.77(4)
[WWMC90]	0.8		1.36(4)	
[HF90]	1			0.629(4)
	0.9			$<2/3$
	0.8			0.688(13)
[Heu90]	1	0.305(10)	1.24(1)	
	0.9	0.315(10)	1.30(1)	
	0.8	0.330(10)	1.35(1)	
	0.6	0.330(10)	1.48(2)	
	0.5	0.335(10)	1.49(2)	
[Heu93]	1	0.33(1)	1.22(2)	0.624(10)
	0.95	0.31(2)	1.28(3)	0.64(2)
	0.9	0.31(2)	1.31(3)	0.65(2)
	0.8	0.35(2)	1.35(3)	0.68(2)
	0.6	0.33(2)	1.51(3)	0.72(2)
[Hen93]	0.6	0.42(4)		0.78(1)
[WD98a]	0.8	0.344(3)	1.357(8)	0.682(3)
[WD98b]	0.6	0.316(13)	1.522(31)	0.722(8)
[BFMM+98]	$0.4 \leq x \leq 0.9$	0.3546(28)	1.342(10)	0.6837(53)

TAB. 4.3 – Exposants critiques du modèle d'Ising dilué obtenus par simulations numériques. x indique la concentration d'ions magnétiques.

Il découle de cette observation que la limite de volume infini doit être effectuée avec soin. En tenant compte des corrections aux lois d'échelle, Ballesteros *et al.* [BFMM+98] ont montré que les exposants critiques sont en fait bien indépendant de la concentration en impuretés, dans une grande gamme de dilution.

Notons également que l'exposant ω régissant les corrections aux lois d'échelle est relativement petit dans ce système. Ceci est confirmé par les approches théoriques. Ballesteros *et al.* trouvent $\omega \simeq 0.38$, en assez bon accord avec des résultats théoriques. Cet exposant est deux fois plus petit que pour le système pur, ce qui implique que le domaine de température sur lequel se produit la bifurcation entre les comportements du système pur et le comportement du système désordonné est assez grande. Ceci explique en partie pourquoi la limite de volume infini est nécessaire pour déterminer précisément les exposants critiques.

4.5 Traitement théorique

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus grâce aux méthodes perturbatives. Dans un premier temps, nous décrivons les résultats obtenus par les approches perturbatives. Nous décrivons ensuite la troncation de l'action effective courante que nous avons utilisé, et présentons les résultats qui en découlent.

4.5.1 Modélisation

Revenons sur les réalisations expérimentales du modèle d'Ising désordonné que nous avons étudié dans la section 4.3. Dans les échantillons considérés, les ions magnétiques sont placés sur les sites d'un réseau, et une certaine fraction des ces ions est remplacée par des ions non-magnétiques. Les spins des atomes magnétiques interagissent entre eux et l'interaction est à courte portée. Cette situation peut être représentée par le Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \epsilon_i \epsilon_j S_i S_j. \tag{4.4}$$

ϵ_i est une variable qui indique si le site i est occupé ($\epsilon_i = 1$) ou vacant ($\epsilon_i = 0$). S_i représente l'orientation du spin, et J décrit la force de l'interaction entre spins.

Rappelons que, dans les systèmes considérés, le temps caractéristique de déplacement des impuretés est beaucoup plus long que la durée des expériences. Aussi, considère-t-on que la position des impuretés est déterminée une fois pour toutes. Les variables ϵ_i sont donc gelées et ne fluctuent pas. D'autre part, lors de la préparation d'un échantillon, la position des impuretés dans le système ne suit pas un schéma régulier. On tient compte de cette propriété en considérant que $\{\epsilon_i\}$ est un ensemble de variables aléatoires. Dans les modélisations les plus simples, ces variables sont décorrélées. En outre, on utilise la loi de probabilité :

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } x \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - x \end{cases} \tag{4.5}$$

La réalisation d'un échantillon correspond, dans cette modélisation, à fixer l'ensemble des valeurs de ϵ_i.

Le problème théorique consiste maintenant à déterminer les propriétés critiques d'un système, dans une réalisation du désordre (pour une détermination des ϵ_i). Ce programme est irréalisable, car la description du Hamiltonien d'interaction dépend d'un nombre macroscopique de paramètres, et il est impensable de tenir compte de la valeur de chacune de ces variables indépendamment. Heureusement, la plupart des observables physiques que l'on mesure expérimentalement (aimantation, chaleur spécifique, susceptibilité, etc.) ne dépendent pas de la réalisation du désordre considéré. Cette propriété est appelée auto-moyennation, et s'exprime de façon plus mathématique sous la forme [3] :

$$\lim_{V \to \infty} \frac{\overline{X^2} - \overline{X}^2}{\overline{X}^2} = 0 \tag{4.6}$$

La propriété d'auto-moyennation nous conduit donc à calculer les valeurs moyennes (sur l'ensemble des réalisations possibles du désordre) des observables physiques au lieu de les calculer pour une réalisation déterminée. L'intérêt de cette prise de moyenne est double. D'abord, on peut ainsi réduire le nombre de paramètres pertinents de la théorie. En effet, la théorie ne dépend plus de la valeur de chaque ϵ_i, mais uniquement des caractéristiques de la loi de probabilité. D'autre part, on rétablit ainsi l'homogénéité de l'espace.

La discussion précédente nous conduit naturellement à considérer la moyenne sur l'ensemble des réalisations du désordre de l'énergie libre :

$$\mathcal{F}[J,T] = -T \ln \mathcal{Z} \tag{4.7}$$

qui permet de générer, par dérivation par rapport aux sources et par rapport à la température, l'ensemble des observables physiques. Ainsi la quantité physiquement intéressante est :

$$\mathcal{F}_{\text{moy.}}[J,T] = -T\,\overline{\ln \mathcal{Z}} \tag{4.8}$$

Dans le problème considéré ici, effectuer la moyenne sur les variables aléatoires est très difficile, ce qui limite l'intérêt de cette approche.

Toutefois, pour un modèle proche du modèle de dilution discuté ici, il est possible d'effectuer la moyenne sur les réalisations du désordre explicitement. Ceci permet d'obtenir une théorie effective pour traiter le problème. Nous considérons dans la section suivante ce modèle, et présentons la méthode des répliques qui permet d'effectuer la moyenne sur les réalisations du désordre. Notons toutefois qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser cette méthode pour traiter le modèle d'Ising avec une faible densité d'impuretés. D'ailleurs, les premiers calculs [Lub75] [GL76] menés sur le modèle d'Ising désordonné ne faisaient pas appel à cette méthode.

[3] La quantité $\overline{X}$ désigne la moyenne de X sur l'ensemble des réalisations possibles du désordre.

4.5.2 Méthode des répliques

Dans le but d'étudier les propriétés critiques à l'aide d'une théorie des champs, il est important d'introduire une théorie où les degrés de liberté ne sont plus décrits par des variables discrètes. Une transformation de Hubbard-Stratonvitch peut par exemple être effectuée à partir du Hamiltonien (4.4). On obtient alors une action exprimant les interactions du champ continu φ. Du fait de la présence d'impuretés dans le système, les constantes de couplage décrivant l'action sont des variables aléatoires. En ne considérant que les termes pertinents au sens du groupe de renormalisation, l'action prend la forme :

$$\mathcal{S} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{r + \delta r(x)}{2}\varphi^2 + g\varphi^4 \right\} \tag{4.9}$$

δr est une variable aléatoire, et code la présence des impuretés dans le système. Nous choisissons ici une distribution gaussienne pour cette variable :

$$\mathcal{P}\left(\delta r(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{-\frac{1}{2\Delta}\delta r(x)^2} \tag{4.10}$$

L'hypothèse d'universalité implique que les propriétés critiques du système ne sont pas influencées par la forme précise de cette densité de probabilité. Notons également que la constante de couplage à quatre champs est également une variable aléatoire. Toutefois on peut remplacer cette variable par sa valeur moyenne lors de l'étude effectuée ici[4]. Écrivons maintenant l'équivalent de l'équation (4.8) pour la théorie exprimée en terme de champs continus [5] :

$$\mathcal{F}[J,T] = -T \int \mathcal{D}\,\delta r\ \mathcal{P}\left(\delta r(x)\right) \ln\left(\int \mathcal{D}\varphi\ \exp\left(-\mathcal{S}[\varphi]\right)\right) \tag{4.11}$$

L'intégration sur le champ $\delta\, r(x)$ est très difficile à réaliser. Toutefois, si l'on utilise la représentation du logarithme :

$$\ln \mathcal{Z} = \lim_{n\to 0} \frac{\mathcal{Z}^n - 1}{n}, \tag{4.12}$$

on peut réexprimer l'équation (4.11) sous la forme [6] :

$$F[J,T] = \lim_{n\to 0} -\frac{T}{n} \int \mathcal{D}\,\delta r\ \mathcal{P}\left(\delta r(x)\right) \left(\int \mathcal{D}\varphi\ \exp\left(-\mathcal{S}[\varphi]\right)\right)^n . \tag{4.13}$$

Notons finalement que la fonction de partition élevée à la puissance n peut s'exprimer à l'aide de n répliques du champ φ, notées $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$:

$$\left(\int \mathcal{D}\varphi\ \exp\left(-\mathcal{S}[\varphi]\right)\right)^n = \int \mathcal{D}\varphi_1 \ldots \mathcal{D}\varphi_n\ \exp\left(-\mathcal{S}[\varphi_1] - \cdots - \mathcal{S}[\varphi_n]\right) \tag{4.14}$$

[4]La prise en compte des fluctuations de la constante de couplage g induit des termes non pertinents au sens de l'analyse dimensionnelle.

[5]Dans la suite, on fait un changement de variables pour intégrer la température dans les constantes de couplage.

[6]Le 1 apparaissant dans le membre de droite de l'équation (4.12) correspond à une constante dans la fonction de partition. On n'en tient pas compte dans la suite.

L'intérêt de cette suite de transformations est que nous sommes maintenant capables d'effectuer l'intégration sur le désordre. En effet, la dépendance en $\delta r(x)$ de l'intégrand de l'équation (4.14) est gaussienne : la densité de probabilité $\mathcal{P}$ donne une contribution de la forme $\exp(-\delta\, r^2/(2\Delta))$, et les poids de Boltzmann, une contribution en $\exp(-\delta r(\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_n^2)/2)$. L'intégration sur le champ $\delta r(x)$ conduit ainsi à :

$$F[J,T] = -\lim_{n\to 0} \frac{T}{n} \int \mathcal{D}\varphi_1 \ldots \mathcal{D}\varphi_n \exp\left(-\mathcal{S}_n[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]\right), \tag{4.15}$$

où :

$$\mathcal{S}_n[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] = \int d^d x \left(\sum_i \left(\frac{1}{2}(\partial\varphi_i)^2 + \frac{1}{2} r\varphi_i^2 + g\varphi_i^4 \right) - \frac{\Delta}{8} \left(\sum_i \varphi_i^2 \right)^2 \right). \tag{4.16}$$

Les transformations précédentes nous montrent que le modèle d'Ising désordonné peut être étudié en considérant une théorie à n champs, dont les interactions sont décrites par l'action (4.16), et en étudiant la limite $n \to 0$ à la fin du calcul. Notons à nouveau qu'il n'est pas indispensable d'utiliser la représentation du logarithme (4.12) pour arriver à cette conclusion [GL76].

Étudions maintenant les propriétés de l'action (4.16).

- Lorsque $\Delta \to 0$, la densité de probabilité $\mathcal{P}(\delta r)$ tend vers une fonction de Dirac, et l'on retrouve la limite du système pur. On observe sur l'action (4.16) que lorsque $\Delta = 0$, les différentes répliques n'interagissent pas entre elles. Le système présente alors n réalisations découplées du modèle d'Ising. Par conséquent, l'étude des propriétés critiques sur la ligne $\Delta = 0$ redonne les caractéristiques du modèle d'Ising pur.
- Si l'on se place maintenant sur la demi-droite $g = 0$, $\Delta < 0$ [7], l'action peut se réécrire sous la forme :

  $$\mathcal{S}[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \sum_i \left((\partial\varphi_i)^2 + r\varphi_i^2 \right) + \frac{|\Delta|}{8} \left(\sum_i \varphi_i^2 \right)^2 \right). \tag{4.17}$$

  L'action devient $O(n)$ invariante. L'étude de la théorie sur cette ligne permet de retrouver les exposants critiques du modèle vectoriel $O(n)/O(n-1)$ pur.
- Le point précédent mène à la conclusion que lorsqu'on ne se trouve pas sur la ligne $g = 0$, la théorie décrite par l'action (4.16) représente une théorie vectorielle $O(n)/O(n-1)$ dans laquelle la symétrie $O(n)$ est explicitement brisée par un terme en $\sum_i \varphi_i^4$, appelé anisotropie cubique.

Dans les sections suivantes, nous décrivons les approches perturbatives mises en œuvre pour étudier la théorie dite "cubique", et attachons un intérêt particulier aux résultats obtenus dans la limite $n \to 0$.

[7] Ces conditions ne sont pas physiques, puisque Δ représente la largeur de la densité de probabilité pour δr, et doit donc être positif.

4.5.3 Approche de Landau-Ginzburg-Wilson

Dans cette section, nous discutons les résultats obtenus dans un développement en constantes de couplage du modèle cubique à n composantes. Afin d'avoir des notations cohérentes dans la suite de la discussion, nous réécrivons l'action (4.16) sous la forme :

$$\mathcal{S} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[(\partial_\mu \varphi_i)^2 + r\, \varphi_i^2 \right] + u_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 \right)^2 + u_2 \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^4 \right\}. \tag{4.18}$$

Les fonctions β à une boucle de ce modèle sont [GL76] :

$$\partial_t u_1 = -\varepsilon u_1 + \frac{1}{2\pi^2} \left((N+8) u_1^2 + 6 u_1 u_2 \right) \tag{4.19a}$$

$$\partial_t u_2 = -\varepsilon u_2 + \frac{1}{2\pi^2} \left(9 u_2^2 + 12 u_1 u_2 \right) \tag{4.19b}$$

où $\varepsilon = 4 - d$.

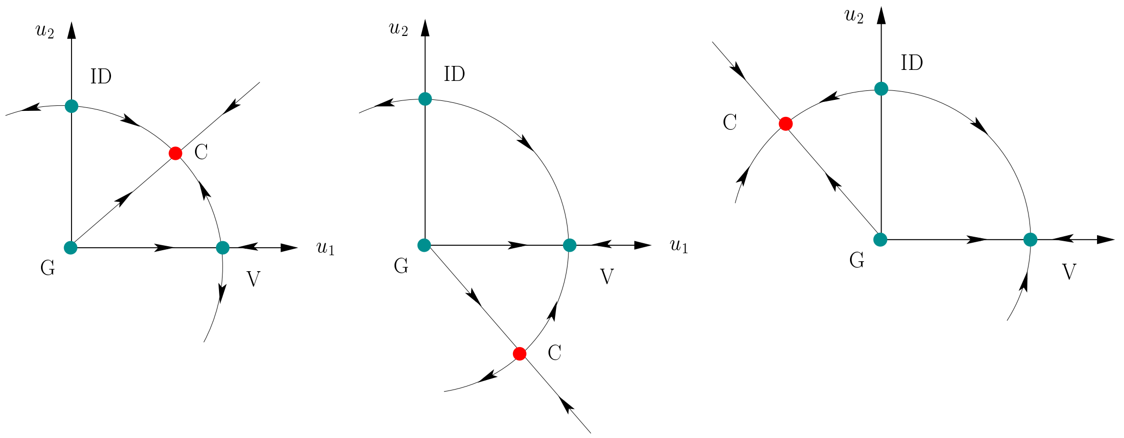
Ces équations de flot admettent quatre points fixes [8] :
- $u_1^\star = u_2^\star = 0$. Ce point fixe correspond à la théorie gaussienne. Ce point fixe est instable pour les dimensions plus petites que quatre.
- $u_1^\star = 0$, $u_2^\star = \dfrac{2\pi^2\varepsilon}{9}$. On remarque que les différentes composantes φ_i sont découplées. La théorie correspond à n réalisations indépendantes du modèle d'Ising (pur). Ce point fixe est apelé Ising découplé.
- $u_1^\star = \dfrac{2\pi^2\varepsilon}{n+8}$, $u_2^\star = 0$. Le terme brisant la symétrie $O(n)$ est nul. Ce point fixe correspond à la théorie vectorielle $O(n)/O(n-1)$, que nous avons étudiée dans le chapitre 2.
- $u_1^\star = \dfrac{2\pi^2\varepsilon}{3n}$, $u_2^\star = \dfrac{2\pi^2(n-4)\varepsilon}{9n}$. Ce point fixe, non trivial correspond à la situation où l'anisotropie cubique joue un rôle important. C'est le seul susceptible de correspondre à la physique critique du modèle d'Ising désordonné. Toutefois, nous observons que la limite $n \to 0$ est singulière. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

Discutons maintenant le diagramme de flot de ce système.

• Lorsque $n > n_{\text{I}} \simeq 4 - 2\varepsilon$, le point fixe cubique se trouve dans la région $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, et est stable (voir 4.1(a)). En revanche le point fixe vectoriel est répulsif dans la direction u_2, ce qui indique que le terme d'anisotropie cubique est pertinent. La physique critique est gouvernée par le point fixe cubique, et les exposants critiques diffèrent de ceux trouvés dans la théorie vectorielle.

• Lorsque l'on diminue n, le point fixe cubique s'approche du point fixe vectoriel. Les deux points fixes sont confondus pour $n = n_{\text{I}}(d)$, puis le point fixe cubique passe

[8]Remarquons ici que les fonctions β du modèle chiral $\frac{O(n)\times O(2)}{O(n-2)\times O(2)}$, qui présentent également deux termes en "φ^4", admettent génériquement aussi quatre points fixes.



(a) $n > n_{\text{I}}$ (b) $n_{\text{I}} > n > 0$ (c) $n < 0$

FIG. 4.1 – Diagramme de flot dans le plan (u_1, u_2) tiré des équations (4.19). Les points G, V, ID, C correspondent aux points fixes gaussien, vectoriel, Ising découplé et cubique.

dans la région $u_2 < 0$ (voir 4.1(a)). Ceci s'accompagne d'un changement de stabilité des points fixes cubique et vectoriel. Il découle des fonctions β à une boucle que $n_{\text{I}} = 4$. Toutefois, lorsque les calculs sont poussés aux ordres supérieurs, n_{I} se met à dépendre de la dimension :

$$n_{\text{I}}(d) = 4 - 2(4-d) + 2.59(4-d)^2 + o\left((4-d)^3\right) \tag{4.20}$$

Pour $n < n_{\text{I}}(d)$, la physique critique est gouvernée par le point fixe vectoriel, et l'anisotropie cubique n'est plus pertinente.

• $n \leq 0$. Enfin, lorsque n s'approche de zéro, limite qui permet *a priori* d'étudier la physique critique du modèle d'Ising désordonné, on observe que la solution de point fixe présente une singularité. Les coordonnées de point fixe tendent vers l'infini. Lorsque n devient négatif, le point fixe réapparaît dans la région $u_1 < 0$, $u_2 > 0$.

La conclusion de l'analyse de la théorie à une boucle est un peu décevante. Si l'on arrive à avoir une image qualitative de la physique associée à l'anisotropie cubique, on n'observe pas de point fixe dans la limite $n \to 0$. La physique du modèle d'Ising dilué échappe donc au calcul à une boucle. Lorsque le calcul est poussé à des ordres supérieurs, la situation est différente. Il existe alors un point fixe des fonctions β (au moins pour des dimensions suffisamment proches de quatre). Les coordonnées du point fixe sont d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$, ce qui indique que toutes les quantités intéressantes (exposants critiques, coordonnées de point fixe) sont obtenues dans un développement en $\sqrt{\varepsilon}$.

4.5.4 Techniques de resommation

Il est bien connu que les approches perturbatives, où les quantités physiques sont calculées en séries des constantes de couplage conduisent à des séries au mieux asymptotiques. Aussi, pour obtenir des résultats quantitatifs, il est nécessaire d'utiliser des techniques de resommation (Padé, Padé-Borel, etc.). Nous donnons ici les résultats obtenus grâce à ces méthodes. Nous discutons d'abord les déterminations de $n_{\rm I}(d=3)$, qui sépare la région où l'anisotropie cubique est pertinente ($n > n_{\rm I}$), et la région où elle ne l'est pas. Les techniques de resommation donnent dans ce cas des résultats bien convergés. En revanche, la détermination des exposants critiques du modèle d'Ising désordonné est beaucoup plus difficile. Notons à cet égard qu'il s'est écoulé vingt cinq ans entre les premiers calculs perturbatifs menés sur cette théorie, et l'obtention de résultats relativement convergé par le méthodes de resommation. Ceci est une bonne illustration du fait que la situation est dans ce cas beaucoup plus problématique.

Détermination de $n_{\rm I}(d=3)$

Les déterminations les plus récentes, et probablement les plus précises de $n_{\rm I}(d=3)$ découlent des fonctions β à six boucles du modèle cubique, calculées directement en dimension trois [CPV00]. En utilisant une transformation conforme et une transformation de Borel, la valeur critique $n_{\rm I}(d=3)$ est trouvée légèrement plus petite que 3 [CPV00] :

$$n_{\rm I}(d=3) = 2.89(4) \tag{4.21}$$

On déduit de cette valeur de $n_{\rm I}(d=3)$ que les implications physiques de l'anisotropie cubique est faible. Le modèle XY n'est pas du tout influencé par la présence d'anisotropies dans le système. Quant au modèle de Heisenberg, pour lequel l'anisotropie est pertinente, les coordonnées des points fixes cubique et vectoriel sont très proches, de sorte que les jeux d'exposants critiques associés sont très similaires. Il est probablement difficile d'observer expérimentalement la différence entre ces deux jeux d'exposants.

Exposants critiques du modèle d'Ising désordonné

Les techniques de resommation sont beaucoup moins efficaces pour calculer les exposants critiques du modèle d'Ising désordonné. En particulier, les développements en $\sqrt{\varepsilon}$ à cinq boucles [FHY99], [FHY98] ne permettent pas d'obtenir une détermination convergée des exposants critiques [FHY01].

Il n'en est pas de même des séries perturbatives calculées en dimension trois. Les séries à quatre boucles resommées par la méthode de Chisholm-Borel permettent de déterminer un point fixe non trivial pour $u_1 > 0$, $u_2 < 0$, et de calculer les exposants critiques du modèle d'Ising désordonné[FHY00] : $\alpha = -0.026$, $\gamma = 1.318$ et $\nu =$

0.675. Ces résultats, qui sont en assez bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques (voir les tables 4.1 page 141 et 4.3 page 142), ne sont en fait pas convergés. En effet, les résultats à deux et trois boucles conduisent à des valeurs positives de α, ce qui est en désaccord avec l'étude de Chayes *et al.* [CCFS86], qui prévoit que cet exposant critique est négatif au point fixe désordonné. Mais plus grave encore, l'ajout des termes à cinq boucles déstabilise entièrement le point fixe, et les séries perturbatives des fonctions β ne permettent plus de déterminer le comportement critique du modèle d'Ising désordonné.

Un troisième angle d'approche a été proposé récemment [ÀMMRL00], et découle de l'étude des séries perturbatives en dimension $d = 0$. Il apparait que ces séries sont convergentes à condition de resommer les séries en u_2 à u_1 fixé, puis de resommer la série en u_1 qui en résulte. Appliquée en trois dimensions [PV00], cette technique permet d'obtenir des résultats assez bien convergés en dimension trois : $\alpha = -0.034(30)$, $\beta = 0.349(5)$, $\gamma = 1.330(17)$ et $\nu = 0.678(10)$, en bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques (voir les tables 4.1 page 141 et 4.3 page 142). Notons toutefois que les coordonnées du point fixe sont très sensibles aux détails du calcul.

4.6 Approche non perturbative

Les difficultés rencontrées pour resommer les séries perturbatives nous ont conduit à étudier le modèle d'Ising désordonné à l'aide de l'équation exacte du groupe de renormalisation. Cette méthode présente le grand avantage de ne pas nécessiter de resommation pour obtenir des résultats numériques stables, et dans tous les cas traités jusqu'ici, l'ajout de termes supplémentaires dans la troncation améliore la précision des résultats.

Nous présentons, comme lors de l'étude des systèmes frustrés menée au chapitre 3, les équations d'évolution obtenues pour la troncation minimale. Nous discutons ensuite le lien entre ces équations et les résultats perturbatifs obtenus à l'ordre dominant. Nous discutons finalement les résultats obtenus en dimension trois, à l'aide d'une troncation plus riche.

4.6.1 Troncation minimale

Il a été montré à plusieurs reprises dans ce travail que le choix de la troncation à utiliser était important dans le but d'obtenir des résultats quantitativement précis. Une méthode de troncation couramment utilisée consiste à développer l'action effective courante Γ_k à la fois en puissances des impulsions et en puissances du champ. Il est important d'effectuer ce dernier développement au voisinage du minimum du potentiel.

Nous considérons donc dans un premier temps la troncation suivante :

$$\Gamma_k = \int d^dx \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{Z}{2}(\partial_\mu \varphi_i)^2 + u_1 \left(\sum_{i=1}^{N} ({\varphi_i}^2 - \kappa) \right)^2 + u_2 \sum_{i=1}^{N} \left({\varphi_i}^2 - \kappa\right)^2 \right\}. \tag{4.22}$$

La constante Z correspond à la renormalisation du champ, et permet de déterminer la dimension anormale. Les deux termes suivant correspondent au développement du potentiel autour du minimum :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa} \\ \vdots \\ \sqrt{\kappa} \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

À nouveau, κ paramétrise le minimum du potentiel. Nous choisissons ici un minimum qui fait jouer un rôle identique aux n composantes du paramètre d'ordre. Nous n'avons donc accès qu'aux solutions symétriques des répliques.

La constante de couplage u_1 correspond à une interaction de symétrie $O(n)$, et la constante de couplage u_2, associée à l'anisotropie cubique, brise explicitement cette symétrie. Les équations de flot pour ces quatre constantes de couplage sont obtenues en suivant la même procédure que celle présentée dans la section 3.7 page 104. Nous obtenons ainsi [TMVD01] :

$$\begin{aligned} \partial_t \kappa = -(d-2+\eta)\kappa + \frac{4v_d}{n\,(n\,u_1+u_2)} \Big[& 3(n\,u_1+u_2) l_1^d(8\kappa(n\,u_1+u_2)) + \\ & + (n\,-1)(n\,u_1+3u_2) l_1^d(8\kappa\,u_2) \Big] \end{aligned} \tag{4.24a}$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 = (d-4+2\eta)u_1 + \frac{4v_d}{n^2\kappa} \Big[& -n\,u_1 l_1^d(8\kappa(n\,u_1+u_2)) + n\,u_1 l_1^d(8\kappa\,u_2) + \\ & + 36\kappa(n\,u_1+u_2)^2 l_2^d(8\kappa(n\,u_1+u_2)) + \kappa\Big(36u_2^2 + \\ & + 24n\,(n\,-1)u_1u_2 + 4(n\,-1)n^2u_1^2 \Big) l_2^d(8\kappa\,u_2) - \\ & - 8\kappa(n\,u_1+3u_2)^2 l_{1,1}^d(8\kappa(n\,u_1+u_2), 8\kappa\,u_2) \Big] \end{aligned} \tag{4.24b}$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_2 = (d-4+2\eta)u_1 + \frac{4v_d}{n\,\kappa} \Big[& n\,u_1 l_1^d(8\kappa(n\,u_1+u_2)) - n\,u_1 l_1^d(8\kappa\,u_2) + \\ & + 8\kappa(n\,u_1+3u_2)^2 l_{1,1}^d(8\kappa(n\,u_1+u_2), 8\kappa\,u_2) \\ & + 36(n\,-2)\kappa u_2^2 l_2^d(8\kappa\,u_2) + \Big] \end{aligned} \tag{4.24c}$$

$$\begin{aligned} \eta = -\partial_t \ln Z = \frac{512\kappa v_d}{n\,d} \Big[& (n\,-1)u_2^2 m_{2,2}^d(0, 8\kappa\,u_2) + \\ & + (n\,u_1+u_2)^2 m_{2,2}^d(0, 8\kappa(n\,u_1+u_2)) \Big] \end{aligned} \tag{4.24d}$$

4.6.2 Développement en constantes de couplage

Les équations non perturbatives (4.24) peuvent être étudiées dans un développement en constantes de couplage. En développant à l'ordre dominant, on retrouve les fonctions β à une boucle (4.19). On trouve d'autre part que la dimension anormale est nulle à l'ordre dominant. Les équations d'évolution non perturbatives permettent donc de retrouver la physique critique du modèle au voisinage de $d = 4$.

Notons également que les équations d'évolution (4.24) ne sont pas singulières dans la limite $n \to 0$. Rappelons à ce propos que les équations à une boucle (4.19) n'admettent pas de point fixe pour $n = 0$. En effet, les coordonnées du point fixe cubique se comportent en $1/n$, et divergent dans cette limite. Ce problème est réglé, dans la théorie de perturbation en poussant le développement à l'ordre suivant (deux boucles). Les équations (4.24) sont non perturbatives, et un développement en constantes de couplage présente des puissances des constantes de couplage à tous les ordres. Ceci permet d'obtenir un point fixe en $\sqrt{\varepsilon}$ dans la limite $n \to 0$, même pour la troncation minimale [9].

4.6.3 Au voisinage de $d = 2$

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les équations d'évolution non perturbatives permettent de retrouver le comportement critique de la théorie lorsque celui-ci se produit à basse température. Ainsi, nous avons pu retrouver les fonctions β à une boucle, obtenues dans le cadre du modèle σ non linéaire, pour le modèle vectoriel $\frac{O(n)}{O(n-1)}$ (voir section 2.7.8 page 53), et pour le modèle chiral $\frac{O(n)\times O(2)}{O(n-2)\times O(2)}$ (voir section 3.8.2 page 113).

Le paramètre d'ordre du modèle avec anisotropie cubique n'est pas continu, et par conséquent, la transition de phase en dimension deux ne se produit pas à température nulle. Nous ne pouvons donc pas déduire des équations non perturbatives le comportement critique du modèle cubique. En revanche, le modèle vectoriel $O(n)$ (pour $n > 2$) présente une transition de phase à basse température en dimension $d = 2 + \varepsilon$. Les équations (4.24) décrivent donc correctement le voisinage du point fixe du modèle vectoriel, et permettent en particulier d'étudier la pertinence de l'anisotropie cubique au voisinage du modèle vectoriel $O(n)/O(n-1)$.

Dans ce but, nous allons effectuer un développement de basse température, qui s'obtient dans nos notations, comme un développement en puissances de $1/\kappa$. D'autre

[9] Notons que la troncation minimale ne permet pas de retrouver les fonctions β à deux boucles. Les coordonnées du point fixe en $\sqrt{\varepsilon}$ ne coïncident donc pas avec ceux obtenus par les théories de perturbation à deux boucles.

part, pour étudier la pertinence de l'anisotropie cubique, nous allons développer les équations en puissances de u_2, à l'ordre dominant. Le développement des équations (4.24) mènent ainsi à :

$$\partial_t \kappa = -\varepsilon\kappa + \frac{(n-2)}{2\pi n} \tag{4.25a}$$

$$\partial_t u_1 = -2u_1 + 4u_1^2 \frac{(n-1)}{\pi} \ln 2 \tag{4.25b}$$

$$\partial_t u_2 = \left(-2 + \epsilon + \frac{4}{n^2 \pi\, \kappa}\right) u_2 \tag{4.25c}$$

$$\eta = \frac{1}{2\pi\, n^2\, \kappa} \tag{4.25d}$$

où $\varepsilon = d - 2$. En remplaçant la valeur de point fixe de κ dans (4.25c), on obtient :

$$\partial_t\, u_2 = \left(-2 + \frac{n+6}{n-2}\varepsilon\right) u_2. \tag{4.26}$$

Cette équation est valable au voisinage de la solution de point fixe du modèle vectoriel (et donc à basse températures), et pour de petites valeurs de u_2. On observe ainsi que l'anisotropie cubique est une perturbation pertinente du modèle vectoriel, pour $n > n_{\text{I}}(d) = 2 + 4\varepsilon + o(\varepsilon^2)$. Ce résultat coïncide avec le résultat obtenu dans le cadre du modèle σ non linéaire [PN76].

4.6.4 Résultats en dimension trois

Nous discutons finalement les résultats obtenus en dimension trois. Afin d'obtenir une plus grande précision numérique, nous avons considéré une troncation plus riche, contenant tous les termes de même dimension canonique que les termes de potentiel en "φ^8" :

$$\begin{aligned}\Gamma_k = \int d^d x \Big\{ & Z \sum_a (\partial_\mu \varphi_a)^2 + Z' \sum_{a,b} \varphi_a^2\, (\partial_\mu \varphi_b)^2\, Y \sum_{a,b} (\varphi_a \partial_\mu \varphi_a)\,(\varphi_b \partial_\mu \varphi_b) + \\ & + Y_1 \sum_a \varphi_a^2\, (\partial_\mu \varphi_a)^2 + Y_2 \sum_a (\varphi_a \partial_\mu \varphi_a)^2 + \\ & + u_1\, t_2^2 + u_2\, t_4 + v_1\, t_2^3 + v_2\, t_2\, t_4 + v_3\, t_6 + \\ & + w1\, t_2^4 + w_2\, t_2^2\, t_4 + w_3\, t_2\, t_6 + w_4\, t_4^2 + w_5\, t_8 \Big\}\end{aligned} \tag{4.27}$$

où

$$t_2 = \sum_a \varphi_a^2 - n\, \kappa \tag{4.28}$$

$$t_4 = \sum_a \varphi_a^4 - \frac{1}{n}\left(\sum_a \varphi_a^2\right)^2 \tag{4.29}$$

$$t_6 = \sum_a \varphi_a^6 - \frac{3}{n}\left(\sum_a \varphi_a^2\right)\left(\sum_a \varphi_a^4\right) + \frac{2}{n^2}\left(\sum_a \varphi_a^2\right)^3 \tag{4.30}$$

$$t_8 = \sum_a \varphi_a^8 - \frac{4}{n}\left(\sum_a \varphi_a^2\right)\left(\sum_a \varphi_a^6\right) - \frac{3}{n}\left(\sum_a \varphi_a^4\right)^2 + \tag{4.31}$$

$$+\frac{12}{n^2}\left(\sum_a \varphi_a^2\right)^2\left(\sum_a \varphi_a^4\right) - \frac{6}{n^3}\left(\sum_a \varphi_a^2\right)^4 \tag{4.32}$$

Les équations d'évolution pour ces constantes de couplages sont obtenues en suivant la procédure présentée précédemment. Nous ne rapportons pas ici les équations d'évolution des constantes de couplage car ces dernières sont assez longues (une dizaine de pages), et n'apporte pas d'éclaircissement supplémentaire.

En déterminant le point fixe des équations de flot numériquement, nous obtenons une détermination de la valeur critique $n_{\mathrm{I}}(d=3)$, séparant la région où le point fixe stable est le point fixe cubique ($n > n_{\mathrm{I}}$) et où la perturbation cubique est pertinente, de la région où la physique critique est gouvernée par le point fixe vectoriel ($n < n_{\mathrm{I}}(d=3)$). On trouve ainsi :

$$n_{\mathrm{I}}(d=3) = 3.1 \tag{4.33}$$

Cette valeur n'est pas trop éloignée de la détermination obtenue par resommation de séries perturbatives (voir les équations (4.21) et (4.21)). Toutefois, notre détermination est plus grande que 3, ce qui semble indiquer que l'anisotropie cubique n'est pas pertinente pour le modèle de Heisenberg cubique.

Nous avons d'autre part déterminé les exposants critiques du modèle d'Ising désordonné, en étudiant la limite $n \to 0$ des équations de flot. Nous obtenons ainsi : $\nu = 0.67$, $\eta = 0.05$, en assez bon accord avec les résultats obtenus par resommation de séries perturbatives (voir section 4.5.4 page 149), ainsi qu'avec les résultats expérimentaux (voir table 4.1 page 141) et numériques (voir table 4.3 page 142).

4.7 Conclusion

Nous avons considéré dans ce chapitre le modèle cubique à n composantes. Ce modèle correspond à un modèle de spins en interaction, soumis à une brisure explicite de la symétrie de rotation des spins [10]. Dans la limite $n \to 0$, ce modèle permet d'étudier la physique critique du modèle d'Ising en présence d'une faible quantité d'impuretés non magnétiques distribuées aléatoirement.

[10] cet effet est par exemple attribué à l'anisotropie du cristal

En utilisant l'équation exacte du groupe de renormalisation, régissant l'évolution de l'action effective courante Γ_k avec l'échelle k, nous avons déterminé des équations d'évolutions des constantes de couplage du modèle cubique à n composantes. Ces équations s'identifient, dans un développement en puissances des constantes de couplage aux fonctions β obtenues à une boucle dans l'approche de Landau-Ginzburg. Nous avons également retrouvé, au voisinage de la dimension deux, le comportement de la courbe $n_{\text{I}}(d)$ à l'ordre dominant.

En dimension trois, nous obtenons une détermination de $n_{\text{I}}(d=3)=3.1$, valeur qui n'est pas trop éloignée de celle obtenue par resommation des séries perturbatives ($n_{\text{I}}(d=3)=2.89(4)$[CPV00]). Dans la limite $n \to 0$, où les techniques de resommation sont très difficiles à mettre en œuvre, les équations de flot non perturbatives permettent d'obtenir une détermination des exposants critiques en bon accord avec les résultats expérimentaux, numériques et théoriques.

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce travail, nous avons considéré deux systèmes magnétiques, obtenus par une modification du modèle ferromagnétique traditionnel. Dans la chapitre 3, nous avons étudié le rôle de la frustration, émergeant d'une compétition entre les interactions. Dans le chapitre 4, nous avons considéré l'effet d'impuretés non magnétiques dans le système. Ces deux modèles ont été étudiés à l'aide de théories des champs qui diffèrent en fait assez peu de la théorie vectorielle : du point de vue de l'approche perturbative de Landau-Ginzburg-Wilson, la seule différence vient du fait que l'interaction à quatre corps des deux modèles considérés ici dépend de deux constantes de couplage, au lieu d'une seule pour le modèle vectoriel.

On pourrait penser que cette différence minime ne change pas l'image globale et cohérente qui a été obtenue dans la théorie vectorielle. En fait, ce n'est pas le cas. On a observé au contraire un grand nombre de phénomènes physiques qui n'ont pas d'équivalent dans le modèle vectoriel. Citons notamment le phénomène de bifurcation, le changement de stabilité ou l'annihilation de points fixes, ou encore l'existence de transitions faiblement du premier ordre. La richesse physique de ces systèmes est une conséquence directe de l'augmentation du nombre de constantes de couplage. En effet, le diagramme de flot pour les systèmes frustrés et les systèmes en présence d'impuretés est obtenu dans un espace à deux dimensions, ce qui autorise une topologie très riche du flot. Ceci est à comparer au diagramme de flot du modèle vectoriel, obtenu sur une demi-droite. Cet espace contraint énormément la topologie du flot, et ne laisse pas beaucoup de libertés pour obtenir des effets non triviaux.

D'autre part, en présence d'une théorie plus compliquée que la théorie vectorielle, on est en droit de s'interroger sur la validité des approches perturbatives. En effet, si celles-ci ont été utilisées avec succès dans l'étude du modèle vectoriel, leur convergence est beaucoup moins rapide dans les deux systèmes considérés ici. Dans ces deux cas, il n'existe d'ailleurs pas de preuve de la sommabilité des séries perturbatives. Lors de l'étude des systèmes frustrés, nous avons même vu que l'étude des séries perturbatives à six boucles conduisent à des résultats en désaccord avec les résultats expérimentaux et numériques.

Les remarques précédentes ne se limitent en fait pas aux deux systèmes considérés dans ce travail. Plus généralement, toutes les théories des champs dont l'interaction à quatre corps est décrite par plus d'une constante de couplage (ce qui est le cas de *toutes* les théories, mise à part la théorie vectorielle), le diagramme de flot prend place dans un espace à plusieurs dimensions, et peut donc avoir une topologie non triviale. Il peut en résulter des phénomènes physiques nouveaux, comme ceux énumérés précédemment. De plus, les méthodes perturbatives sont difficiles à mettre en œuvre, notamment les techniques de resommation, et leur convergence peut être assez lente. Les points soulevés précédemment nous mènent donc à la conclusion que la situation des modèles vectoriels, où une image cohérente peut être obtenue à partir des théories de perturbation n'est pas générique, et que les caractéristiques globales des transitions de phase des modèles vectoriels ne sont pas partagées par tous les modèles.

Les remarques précédentes nous ont conduit à utiliser une nouvelle approche pour étudier les propriétés critiques des systèmes frustrés et des systèmes dilués. La méthode utilisée dans ce travail est basée sur la notion d'action effective courante Γ_k, décrite dans le chapitre 2. Cette quantité permet d'interpoler continûment entre l'action microscopique et le potentiel de Gibbs. l'évolution de Γ_k avec l'échelle k est donnée par une équation exacte et assez concise.

Cette approche présente un certain nombre de propriétés, qui la rendent très utile dans la pratique. L'utilisation de troncations très simples permettent de retrouver dans un même cadre les résultats perturbatifs à l'ordre dominant. C'est probablement cette propriété qui permet d'obtenir des prédictions assez précises en dimension trois. On s'attend en effet à ce qu'une forme approchée des exposants critiques, qui coïncide aux voisinages des dimensions deux et quatre, et pour des grandes valeurs de n avec les résultats perturbatifs soient d'une assez bonne précision en dimension trois, et pour de petites valeurs de n. D'autre part, on a accès directement à la physique en dimension trois, et il n'est pas nécessaire d'utiliser des techniques de resommation de séries. L'étude de différents modèles par cette approche montre que l'ajout de termes dans la troncation améliore la précision des résultats.

Notons enfin que les équations d'évolution des constantes de couplage obtenues sont non perturbatives, et permettent d'observer des effets inaccessibles par les méthodes perturbatives traditionnelles. Citons ici deux exemples que nous avons rencontrés précédemment. L'étude du modèle XY en dimension deux permet de retrouver qualitativement la transition de Kosterlitz-Thouless. Cette transition est attribuée au déconfinement des vortex à haute température, effet qui n'est pas observé dans l'approche perturbative du modèle σ non linéaire. Nous avons rencontré un deuxième effet non perturbatif lors de l'étude des antiferromagnétiques triangulaires empilés de type Heisenberg. Le modèle σ non linéaire prédit (à deux boucles) une équivalence entre la théorie initiale $\frac{O(n)\times O(2)}{O(n-2)\times O(2)}$ et la théorie vectorielle $\frac{O(4)}{O(3)}$. Nous avons vu que ceci était dû au fait que seules les propriétés locales de l'espace du paramètre d'ordre influent sur les propriétés critiques du système. Les propriétés globales induisent des corrections non analytiques en température, qui ne sont donc pas accessibles dans un traitement perturbatif du modèle σ non linéaire. L'approche basée sur l'équation exacte du groupe de renormalisation permet de tenir compte de ces effets non perturbatifs, et prédit une physique critique différente pour ces deux modèles, à une distance finie de la dimension deux. Ces propriétés font de l'approche basée sur l'équation exacte du groupe de renormalisation un outil très puissant pour étudier les propriétés critiques d'une théorie.

L'étude des systèmes frustrés par cette approche nous a permis d'obtenir une image cohérente de la physique "critique" de ces systèmes, en bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques. On a en particulier conclu que la transition de ces systèmes en dimension trois est faiblement du premier ordre, avec une longueur de corrélation à la transition de phase qui peut atteindre 100.000 fois la maille du réseau. Cette valeur très grande de la longueur de corrélation permet d'expliquer les comportements en loi de puissance des quantités thermodynamiques. Toutefois, la transition de phase n'étant pas continue, le système ne présente pas d'universalité. Nous avons obtenu le résultat assez surprenant que les exposants effectifs du système varient continûment, sur une grande plage, lorsque l'on change les propriétés microscopiques du système.

L'étude des systèmes frustrés conduit à se poser un certain nombre de questions intéressantes. La première concerne l'influence du désordre dans ce système. Il apparaît en effet que l'exposant critique α du système pur est fortement positif. Le critère de Harris permet donc de conclure que le désordre est fortement pertinent dans ce système. On peut donc s'attendre à ce qu'une nouvelle classe d'universalité soit associée à la transition de phase des antiferromagnétiques frustrés désordonnés, caractérisés par un nouveau jeu d'exposants critiques. À cet égard, comme α est très positif, on peut s'attendre à ce que ces exposants critiques soient très différent du système pur. Cette situation est à comparer à ce que l'on a observé dans le modèle d'Ising, où α est relativement petit, et où les exposants des systèmes purs et désordonnés sont assez proches. D'autre part, Il est possible que la présence de désordre rende la transition continue. Ce phénomène a déjà été observé pour le modèle de Potts à trois états en trois dimensions, pour lequel le système pur présente une transition faiblement du premier ordre, transition qui devient continue en présence de désordre. L'étude de cette classe d'universalité par la méthode présentée ici fait partie de nos projets à court terme.

Nous avons d'autre part remarqué que les excitations topologiques ont une très grande influence sur les propriétés critiques du système. Bien que l'approche non perturbative considérée ici soit capable de tenir compte de ces excitations, il n'est pas évident de voir comment sont codées ces excitations dans l'action effective courante Γ_k. Il n'y a en particulier pas d'équivalent de la fugacité, qui pilote la transition de phase de Kosterlitz-Thouless. Il serait donc intéressant de quantifier le rôle de ces excitations. Ce programme n'est pas limité au système considéré ici. En effet, une grande activité se développe pour étudier le rôle des excitations du modèle XY en trois dimensions.

Dans l'étude des systèmes considérés dans ce travail, l'approche basée sur l'équation du groupe de renormalisation exact est un outil très puissant, qui nous a permis d'obtenir un image cohérente de la physique critique. Il nous semble donc très important de réétudier certains problèmes classiques de physique statistique à l'aide de cette méthode, pour lesquels les approches perturbatives ne permettent pas de caractériser les propriétés critiques. Nous pensons en particulier au modèle d'Ising en champ aléatoire et au modèle de Potts. Des travaux récents ont montré qu'il est possible d'étudier la formation d'états liés par l'approche non perturbative considérée ici. Ceci ouvre la possibilité d'étudier ce phénomène dans des modèles simples, notamment dans le modèle d'Ising tridimensionnel, dans lequel des aguments théoriques indiquent la formation d'états liés dans la phase de basse température.

À plus longue échéance, il semble possible d'utiliser la méthode du groupe de renormalisation exact dans l'étude des systèmes désordonnés. Des travaux préliminaires ont permis d'écrire un jeu d'équations exactes, gouvernant l'évolution des différents moments de l'action effective Wilsonienne. Bien que ce travail soit très préliminaire, ceci ouvre peut-être la voie à une approche alternative de l'étude des systèmes désordonnés, sans avoir à faire appel à la méthode des répliques. Finalement, il semble très intéressant d'étudier les propriétés dynamiques de systèmes hors d'équilibre par les méthodes considérées ici. En effet, les approches perturbatives ne permettent pas d'étudier le régime de fort couplage, régime dans lequel se trouve le point fixe gouvernant la dynamique dans la phase rugueuse. L'utilisation d'équations exactes du groupe de renormalisation permettra peut-être de décrire le régime de fort couplage de ces théories, et d'obtenir ainsi des résultats non accessibles par les théories de perturbation.

Annexe A

Fonctions de seuil

Nous discutons dans cette annexe les différentes fonctions l, m et n utilisées dans le corps du texte. Dans le cas général, ces fonctions dépendent de quatre arguments. Toutefois dans un certain nombre d'applications physiques, les fonctions seuil apparaissant dans les équations d'évolution dépendent de moins de variables : certains arguments sont systématiquement nuls. Dans ce cas, la dépendance par rapport à ces arguments n'est pas notée. Ainsi, dans le cas du modèle vectoriel, traité au paragraphe 2.7.6 dans la troncation minimale, les fonctions seuil ne dépendent que d'un argument, et nous ne notons donc pas la dépendance par rapport aux trois autres arguments.

A.1 Définitions

Les fonctions seuil sont définies par les intégrales :

$$l^d_{n_1,n_2}[w_1,w_2,t_1,t_2] = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\; y^{d/2-1}\tilde{\partial}_t\left\{\frac{1}{(p_1(y)+w_1)^{n_1}(p_2(y)+w_2)^{n_2}}\right\}, \tag{A.1a}$$

$$m^d_{n_1,n_2}[w_1,w_2,t_1,t_2] = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\; y^{d/2-1}\tilde{\partial}_t\left\{\frac{y(\partial_y p_1(y))^2}{(p_1(y)+w_1)^{n_1}(p_2(y)+w_2)^{n_2}}\right\}, \tag{A.1b}$$

$$n^d_{n_1,n_2}[w_1,w_2,t_1,t_2] = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\; y^{d/2-1}\tilde{\partial}_t\left\{\frac{y\partial_y p_1(y)}{(p_1(y)+w_1)^{n_1}(p_2(y)+w_2)^{n_2}}\right\}, \tag{A.1c}$$

où nous avons utilisé les notations :

$$p_1(y) = y(1+r(y)+t_1) \tag{A.2}$$

$$p_2(y) = y(1+r(y)+t_2) \tag{A.3}$$

$$r(y) = \frac{R_k(\sqrt{y}k)}{Z_k k^2 y} \tag{A.4}$$

Rappelons que le tilde sur l'opérateur de dérivée signifie que seul la fonction de régularisation R_k est affectée par cette operation. Aussi, dans les expressions précédentes, où la dépendance en R_k a été remplacée par une dépendance en p_i :

$$\tilde{\partial}_t p_i(y) = \frac{\partial R_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial R_k} p_i(y) \tag{A.5}$$
$$= -y(\eta r(y) + 2yr'(y)). \tag{A.6}$$

Si nous effectuons la dérivée $\tilde{\partial}_t$, les fonctions de seuil s'expriment explicitement comme des intégrales. À cet égard, il est intéressant d'utiliser l'égalité : $\partial_y \tilde{\partial}_t p_i(y) = \tilde{\partial}_t \partial_y p_i(y)$, de sorte que :

$$\tilde{\partial}_t \partial_y p_i = -\eta(r + yr') - 2y(2r' + yr'') \tag{A.7}$$

Nous obtenons alors :

$$l^d_{n_1,n_2}(w_1, w_2, t_1, t_2) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\; y^{d/2}\; \frac{\eta r + 2yr'}{(p_1(y) + w_1)^{n_1}(p_2(y) + w_2)^{n_2}} \times \left(\frac{n_1}{p_1(y) + w_1} + \frac{n_2}{p_2(y) + w_2}\right) \tag{A.8}$$

$$n^d_{n_1,n_2}(w_1, w_2, t_1, t_2) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\; y^{d/2} \frac{1}{(p_1(y) + w_1)^{n_1}(p_2(y) + w_2)^{n_2}} \times \left\{ y(1 + t_1 + r + yr')(\eta r + 2yr')\left(\frac{n_1}{p_1(y) + w_1} + \frac{n_2}{p_2(y) + w_2}\right) - \eta(r + yr') - 2y(2r' + yr'')\right\} \tag{A.9}$$

$$m^d_{n_1,n_2}(w_1, w_2, t_1, t_2) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\; y^{d/2} \frac{1 + t_1 + r + yr'}{(p_1(y) + w_1)^{n_1}(p_2(y) + w_2)^{n_2}} \times \left\{ y(1 + t_1 + r + yr')(\eta r + 2yr')\left(\frac{n_1}{p_1(y) + w_1} + \frac{n_2}{p_2(y) + w_2}\right) - 2\eta(r + yr') - 4y(2r' + yr'')\right\} \tag{A.10}$$

Sous cette forme, et une fois la fonction de régularisation $r(y)$ déterminée, les fonctions seuil peuvent être évaluées numériquement. Notons que les fonctions seuil dépendent de la dimension anormale η. Pour alléger les notations, nous ne notons pas la dépendance par rapport à cette fonction. De plus, la dimension anormale étant petite dans les régions perturbatives (*i.e.* voisinage des dimensions deux et quatre, et pour n grand). On peut alors négliger cette dépendance pour retrouver les résultats perturbatifs.

A.2 Règles de substitution

Lors de la dérivation des équations d'évolution des constantes de couplage, nous rendons implicites les intégrales sur les impulsions, en introduisant les fonctions seuil.

Nous présentons ici les règles de substitution qui permettent de réécrire les équations de flot à l'aide des fonctions seuil.

Les équations de flot des constantes de couplage paramétrisant le potentiel font intervenir une classe d'intégrales sur les impulsions, qui se réexprime à l'aide de la seule fonction l :

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_t \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(R_k(\mathbf{q}) + (Z_k+T_1)\mathbf{q}^2 + W_1\right)^{n_1} \left(R_k(\mathbf{q}) + (Z_k+T_2)\mathbf{q}^2 + W_2\right)^{n_2}} &= \\ = -4v_d\, Z_k^{-n_1-n_2} k^{d-2(n_1+n_2)}\, l^d_{n_1,n_2}\left[\frac{W_1}{Z_k k^2}, \frac{W_2}{Z_k k^2}, \frac{T_1}{Z_k k^4}, \frac{T_2}{Z_k k^4}\right]\end{aligned} \tag{A.11}$$

Lors du calcul des équations d'évolution des termes cinétiques, dépendant de l'impulsion, apparaissent deux autre types de termes, qui se réexpriment en fonction des deux fonctions seuil m et n :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mathbf{p}^2}\tilde{\partial}_t \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, \mathbf{q}^\alpha \left(R_k(\mathbf{p}+\mathbf{q}) + (Z_k+T_1)(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2 + W_1\right)^{-n_1} \times \\ \left(R_k(\mathbf{q}) + (Z_k+T_2)\mathbf{q}^2 + W_2\right)^{-n_2} = \\ = \frac{4v_d\, n_1}{d} Z_k^{-n_1-n_2} k^{d+\alpha-2(n_1+n_2+1)} \Bigg\{ -\alpha\, n^{d+\alpha-2}_{n_1,n_2}\left[\frac{W_1}{Z_k k^2}, \frac{W_2}{Z_k k^2}, \frac{T_1}{Z_k k^4}, \frac{T_2}{Z_k k^4}\right] + \\ +2n_2\Bigg(m^{d+\alpha}_{n_1+1,n_2+1}\left[\frac{W_1}{Z_k k^2}, \frac{W_2}{Z_k k^2}, \frac{T_1}{Z_k k^4}, \frac{T_2}{Z_k k^4}\right] + \\ + \frac{T_2-T_1}{Z_k k^4} n^{d+\alpha}_{n_1+1,n_2+1}\left[\frac{W_1}{Z_k k^2}, \frac{W_2}{Z_k k^2}, \frac{T_1}{Z_k k^4}, \frac{T_2}{Z_k k^4}\right]\Bigg)\Bigg\}\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mathbf{p}^2}\tilde{\partial}_t \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\, \vec{\mathbf{p}}.\vec{\mathbf{q}}\; \mathbf{q}^\alpha \left(R_k(\mathbf{p}+\mathbf{q}) + (Z_k+T_1)(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2 + W_1\right)^{-n_1} \times \\ \left(R_k(\mathbf{q}) + (Z_k+T_2)\mathbf{q}^2 + W_2\right)^{-n_2} = \\ = \frac{8v_d\, n_1}{d} Z_k^{-n_1-n_2} k^{d+\alpha-2(n_1+n_2)}\, n^d_{n_1+1,n_2}\left[\frac{W_1}{Z_k k^2}, \frac{W_2}{Z_k k^2}, \frac{T_1}{Z_k k^4}, \frac{T_2}{Z_k k^4}\right]\end{aligned} \tag{A.13}$$

Les puissances de Z_k et k apparaissant dans les expressions précédentes sont choisies de telle sorte que les fonctions seuil, exprimées en terme de quantités dédimensionnées renormalisées (voir eq.(A.1a–A.1c)), sont indépendantes de Z_k et k.

A.3 Valeurs particulières des fonctions seuil

Lorsque nous comparons les équations non perturbatives, considérées ici, avec les résultats perturbatifs, il est nécessaire de connaître le développement des fonctions seuil. Ainsi, au voisinage de $d = 4$, la physique critique apparaît dans un régime de petite masse, et il faut alors développer les fonctions seuil en puissances de la masse. Réciproquement, au voisinage de $d = 2$, la physique critique apparaît dans un régime de grande masse, et il est donc nécessaire de développer les fonctions seuil à grande masse. Nous donnons dans la suite ces développements, pour la fonction de seuil $r(y) = 1/(e^y - 1)$. Comme discuté précédemment, nous ne considérons que la partie indépendante de la dimension anormale. La partie linéaire en η donne une contribution sous dominante.

A.3.1 Développement des fonctions seuil au voisinage de $d = 2$

$$
\begin{aligned}
&l_{10}^2[0,0,t,0] = 1, && l_{01}^2[w,0,t,0] \simeq 1/(1+t),\\
&l_{11}^4[0,0,t,0] = 1/(1+t), && l_{11}^2[w,0,t,0] \simeq 1/(w(1+t)),\\
&l_{20}^4[0,0,0,0] = 1, && l_{02}^4[w,0,t,0] \simeq 1/(1+t)^2,\\
&l_{20}^2[0,0,0,0] = 2\ln[2], && l_{12}^6[0,0,t,0] = 1/(1+t)^2,\\
&l_{30}^2[0,0,0,0] = 3\ln[27/16], && l_{40}^2[0,0,0,0] = 88\ln[2] - 54\ln[3],\\
&m_{11}^2[0,0,t,0] = 1/(1+t), && m_{02}^2[w,0,t,0] \simeq 1/(1+t)^2,\\
&m_{20}^2[0,0,t,0] = 1, && m_{22}^2[w,0,0,0] \simeq 1/w^2,\\
&m_{22}^2[0,w,0,0] \simeq -2/w^2, && n_{02}^2[w,0,t,0] \simeq 1/(1+t)^2,\\
&n_{11}^2[0,0,t,0] = 1/(1+t), && n_{20}^2[0,0,t,0] = 1.
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

Les autres termes du développement donnent des contributions sous dominantes, et ne sont pas nécessaires pour retrouver les équations à une boucle du modèle σ non linéaire.

A.3.2 Développement des fonctions seuil au voisinage de $d = 4$

$$\begin{aligned}
&l^4_{10}[M_1, 0, 0] \simeq 1 - M_1,\\
&l^4_{11}[M_1, 0, 0] \simeq 1,\\
&l^4_{01}[0, M_1, 0] \simeq 1 - M_1,\\
&l^4_{20}[M_1, 0, 0] \simeq 1,\\
&l^4_{02}[0, M_1, 0] \simeq 1,\\
&m^4_{22}[M_1, 0, 0] \simeq 1/2.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Les autre termes donnent des contributions sous dominantes au développement des équations de flot.

A.4 Fonctions seuil de Litim

Avec le choix de fonction de régularisation proposé dans [Lit00] (voir équation 2.9), il est possible de calculer analytiquement les fonctions seuil, à condition que t_1 et t_2 soient nuls (voir les équations A.1). On obtient alors :

$$l^d_{n_1,n_2}[w_1, w_2] = \frac{2}{d}\left(1 + \frac{\eta}{d+2}\right)\frac{1}{(1+w_1)^{n_1}(1+w_2)^{n_2}}\left(\frac{n_1}{1+w_1} + \frac{n_2}{1+w_2}\right) \tag{A.16a}$$

$$m^d_{n_1,n_2}[w_1, w_2] = \frac{1}{(1+w_1)^{n_1}(1+w_2)^{n_2}} \tag{A.16b}$$

Le calcul analytique des intégrales permet de simplifier énormément les procédures de recherche de point fixe, et d'intégration des équations de fot.

Annexe B

Hubbard-Stratonovitch

Dans cette annexe, nous retrouvons le paramètre d'ordre matriciel $SO(n) \times SO(2)/(SO(n-2) \times SO(2))$ des antiferromagnétiques frustrés, en effectuant une transformation de Hubbard-Stratonovitch. Cette transformation nous permet de relier le modèle initial de spins $\vec{S}$ normés, en interaction, à un problème équivalent, mais dont les degrés de liberté $\vec{\varphi}$ peuvent fluctuer en module. Il est alors possible d'effectuer la limite continue du modèle, et d'obtenir une action microscopique qui peut être prise comme condition initiale pour l'action effective Γ_k lors de l'intégration du flot.

B.1 Transformation de Hubbard-Stratonovitch

Considérons un système de spins $\vec{S}$ à n composantes, normés à l'unité, disposés sur un réseau. Les interactions entre spins sont décrits par un hamiltonien $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = -\frac{k_B T}{2} \sum_{i,j} K_{i,j} \; \vec{S}_i.\vec{S}_j \; . \tag{B.1}$$

Lors du calcul de la fonction de partition, ne doivent être retenues que les configurations pour lesquelles la contrainte $\vec{S}^2 = 1$ est vérifiée en chaque site du réseau. Nous pouvons représenter cette contrainte à l'aide de fonctions δ :

$$\mathcal{Z}[J] = \int \prod_l d^n \vec{S}_l \; \delta\Big(\vec{S}_l^2 - 1\Big) \, e^{-\mathcal{H}/(k_B T) + \sum_i \vec{J}_i.\vec{S}_i} \; . \tag{B.2}$$

Cette description de la théorie en termes de variables contraintes est à la base des méthodes du groupe de renormalisation dans l'espace direct de type Migdal-Kadanoff, ainsi que les simulations numériques basées sur l'algorithme de Monte Carlo. En revanche, la mise en œuvre du groupe de renormalisation dans le cadre de la théorie des champs, ainsi que la méthode décrite dans cette thèse nécessitent d'utiliser des variables non contraintes, et définies dans le continu, c'est-à-dire sans référence explicite à un réseau. Il faut donc trouver une théorie équivalente à la théorie initiale, s'exprimant en termes de nouveaux champs, mais dont la mesure d'intégration ne fasse pas intervenir de fonctions δ. Ceci peut être réalisé en utilisant, dans (B.2) la représentation de la fonction δ :

$$\delta\left(\vec{S}_l^2 - 1\right) \simeq e^{-\lambda\left(\vec{S}_l^2-1\right)^2}. \tag{B.3}$$

Si le paramètre λ est suffisamment grand, le membre de droite est très piqué, et la contribution dominante à l'intégrale (B.2) est donnée par les configurations satisfaisant la contrainte de normalisation des spins. Notons que la contrainte de normalisation des spins est maintenant représentée par un terme de potentiel en "φ^4" dans le Hamiltonien.

Ce raisonnement est rendu plus rigoureux grâce à la transformation de Hubbard-Stratonovitch. Nous allons utiliser le résultat classique de l'intégration gaussienne :

$$e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} K_{i,j}\vec{S}_i\vec{S}_j} \propto \int \mathcal{D}\vec{\varphi}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\vec{\varphi}_i K_{i,j}^{-1}\vec{\varphi}_j + \sum_i \vec{\varphi}_i\vec{S}_i}, \tag{B.4}$$

valable à un facteur multiplicatif près, qui n'influence pas les conclusions obtenues dans cette discussion. L'intérêt d'une telle transformation est de remplacer le terme quadratique en $\vec{S}$ dans l'exponentielle du membre de gauche de (B.4) en un terme linéaire. Les spins en des sites différents sont découplés, et l'intégrale sur le champ de spin se ramène à un produit d'intégrales d'une seule variable. Plus concrètement, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J] &= \int \left(\prod_l d^n\vec{S}_l\; \delta\left(\vec{S}_l^2 - 1\right)\right) e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j} K_{i,j}\; \vec{S}_i\vec{S}_j + \sum_i \vec{J}_i\vec{S}_i}, \\
&= \int \left(\prod_l d^n\vec{S}_l\; \delta\left(\vec{S}_l^2 - 1\right)\right) \int \mathcal{D}\vec{\varphi}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\vec{\varphi}_i K_{i,j}^{-1}\vec{\varphi}_j + \sum_i\left(\vec{\varphi}_i + \vec{J}_i\right)\vec{S}_i}, \\
&= \int \mathcal{D}\vec{\varphi}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\vec{\varphi}_i K_{i,j}^{-1}\vec{\varphi}_j} \prod_l \int d^n\vec{S}_l\; \delta\left(\vec{S}_l^2 - 1\right) e^{\left(\vec{\varphi}_l + \vec{J}_l\right)\vec{S}_l}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Introduisons finalement la fonction :

$$\mathcal{W}_n[\vec{X}] = -\ln\left(\int d^n\vec{S}\; \delta\left(\vec{S}^2 - 1\right) e^{\vec{X}.\vec{S}}\right), \tag{B.6}$$

qui s'exprime en terme de fonctions hypergéométriques. Nous obtenons la relation :

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\vec{\varphi}\; e^{-\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\vec{\varphi}_i K_{i,j}^{-1}\vec{\varphi}_j + \sum_i \mathcal{W}_n[\vec{J}_i + \vec{\varphi}_i]\right)}. \tag{B.7}$$

En développant l'argument de l'exponentielle en puissances de $\vec{J}$ à l'ordre linéaire, on exprime la fonction de partition (B.2) en terme d'un champ $\vec{\varphi}$ qui n'est pas soumis à la contrainte stricte de normalisation. Les interactions de ce nouveau champ sont décrites par l'action :

$$S[\vec{\varphi}] = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\vec{\varphi}_i K_{i,j}^{-1}\vec{\varphi}_j + \sum_i \mathcal{W}_n[\vec{\varphi}_i]. \tag{B.8}$$

Le second terme correspond à un potentiel, et est la signature de la contrainte stricte à laquelle sont soumis les degrés de liberté initiaux. Le premier terme est sensible aux variations des degrés de liberté d'un site à un autre, et introduit une rigidité dans le système. Notons que l'intégrale fonctionnelle de l'équation(B.7) définie, il est nécessaire que la matrice $K_{i,j}$ soit définie positive, ce qui n'est pas le cas en général, et notamment lorsque le système présente une interaction antiferromagnétique, avec une constante de couplage négative. Cette difficulté est levée en ajoutant une partie diagonale $K_{i,i}$ à la matrice d'interaction, positive et suffisamment grande. Cet ajout n'a aucune influence physique, et consiste uniquement à changer l'origine des énergies[1].

Relevons finalement quelques propriétés de la fonction $\mathcal{W}_n$, utiles dans la suite. Pour certaines valeurs de n, cette fonction a une expression simple :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_1[\vec{X}] = -\log\left(2\cosh(X)\right) \\ \mathcal{W}_3[\vec{X}] = -\log\left(\dfrac{4\pi\sinh(X)}{X}\right) \end{cases}. \tag{B.9}$$

D'autre part, le développement de cette fonction :

$$\mathcal{W}_n[\vec{X}] = \sum_i a_i \left(\vec{X}^2\right)^i, \tag{B.10}$$

donne aux premiers ordres les coefficients :

$$\begin{cases} a_0 = -\ln\left(2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)\right) \\ a_1 = -1/\left(2n\right) \\ a_2 = 1/\left(4n^2(n+2)\right) \\ \quad \cdots \end{cases} \tag{B.11}$$

La discussion menée jusqu'à présent est générale, et ne dépend pas du type d'interactions auxquelles sont soumis les spins. Nous allons maintenant spécialiser la discussion aux interactions caractéristiques des antiferromagnétiques frustrés.

B.2 Antiferromagnétiques frustrés

Considérons un système de spins sur un réseau tridimensionnel, composé de réseaux bidimensionnels triangulaires dans les directions $\hat{x}$ et $\hat{y}$ empilés selon $\hat{z}$. L'interaction est antiferromagnétique entre sites plus proches voisins dans le plan $(\hat{x}\hat{y})$. Dans la direction $\hat{z}$, les spins sont également soumis à une interaction entre plus proches voisins. Celle-ci peut être choisie ferro- ou antiferro- magnétique, sans influencer les propriétés critiques du système, la direction $\hat{z}$ n'induisant pas de frustration supplémentaire.

[1]La partie diagonale de l'interaction génère un terme $\sum_i K_{i,i}\vec{S}_i^2$. En utilisant la contrainte de normalisation des spins, on obtient un terme proportionnel au volume du système, indépendant de la configuration de spins.

Pour simplifier la discussion, nous considérons une interaction ferromagnétique. Comme exposé précédemment, il est nécessaire d'introduire une interaction diagonale pour régulariser l'intégrale fonctionnelle apparaissant dans la fonction de partition Eq.(B.7). Nous choisissons donc une matrice d'interaction dont les éléments sont :

$$K_{i,j} = \begin{cases} J < 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont plus proches voisins dans le plan } (\hat{x}\hat{y}) \\ J' > 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont plus proches voisins dans la direction } \hat{z} \\ J_0 > 0 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{B.12}$$

Afin de calculer l'inverse apparaissant dans l'Eq.(B.8), nous calculons la transformée de Fourier de $K_{i,j}$. On obtient :

$$K(\vec{q}) = 2J\left(\cos(q_x a) + 2\cos(q_x a/2)\cos(q_y\sqrt{3}a/2)\right) + 2J'\cos(q_z a) + J_0. \tag{B.13}$$

Les impulsions dans la direction $\hat{z}$ d'une part, et dans le plan $(\widehat{xy})$ d'autre part sont découplées. Dans la direction $\hat{z}$, l'interaction $K^{-1}(\vec{q})$ présente un minimum à impulsion nulle $q_z = 0$. Dans le plan $(\widehat{q_x}\widehat{q_y})$, elle présente une structure hexagonale, caractéristique du réseau triangulaire sous-jacent (voir Fig.(B.1)). On trouve un maximum

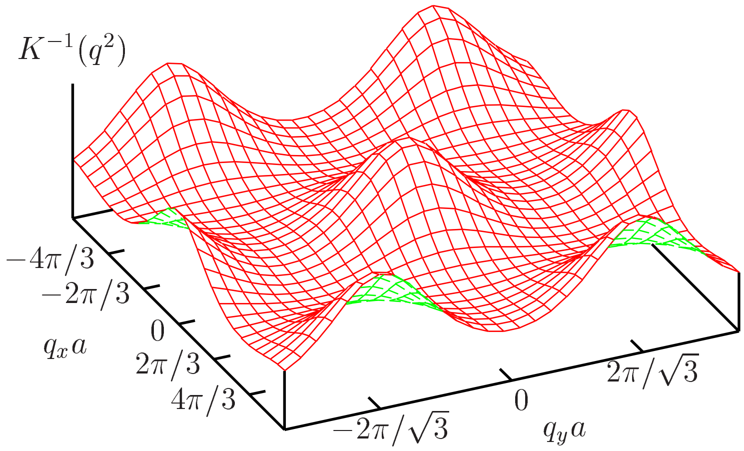


FIG. B.1 – Interaction à deux corps $K^{-1}(q)$ dans le plan $(\widehat{q_x}\widehat{q_y})$.

à impulsion nulle, et autour, six minima dégénérés aux vecteurs d'onde :

$$\begin{cases} (\pm\frac{4\pi}{3a}, 0, 0) \\ (\pm\frac{2\pi}{3a}, \pm\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, 0) \end{cases}, \tag{B.14}$$

correspondant aux modes critiques de la théorie. L'étude du réseau réciproque du réseau triangulaire montre que ces six vecteurs d'onde correspondent aux sommets de l'hexagone formant la première zone de Brillouin dans le plan $(\widehat{xy})$ (voir Fig.(B.2)). Ces six minima ne sont pas tous indépendants. En effet, modulo les vecteurs de base

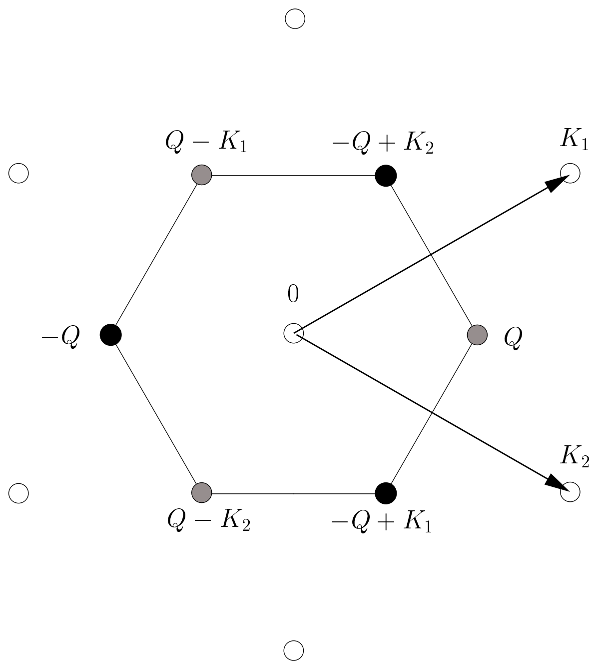


Fig. B.2 – Première zone de Brillouin du réseau triangulaire. Les points blancs représentent les sites du réseau réciproque les plus proches de l'origine. Les minima de l'interaction $K^{-1}(\vec{q})$ se situent aux sommets de l'hexagone, et se rangent en deux classes, représentées par les points gris et noirs.

$\vec{K}_1$ et $\vec{K}_2$ du réseau réciproque, certains minima sont équivalent. Il existe en fait deux modes critiques indépendants, représentés en gris et noir sur la Fig.(B.2). C'est cette propriété qui différencie les antiferromagnétiques frustrés des modèles ferromagnétiques et antiferromagnétiques non frustrés. Il est en effet facile de se convaincre que ces derniers présentent une seule famille de modes critiques !

Nous avons maintenant déterminé l'action à laquelle sont soumis les modes $\vec{\varphi}$. Cette dernière est assez complexe, et contient en fait trop d'informations. En effet, seuls les modes critiques, minimisant $K^{-1}(\vec{q})$ présentent une divergence de la susceptibilité, et contribuent au comportement invariant d'échelle du système. Les autres modes ne sont pas critiques, et affectent seulement les propriétés non universelles du système, telle la température critique. L'étude des propriétés universelles du système ne nécessite pas de caractériser l'interaction de tous les modes, mais uniquement des modes critiques. Nous allons donc extraire cette information de l'interaction déterminée précédemment.

Afin de représenter commodément ces deux modes critiques, divisons la zone de Brillouin en trois parties $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. La zone $\mathcal{A}$ correspond à une petite région de l'espace réciproque situé autour du mode critique dessiné en gris sur la Fig.(B.2). La région entourant l'autre mode critique correspond à $\mathcal{B}$, et la zone $\mathcal{C}$ recouvre le reste de l'espace réciproque. Décomposons également le champ φ en trois champs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et

$\vec{C}$ à support sur les trois sous-parties de la zone de Brillouin, et réécrivons l'action en terme de ces nouveaux champs. L'interaction à deux corps prend la forme :

$$\vec{\varphi}_{q_1}.\vec{\varphi}_{q_2}\ \delta(\vec{q_1}+\vec{q_2}) = (\vec{A}_{q_1}+\vec{B}_{q_1}+\vec{C}_{q_1}).(\vec{A}_{q_2}+\vec{B}_{q_2}+\vec{C}_{q_2})\ \delta(\vec{q_1}+\vec{q_2})\ . \tag{B.15}$$

Comme nous sommes intéressés uniquement par les modes critiques, nous éliminons $\vec{C}$ de cette expression. De plus la contribution des termes en $\vec{A}^2$ et $\vec{B}^2$ est nulle du fait de la conservation de l'impulsion. Il est en effet impossible de trouver deux vecteurs d'ondes appartenant à la zone $\mathcal{A}$ dont la somme soit un nœud du réseau réciproque. Aussi, l'interaction à deux corps prend la forme :

$$\vec{\varphi}_{q_1}.\vec{\varphi}_{q_2}\ \delta(\vec{q_1}+\vec{q_2}) = 2\vec{A}_{q_1}.\vec{B}_{q_2}\ \delta(\vec{q_1}+\vec{q_2})\ . \tag{B.16}$$

De même, l'interaction à quatre corps prend la forme[2] :

$$(\vec{\varphi}^2)^2 = 2(\vec{A}^2)(\vec{B}^2) + 4(\vec{A}.\vec{B})^2\ . \tag{B.17}$$

Finalement, développons l'interaction $K(\vec{q})$ au voisinage d'un des modes critiques $\vec{Q}$, au second ordre en impulsion :

$$K^{-1}(\vec{Q}+\vec{\delta q}) \simeq b_0 + b_1^{xy}(\delta q_x^2 + \delta q_y^2) + b_1^z \delta q_z^2 + \ldots, \tag{B.18}$$

avec :

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{-3J+2J'+J_0} \\ b_1^{xy} = -\dfrac{3J\ a^2}{4(-3J+2J'+J_0)^2} \\ b_1^z = \dfrac{J'\ a^2}{(-3J+2J'+J_0)^2} \end{cases}, \tag{B.19}$$

où b_0, b_1^{xy} et b_1^z sont positifs. L'interaction pour les seuls modes critiques s'écrit :

$$\begin{aligned} S(\vec{A},\vec{B}) = {\sum}' &\left(b_1^{xy}(\delta q_x^2+\delta q_y^2) + b_1^z \delta q_z^2\right)\vec{A}\vec{B} \\ &+ (2a_1+b_0)\vec{A}\vec{B} + a_2(2(\vec{A}^2)(\vec{B}^2) + 4(\vec{A}.\vec{B})^2)\ , \end{aligned} \tag{B.20}$$

où la somme porte sur toutes les combinaisons d'impulsions satisfaisant la contrainte de conservation de l'impulsion.

Deux transformations sont encore nécessaires avant d'utiliser l'action Eq.(B.20). Tout d'abord, remarquons que les directions $\widehat{x}, \widehat{y}$ et la direction z ne sont pas équivalentes. Toutefois cette anisotropie n'est pas pertinente, et l'on s'attend à ce qu'après quelques étapes du groupe de renormalisation, l'isotropie de l'espace soit rétablie. Le terme cinétique devient alors similaire dans toutes les directions, avec une constante de couplage effective $-b_1^{\text{eff}}$. La deuxième transformation consiste à redéfinir les champs afin :

[2] Lorsqu'on développe $(\vec{A}+\vec{B})^n$, les termes ayant n_A puissances de $\vec{A}$ et n_B puissances de $\vec{B}$ sont susceptibles de satisfaire la contrainte de conservation de l'impulsion si $n_A + 2n_B = 0 \mod 3$.

- de tenir compte de la symétrie $\vec{S}^\star_{\vec{q}} = \vec{S}_{-\vec{q}}$, conséquence du fait que les degrés de liberté dans l'espace réel sont à composantes réelles ;
- de normaliser les champs de telle sorte que le terme cinétique soit juste précédé d'un facteur 1/2.

Nous introduisons donc les deux champs $\vec{\varphi_1}$ et $\vec{\varphi_2}$, tels que :

$$\begin{cases} \vec{A}_{\vec{q}} = \dfrac{1}{\sqrt{2b_1^{\text{eff}}}}(\vec{\varphi}_{1\vec{q}} + i\vec{\varphi}_{2\vec{q}}) \\ \vec{B}_{\vec{q}} = \dfrac{1}{\sqrt{2b_1^{\text{eff}}}}(\vec{\varphi}_{1\vec{q}} - i\vec{\varphi}_{2\vec{q}}) \end{cases}, \tag{B.21}$$

vérifiant chacun $\vec{\varphi}_{i\vec{q}}^{\star} = \vec{\varphi}_{i-\vec{q}}$. En fonction de ces nouveaux champs, l'action (B.20) prend la forme :

$$\begin{aligned} S(\vec{\varphi_1}, \vec{\varphi_2}) = \sum{}' \ & \frac{1}{2}q^2(\vec{\varphi_1}^2 + \vec{\varphi_2}^2) + c_1(\vec{\varphi_1}^2 + \vec{\varphi_2}^2) \\ & + c_2(6(\vec{\varphi_1}^2 + \vec{\varphi_2}^2)^2 + 8((\vec{\varphi_1}.\vec{\varphi_2})^2 - (\vec{\varphi_1}^2\vec{\varphi_2}^2)) \end{aligned} \tag{B.22}$$

où

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{2a_1 + b_0}{2b_1^{\text{eff}}} \\ c_2 = \dfrac{a_2}{4(b_1^{\text{eff}})^2} \end{cases} \tag{B.23}$$

B.3 Hélimagnétiques

Une discussion similaire peut être menée pour traiter le cas des hélimagnétiques. La matrice d'interaction est déterminée par une interaction ferromagnétique J_1 entre plus proches voisins et une interaction antiferromagnétiques J_2 entre second plus proches voisins dans la direction $\widehat{z}$. Dans les directions orthogonales, et comme dans les cas traité précédemment, le signe de l'interaction ne change pas les propriétés physiques du système. Nous choisissons ici une interaction ferromagnétique J_3. Finalement, nous introduisons une interaction diagonale J_0. La matrice d'interaction (équivalent de l'Eq.(B.12)) prend alors la forme :

$$K_{i,j} = \begin{cases} J_1 > 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont plus proches voisins dans la direction } \hat{z} \\ J_2 < 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont second plus proches voisins dans la direction } \hat{z} \\ J_3 > 0 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont plus proches voisins dans la direction } (\hat{x}\hat{y}) \\ J_0 > 0 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{B.24}$$

La transformée de Fourier de l'interaction prend alors la forme :

$$K(\vec{q}) = 2J_1\cos(q_z a) + 2J_2\cos(2q_z a) + 2J_3\left(\cos(q_x a) + \cos(q_y a)\right). \tag{B.25}$$

Déterminons maintenant les modes critiques du système correspondant comme d'habitude aux minima de l'interaction à deux corps $K^{-1}(\vec{q})$. Si $|J_1| > 4|J_2|$, l'interaction

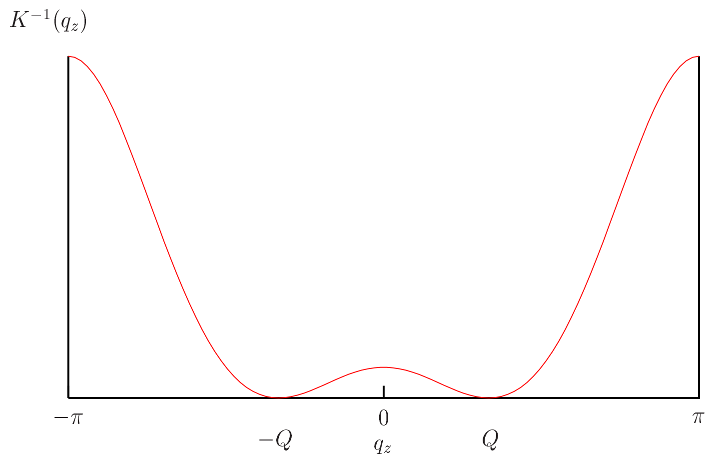


FIG. B.3 – Interaction à deux corps $K^{-1}(q)$ dans la direction $\widehat{q}_z$.

admet un unique minimum à impulsion nulle, et le système présente toutes les caractéristiques d'un ferromagnétique. En revanche, si $|J_1| < 4|J_2|$ l'interaction prend la forme décrite par la Fig.(B.3), et présente deux minima pour les vecteurs d'onde $\pm Q$, avec :

$$\begin{cases} q_z = \arccos\left(-\dfrac{J_1}{4J_2}\right) \\ q_x = q_y = 0 \end{cases} . \tag{B.26}$$

Un développement similaire à Eq.(B.18) donne les coefficients :

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{-4J_2}{J_1^2 + 4J_2\left(-J_0 + 2J_2 - 4J_3\right)} \\ b_1^z = \dfrac{-4a^2 J_2\left(-J_1^2 + 16J_2^2\right)}{\left({J_1}^2 + 4J_2\,\left(-J_0 + 2J_2 - 4J_3\right)\right)^2} \\ b_1^{xy} = \dfrac{16a^2 {J_2}^2 J_3}{\left(J_1^2 + 4J2\left(-J_0 + 2J_2 - 4J_3\right)\right)^2} \end{cases} , \tag{B.27}$$

Le reste de la discussion est similaire, et mène aux mêmes résultats Eq.(B.22),(B.23), où les coefficients b sont remplacés par l'expression précédente.

B.4 Symétries

Nous pouvons maintenant étudier les symétries des modes critiques du système. Il est déjà apparent que l'action Eq.(B.22) présente une symétrie $SO(n)$, consistant à appliquer simultanément une même rotation aux deux vecteurs $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$. L'action présente en outre une symétrie dont l'effet est de combiner les composantes des deux vecteurs. Cette dernière apparaît clairement si l'on range $\vec{\varphi_1}$ et $\vec{\varphi_2}$ dans une matrice à n lignes et 2 colonnes :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_1^n & \varphi_2^n \end{pmatrix}. \tag{B.28}$$

En multipliant la transposée de φ par φ, on obtient une matrice 2×2 :

$$^t\varphi.\varphi = \begin{pmatrix} \vec{\varphi_1}^2 & \vec{\varphi_1}.\vec{\varphi_2} \\ \vec{\varphi_1}.\vec{\varphi_2} & \vec{\varphi_2}^2 \end{pmatrix}. \tag{B.29}$$

On peut maintenant écrire l'action Eq.(B.22) en fonction de cette matrice 2×2 :

$$\begin{aligned} S(\vec{\varphi_1}, \vec{\varphi_2}) = {\sum}' \frac{1}{2} q^2 \text{ Tr } {}^t\varphi.\varphi + c_1 \text{ Tr } {}^t\varphi.\varphi \\ + c_2 (6(\text{ Tr } {}^t\varphi.\varphi)^2 - 8 \overset{t}{\det} \varphi.\varphi) \end{aligned} \tag{B.30}$$

Il est maintenant facile de vérifier que l'action (B.30) est invariante par multiplication à gauche par une matrice U de $O(n)$ et à droite par une matrice V de $O(2)$:

$$\varphi \to U.\varphi.V \tag{B.31}$$

L'action présente donc une symétrie $O(n) \times O(2)$.

Afin de déterminer le schéma de brisure de la symétrie, il nous reste à déterminer les opérations de symétrie laissant l'état fondamental inchangé. Comme discuté dans le corps du texte, l'état fondamental des hélimagnétiques et des antiferromagnétiques frustré correspond à une configuration où les champs $\vec{\varphi_1}$ et $\vec{\varphi_2}$ sont orthogonaux, et ont la même norme :

$$\varphi_i.\varphi_j = \text{cte } \delta_{i,j} \tag{B.32}$$

Considérons maintenant les opérations du groupe de symétrie $O(n) \times O(2)$ laissant cet état fondamental inchangé. Il y a tout d'abord les rotations à gauche, laissant les deux premières directions inchangées. Celles-ci forment un sous-groupe $O(n-2)$. En outre, une opération à gauche dans le plan contenant les deux premières directions peut être compensée par l'opération inverse effectuée à droite. Ce groupe $O(2)_{diag.}$ est facilement visualisé en choisissant un état fondamental particulier :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 \\ 0 & \varphi_0 \\ 0 & 0 \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.33}$$

visiblement invariant sous la transformation (B.31), où :

$$U = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{V^{-1}}} & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.34}$$

L'état fondamental admet donc comme symétries résiduelles $O(n-2)\times O(2)_{diag.}$. Le schéma de brisure de symétrie caractérisant la transition de phase des antiferromagnétiques frustrés est donc :

$$\frac{O(n)\times O(2)}{O(n-2)\times O(2)_{diag.}}. \tag{B.35}$$

Annexe C

Articles

Frustrated Heisenberg Magnets: A Nonperturbative Approach

M. Tissier,* B. Delamotte,† and D. Mouhanna‡
Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Universités Paris VI-Pierre et Marie Curie-Paris VII-Denis Diderot, 2 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
(Received 21 January 2000)

Frustrated magnets are a notorious example of where usual perturbative methods fail. Using a nonperturbative Wilson-like approach, we get a coherent picture of the physics of frustrated Heisenberg magnets everywhere between $d = 2$ and $d = 4$. We recover all known perturbative results in a single framework and find the transition to be weakly of first order in $d = 3$. We compute effective exponents that are in good agreement with numerical and experimental data.

PACS numbers: 75.10.Hk, 11.10.Hi, 11.15.Tk, 64.60.–i

Understanding the effect of competing interactions in three-dimensional classical spin systems is one of the great challenges of condensed matter physics. However, after twenty five years of investigations, the nature of the universality class for the phase transition of the simplest frustrated model, the antiferromagnetic Heisenberg model on a triangular lattice (AFHT model), is still a strongly debated question [1]. Because of frustration, the ground state of the AFHT model is given by a canted configuration—the famous 120° structure—that implies a matrixlike order parameter [2] and, thus, the possibility of a new universality class. Experiments performed on materials which are supposed to belong to the AFHT universality class display indeed exponents different from those of the standard $O(N)$ universality class: for VCl_2 [3], $\beta = 0.20(2)$, $\gamma = 1.05(3)$, and $\nu = 0.62(5)$; for VBr_2 [4], $\alpha = 0.30(5)$; for CuFUD [5], $\beta = 0.22(2)$, for $Fe[S_2CN(C_2H_5)_2]_2Cl$ [6–8], $\beta = 0.24(1)$ and $\gamma = 1.16(3)$. These results, however, call for several comments. First, the exponents violate the scaling relations, at least by 2 standard deviations. Second, they differ significantly from those obtained by Monte Carlo (MC) simulations performed either directly on the AFHT model [$\nu \simeq 0.59(1)$, $\gamma \simeq 1.17(2), \beta \simeq 0.29(1), \alpha \simeq 0.24(2)$] or on models supposedly belonging to the same universality class: AFHT with rigid constraints [$\nu = 0.504(10), \gamma = 1.074(29), \beta = 0.221(9), \alpha = 0.488(30)$], dihedral (i.e., $V_{3,2}$ Stiefel) models [$\nu \simeq 0.51(1), \gamma \simeq 1.13(2), \beta \simeq 0.193(4), \alpha \simeq 0.47(3)$]. See Ref. [9] for a review, and references therein. Finally, the anomalous dimensions η obtained by means of scaling relations are found to be negative in experiments as well as in MC simulations, a result forbidden by first principles for second order phase transitions [10]. All of these results are hardly compatible with the assumption of universality. It has been proposed that the exponents are, in fact, effective exponents characterizing a very weak first order transition, the so-called "almost second order phase transition" [11–13].

From the theoretical point of view the situation is also very unsatisfactory since one does not have a coherent picture of the expected critical behavior of the AFHT model between two and four dimensions. On the one hand, the weak coupling expansion performed on the suitable Landau-Ginzburg-Wilson (LGW) model in the vicinity of $d = 4$ leads to a first order phase transition due to the lack of a stable fixed point [14–16]. On the other hand, the low temperature expansion performed around two dimensions on the nonlinear sigma (NLσ) model predicts a second order phase transition of the standard $O(4)/O(3)$ universality class [17]. Since there is no indication that these perturbative results should fail in their respective domain of validity, i.e., for small $\epsilon = 4 - d$ and small $\epsilon = d - 2$, this situation raises two problems. First, and contrary to what happens in the nonfrustrated case, one cannot safely predict the three-dimensional behavior from naive extrapolations of the perturbative results. Although a direct computation in three dimensions, possible on the LGW model [18,19], can circumvent this difficulty, such an approach misses a second fundamental problem: the incompatibility between the symmetries of the NLσ and LGW models. Indeed, the renormalization group flow drives the NLσ model action towards an $O(4)$ symmetric regime, more symmetric than the microscopical system, a phenomenon that *cannot* occur within all previous treatments of the LGW model (see Ref. [17] and below). The LGW model is therefore unable to find the $O(4)$ behavior which has been nevertheless observed numerically in $d = 2$ [20]. This raises serious doubts on the perturbative analysis of the LGW model away from $d = 4$. Reciprocally, the *perturbative* analysis of the NLσ model, based on a Goldstone mode expansion, predicts an $O(4)/O(3)$ fixed point everywhere between $d = 2$ and $d = 4$, as for the $N = 4$ ferromagnetic model, in contradiction with the perturbative LGW results and the experimental and numerical situation in $d = 3$. All of this suggests that nonperturbative features could play a major role and thus imposes one to go beyond the standard perturbative approaches.

In this Letter we accomplish this program by using the Wilson renormalization group framework [21]. We obtain a coherent picture of the physics of the AFHT model everywhere between $d = 2$ and $d = 4$. We find that the fixed point expected from the NLσ model approach exists indeed in the vicinity of $d = 2$ but disappears below, and close to, three dimensions. The transition for AFHT

 0031-9007/00/84(22)/5208(4)$15.00 © 2000 The American Physical Society

in $d = 3$ is thus *weakly* first order, contrary to the different predictions of both a new universality class [2] and an $O(4)/O(3)$ second order behavior [17]. We obtain effective exponents compatible with the numerical and experimental data quoted above. For generalization to $N > 4$ component spins, we find the transition in $d = 3$ to be second order with exponents in good agreement with recent extensive MC simulations—contrary to those found from three loop Padé-Borel resummed series [19].

Our approach relies on the concept of effective average action [22,23], $\Gamma_k[\phi]$, which is a coarse grained free energy where only fluctuations with momenta $q \geq k$ have been integrated out. The field ϕ corresponds to an average order parameter at scale k, the analog of a magnetization at this scale. At the scale of the inverse lattice spacing Λ, $\Gamma_{k=\Lambda}$ is the continuum limit of the lattice Hamiltonian obtained, for example, by means of a Hubbard-Stratonovich transformation. On the other hand, the usual free energy Γ, generating one particle-irreducible correlation function, is recovered in the limit $k \rightarrow 0$. The k dependence of Γ_k is controlled by an exact evolution equation [24,25]:

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial t} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left\{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \frac{\partial R_k}{\partial t}\right\}, \tag{1}$$

where $t = \ln k/\Lambda$. The trace has to be understood as a momenta integral as well as a summation over internal indices. In Eq. (1), R_k is the effective infrared cutoff which suppresses the propagation of modes with momenta $q < k$. A convenient cutoff is provided by $R_k(q) = Zq^2/[\exp(q^2/k^2) - 1]$ [24,26], where Z is the field renormalization. In Eq. (1), $\Gamma_k^{(2)}$ is the *exact field-dependent* inverse propagator, i.e., the second derivative of Γ_k.

The effective average action Γ_k is a functional invariant under the symmetry group of the system and thus depends on all of the invariants built from the average order parameter. In our case, it is well known that the order parameter is a set of two vectors $\vec{\phi}_1$ and $\vec{\phi}_2$ which can be gathered in a real $N \times 2$ matrix ϕ_{ab} for N-component spins [2]. The symmetry of the system is the usual spatial rotation group $O(N)$ multiplied by an $O(2)$ corresponding to the symmetry of the underlying triangular lattice [17]. This $O(2)$ is realized on ϕ_{ab} as a right $O(2)$ "rotation" that turns the $\vec{\phi}_i$ into each other. There are two independent $O(N) \otimes O(2)$ invariants built out of ϕ_{ab}: $\rho = \operatorname{Tr}{}^t\phi\phi$ and $\tau = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}({}^t\phi\phi)^2 - \frac{1}{4}(\operatorname{Tr}{}^t\phi\phi)^2$.

The exact effective average action involves all of the powers of ρ, τ and of derivative terms, and so Eq. (1) is a nonlinear functional equation, too difficult to be solved exactly in general. We therefore need to truncate it. One possibility is to keep in Γ_k only the momentum (i.e., derivative)-independent part, an approximation called the local potential approximation (LPA). In the case of frustrated magnets, this has been considered by Zumbach [11–13]. This approximation however misses the field renormalization and worse, as described below, the phenomenon of enlarged symmetry around $d = 2$ found perturbatively in the NLσ model [17]. This does not mean that this approximation is not useful: it is simply, in essence, unable to answer the question of the matching of the different perturbative approaches. Another truncation is, however, possible which preserves this possibility: it consists of an expansion of Γ_k around its minimum in order to keep a finite number of monomials in the invariants ρ and τ while including the derivative terms which allow one to recover the different perturbative results. We choose the simplest such truncation:

$$\Gamma_k = \int d^d x \left\{\frac{Z}{2}\nabla\phi_{ab}\nabla\phi_{ab} + \frac{\omega}{4}(\epsilon_{ab}\phi_{ca}\nabla\phi_{cb})^2 + \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\rho}{2} - \kappa\right)^2 + \frac{\mu}{4}\tau\right\}, \tag{2}$$

where $\{\omega, \lambda, \kappa, \mu, Z\}$ are the coupling constants which parametrize the model. All terms but one—the "current term" $(\epsilon_{ab}\phi_{ca}\nabla\phi_{cb})^2$—are very natural and correspond to those appearing in the usual LGW action that realizes the symmetry breaking scheme of frustrated magnets. Indeed for λ and $\mu \geq 0$, the minimum of the action is realized by a configuration of the form $\phi_{ab}^{\min} = \sqrt{\kappa}\, R_{ab}$, where R_{ab} is a matrix built with two orthonormal N-component vectors. The symmetry of this minimum is a product of a diagonal $O(2)$ group and a residual $O(N-2)$ group. The symmetry breaking scheme is thus $O(N) \otimes O(2) \rightarrow O(N-2) \otimes O(2)_{\text{diag}}$ [17]. Note that, for $\phi_{ab} = \phi_{ab}^{\min}$, one has $\rho = 2\kappa$ and $\tau = 0$ so that Eq. (2) corresponds indeed to a quartic expansion around the minimum. The spectrum in the low temperature phase consists of $2N - 3$ Goldstone modes and three massive modes: one singlet of mass $m_1 = \kappa\lambda$ and one doublet of mass $m_2 = \kappa\mu$ which correspond to fluctuations of the relative angle and of the norms of the two vectors $\vec{\phi}_1$ and $\vec{\phi}_2$.

Without the current term, the truncation Eq. (2) is, however, not sufficient in our case. This term plays a crucial role since, for $N = 3$, it allows the model to enlarge its symmetry from $O(3) \otimes O(2)$ to $O(3) \otimes O(3) \sim O(4)$ at the fixed point around $d = 2$, leading to the well-known $O(4)/O(3)$ behavior [17]. The current term is systematically discarded in the perturbative treatment of the LGW model around four dimensions, for the—correct—reason that it is power-counting irrelevant. Here we can include it in our *ansatz* since it is, in any case, present in the full effective action Γ_k and, in fact, we *must* include it since it becomes relevant somewhere between two and four dimensions. The formalism we use is in charge to decide where it is important.

Let us emphasize that the effective average action method leads to nontrivial and/or new results even within a quartic truncation of Γ_k. One can mention the Kosterlitz-Thouless phase transition [27], low energy quantum chromodynamics [28], the Abelian Higgs model and superconductivity [29,30], matrix models [31], etc. The accuracy of the results thus obtained depends on two main features: (i) the smallness of the anomalous dimension η

and (ii) the fact that the thermodynamics of the system is controlled by a unique minimum of Γ_k.

The flow equations for the different coupling constants κ, λ, μ, ω, and Z are derived by using Eqs. (1) and (2) along the same lines as in [28]. The explicit recursion equations are too long to display and not particularly illuminating (see [32]). Moreover, they require a numerical analysis, apart in $d = 2 + \epsilon$ and in $d = 4 - \epsilon$, where, as we now see, they get analytically tractable.

The physics around two dimensions.—Around two dimensions, one expects that the perturbative "Goldstone mode" expansion of the NLσ model works well. In the Goldstone regime, the fluctuations of the modulus of $\vec{\phi}_1$ and $\vec{\phi}_2$ and of their relative angle are frozen. This corresponds to the large mass limit $m_{1r}, m_{2r} \to \infty$. In this limit, our equations greatly simplify since the coupling constants divide into two sets $\{\kappa, \omega, Z\}$ and $\{\lambda, \mu\}$ that do not mix. We only quote here the flow equations for the renormalized coupling constants of the first set:

$$\begin{cases} \dfrac{d\kappa_r}{dt} = -(d - 2 + \eta)\kappa_r + \dfrac{N-2}{2\pi} + \dfrac{1}{4\pi(1 + \kappa_r\omega_r)} \\ \dfrac{d\omega_r}{dt} = (-2 + d + 2\eta)\omega_r + \dfrac{1 + \kappa_r\omega_r + (N-1)\kappa_r^2\omega_r^2 + (N-2)\kappa_r^3\omega_r^3}{2\kappa_r^2\pi(1 + \kappa_r\omega_r)} \\ \quad \eta = -\dfrac{d\,\ln Z}{dt} = \dfrac{3 + 4\kappa_r\omega_r + 2\kappa_r^2\omega_r^2}{4\kappa_r\pi(1 + \kappa_r\omega_r)} \end{cases} \tag{3}$$

These equations admit a fixed point for any $N > 2$ of coordinates $\kappa_r^* \simeq 1/\epsilon$, $\omega_r^* \simeq \epsilon$, while $\lambda_r^*, \mu_r^* \simeq$ cst. The masses m_{1r}^*, m_{2r}^* are thus very large, proving the consistency of the limit. In fact, with respect to the change of variables: $\eta_1 = \kappa_r$ and $\eta_2 = 2\kappa_r(1 + \kappa_r\omega_r)$, the equations for κ_r and ω_r are exactly those obtained at one loop in the perturbative analysis of the NLσ model [17]. For $N = 3$, they admit a fixed point for which the model is $O(4)$ symmetric.

Let us now recall how this phenomenon of enlarged symmetry for $N = 3$ can be understood directly on the partition function. At the fixed point, the potential gets infinitely deep so that one recovers the hard constraints of the NLσ model: $\vec{\phi}_1 \perp \vec{\phi}_2$ and $\vec{\phi}_1^2 = \vec{\phi}_2^2 = \kappa_r^*$. For $N = 3$, this allows us to rewrite the current term as the kinetic term of a third vector, the cross product of two others: $(\epsilon_{ab}\phi_{ca}\nabla\phi_{cb})^2 \propto (\nabla\vec{\phi}_3)^2$ with $\vec{\phi}_3 = \vec{\phi}_1 \wedge \vec{\phi}_2$. The order parameter of the system is then a trihedral of orthogonal vectors $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3)$. Thus, contrary to what could be expected from a naive expansion in powers of the fields, the current term plays a role as important as the usual kinetic terms. At the fixed point, ω_r takes a value such that the three vectors play a symmetric role and the symmetry breaking scheme is $O(3) \otimes O(3)/O(3) \sim O(4)/O(3)$ instead of $O(3) \otimes O(2)/O(2)$. Such a result is of course missed within the LPA [11–13]. Therefore, the presence of the current term not only improves the accuracy of the calculation but it is necessary for its consistency.

The physics around four dimensions.—Around four dimensions, we have expanded our equations at leading order in the coupling constants λ_r and μ_r. At this order the current term decouples and we are left with the following equations for the quartic coupling constants:

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda_r}{dt} = (-4 + d)\lambda_r + \dfrac{1}{16\pi^2}[4\lambda_r\mu_r + 4\mu_r^2 + \lambda_r^2(4 + N)], \\ \dfrac{d\mu_r}{dt} = (-4 + d)\mu_r + \dfrac{1}{16\pi^2}(6\lambda_r\mu_r + N\mu_r^2). \end{cases} \tag{4}$$

They are those obtained at one loop from the LGW approach [14]. These flow equations admit a stable fixed point for $N > N_c \simeq 21.8$, attesting that the phase transition is second order. For $N < N_c$ the transition is first order since no fixed point is found.

To higher orders, N_c depends on the dimension. In $d = 3$, three loop calculations resummed in the manner of Padé-Borel predict $N_c(d = 3) = 3.91$ [18]. Note, however, that this calculation exhibits unusual behaviors compared to the $O(N)$ case: the coefficients of the series do not decrease monotonically and the series themselves are not alternate [19]. These features reveal the poor summability of the series. Finally, in the $N = 6$ case, for which the transition is second order, the predictions based on a Padé-Borel resummation, which provides $\nu = 0.575$ and $\gamma = 1.121$ [19], are in clear disagreement with recent numerical simulations, for which $\nu = 0.700(11)$ and $\gamma = 1.383(36)$ [19].

From this point of view our approach has several advantages: first, since it matches with the one loop perturbative results in $d = 2$ and $d = 4$ it is likely that the error does not vary much with the dimension—a fact that has been confirmed in the $O(N)$ case for which the precision for a given truncation is almost uniform with d. Second, it does not rely on a Padé-Borel resummation and therefore is free of the above-mentionned problems of convergence.

Of course, our results will change while improving the *ansatz* Eq. (2) by incorporating terms of higher order in fields and derivatives. However, all cases already treated within the average action method suggest that the lowest order approximation gives fairly good results, even with this crude approximation.

The physics between two and four dimensions.—Let us first study the fate of the fixed point found analytically in $d = 2 + \epsilon$ for $N = 3$. By numerically integrating the flow equations, we find that this stable $O(4)/O(3)$ fixed point describes a smooth trajectory in the coupling constant space while d is increased. Our flow equations actually admit another—but unstable—fixed point, which moves toward the stable fixed point as the dimension is increased. At a critical dimension $d_c \simeq 2.87$, the two fixed points collapse and disappear. Above d_c, no other stable fixed point is found and we conclude that the transition is first order in $d = 3$. We thus show that the $O(4)/O(3)$ fixed point obtained from the NLσ model plays no role in the three-dimensional physics of frustrated magnets, as conjectured, for example, by David and Jolicœur [33] and Dobry and Diep [34]. We also discard the possibility of a new universality class conjectured on the basis of a naive extrapolation of the $\epsilon = 4 - d$ calculation [1,2]. The proximity of d_c with $d = 3$, however, lets open the possibility of a very weak first order phase transition with effective critical exponents. This behavior manifests itself in our equations by the existence of a minimum around which the flow slows down. This characterizes a very large, although finite, correlation length ξ. A rough estimate of this correlation length—a few hundred lattice spacings—indicates that a pseudoscaling behavior can be observed although ξ is not large enough to ensure a true universality. This could explain the broad spectrum of effective critical exponents found in experiments and numerical simulations. Although the flow equations do not have a fixed point, we are able to compute effective exponents by linearizing the flow equations around the minimum. We recover here the phenomenon of almost second order phase transition first introduced by Zumbach [11–13] within the LPA. To get accurate results we have to take into account the ϕ^6-like terms in our *ansatz*. We find $\nu = 0.53$, $\gamma = 1.03$, and $\beta = 0.28$, which lie in between the various sets of exponents found experimentally and numerically (see above). For comparison, Zumbach found $\nu \simeq 0.63$ in the LPA [11–13], the difference being mainly due to the anomalous dimension.

Finally, we find a true fixed point in $d = 3$ for N larger than a critical value $N_c(d = 3) \simeq 4$. For $N = 6$, we get $\nu = 0.74$ and $\gamma = 1.45$ which compare well with the Monte Carlo data $\nu = 0.700(11)$ and $\gamma = 1.383(36)$ [19]. They are close to the LPA results, where $\nu = 0.76$ [12], and much better than those obtained by a three loop calculation in $d = 3$ [19] (see above). We have checked that our exponents do not vary significantly when monomials of order 6 in the fields are included in the *ansatz* Eq. (2).

We thank J. Vidal for a careful reading of the manuscript. LPTHE is a laboratoire associé au CNRS UMR 7589.

*Email address: tissier@lpthe.jussieu.fr
†Email address: delamotte@lpthe.jussieu.fr
‡Email address: mouhanna@lpthe.jussieu.fr

[1] H. Kawamura, J. Phys. Condens. Matter **10**, 4707 (1998).
[2] H. Kawamura, Phys. Rev. B **38**, 4916 (1988).
[3] H. Kadowaki, K. Ubukoshi, K. Hirakawa, J. L. Martinez, and G. Shirane, J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 4027 (1987).
[4] J. Wosnitza, R. Deutschmann, H. von Löhneysen, and R. K. Kremer, J. Phys. Condens. Matter **6**, 8045 (1994).
[5] K. Koyama and M. Matsuura, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 4085 (1985).
[6] G. C. DeFotis, F. Palacio, and R. L. Carlin, Physica (Amsterdam) **95B**, 380 (1978).
[7] G. C. DeFotis and S. A. Pugh, Phys. Rev. B **24**, 6497 (1981).
[8] G. C. DeFotis and J. R. Laughlin, J. Magn. Magn. Mater. **54–57**, 713 (1986).
[9] D. Loison and K. D. Schotte, cond-mat/0001135.
[10] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, New York, 1989).
[11] G. Zumbach, Phys. Rev. Lett. **71**, 2421 (1993).
[12] G. Zumbach, Nucl. Phys. **B413**, 771 (1994).
[13] G. Zumbach, Phys. Lett. A **190**, 225 (1994).
[14] D. Bailin, A. Love, and M. A. Moore, J. Phys. C **10**, 1159 (1977).
[15] T. Garel and P. Pfeuty, J. Phys. C **L9**, 245 (1976).
[16] M. Yosefin and E. Domany, Phys. Rev. B **32**, 1778 (1985).
[17] P. Azaria, B. Delamotte, F. Delduc, and Th. Jolicœur, Nucl. Phys. **B408**, 485 (1993).
[18] S. A. Antonenko and A. I. Sokolov, Phys. Rev. B **49**, 15 901 (1994).
[19] D. Loison, A. I. Sokolov, B. Delamotte, S. A. Antonenko, K. D. Schotte, and H. T. Diep, cond-mat/0001105.
[20] B. W. Southern and A. P. Young, Phys. Rev. B **48**, 13 170 (1993).
[21] K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. C **12**, 75 (1974).
[22] C. Wetterich, Nucl. Phys. **B352**, 529 (1991).
[23] C. Wetterich, Z. Phys. C **57**, 451 (1993).
[24] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
[25] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2411 (1994).
[26] T. R. Morris and J. F. Tighe, JHEP **8**, 007 (1999).
[27] M. Grater and C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **75**, 378 (1995).
[28] D.-U. Jungnickel and C. Wetterich, Phys. Rev. D **53**, 5142 (1996).
[29] B. Bergerhoff, F. Freire, D. F. Litim, S. Lola, and C. Wetterich, Phys. Rev. B **53**, 5734 (1996).
[30] B. Bergerhoff, D. Litim, S. Lola, and C. Wetterich, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 4273 (1996).
[31] M. Tissier, D. Mouhanna, and B. Delamotte, cond-mat/9908352.
[32] M. Tissier, B. Delamotte, and D. Mouhanna (to be published). Equations available at http://www.lpthe.jussieu.fr/~tissier.
[33] F. David and T. Jolicœur, Phys. Rev. Lett. **76**, 3148 (1996).
[34] A. Dobry and H. T. Diep, Phys. Rev. B **51**, 6731 (1995).

Nonperturbative approach of the principal chiral model between two and four dimensions

M. Tissier, D. Mouhanna, and B. Delamotte
Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Universités Paris VI-Pierre et Marie Curie, Paris VII–Denis Diderot, 2 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
(Received 10 February 2000)

We investigate the principal chiral model between two and four dimensions by means of a nonperturbative Wilson-like renormalization-group equation. We are thus able to follow the evolution of the effective coupling constants within this whole range of dimensions without having recourse to any kind of small parameter expansion. This allows us to identify its three-dimensional critical physics and to solve the long-standing discrepancy between the different perturbative approaches that characterizes the class of models to which the principal chiral model belongs.

The field theoretical approach to critical phenomena has provided one of the greatest achievements of theoretical physics in the past thirty years.[1] This program has been successfully applied to the $SO(N)/SO(N-1)$ spin systems for which a coherent picture has emerged from the various perturbative (weak-coupling, low-temperature, $1/N$) expansions,[2] as well as nonperturbative methods.[1,3–7] However, for many systems, such a satisfactory understanding has not yet been reached. This is actually the case of almost all models whose order parameter is not simply a vector and whose symmetry breaking pattern departs from the usual $SO(N)/SO(N-1)$ scheme. Among them are frustrated antiferromagnets,[8–11] the dipole-locked phase of superfluid ^{3}He,[12,13] superconductors,[14,15] Josephson junction arrays,[16] electroweak phase transition,[17,18] smectic liquid crystal,[21] etc. For such systems, the different perturbative predictions conflict. On the one hand, the weak coupling analysis performed around four dimensions on the Landau-Ginzburg-Wilson (LGW) model generally predicts a first order phase transition due to the lack of a stable fixed point.[14,13,22,18] On the other hand, the low temperature expansion performed around two dimensions by means of the corresponding nonlinear sigma (NLσ) model predicts a fixed point in $d=2+\epsilon$ dimensions, so that a second order phase transition is expected.[23,24,10] Finally, the results obtained from numerical and experimental studies in three dimensions vary from first to second order depending on the system. The disagreement between the perturbative approaches prevents one from safely extrapolating any of the perturbative results in $d=3$. Therefore, contrary to the $SO(N)/SO(N-1)$ case, the usual perturbative methods fail to provide the general picture of the critical physics of these systems. This problem clearly requires nonperturbative approaches. In this paper, we study the principal chiral model, the archetype of such a situation, by means of a Wilson *exact* renormalization group approach, a very efficient method to go beyond perturbation theory. A coherent scheme emerges, which might well be generic. The key point is that a nonperturbative fixed point is found, the presence of which allows us to remove the discrepancy between the perturbative results in $d=2$ and $d=4$. For the principal chiral model, this fixed point coalesces with the NLσ fixed point and they both disappear in a dimension smaller than 3 leading to predict a first order phase transition in $d=3$, in agreement with previous numerical works.[25]

The principal chiral model pertains, among others, to magnets with noncollinear spin ordering[26,10] as well as superfluid ^{3}He.[13,12] It describes the physics of systems whose order parameter consists in a triad of orthonormal three-component vectors $R=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ or, equivalently, in a rotation matrix. The lattice Hamiltonian of the principal chiral model is given by that of $SO(3)$ or $O(3)$ rotation matrices, interacting ferromagnetically:

$$H=-J\sum_{\langle i,j\rangle}\sum_{\alpha=1}^{3}\boldsymbol{e}^i_\alpha.\boldsymbol{e}^j_\alpha=-J\sum_{\langle i,j\rangle}\mathrm{Tr}\{{}^tR^iR^j\},\tag{1}$$

with $J>0$, ${}^tR^iR^i=\mathbb{1}$ and $\det R^i=\pm 1$ on each site. Note that for frustrated magnets and ^{3}He the further constraint $\det R^i=+1$ should or should not be added, depending on the underlying microscopic system. For the sake of simplicity, we discard this constraint in the following and let the determinant fluctuate. The Hamiltonian (1) is thus invariant under the $SO(3)\otimes O(3)$ group of left $U\in SO(3)$ and right $V\in O(3)$ global transformations: $R^i\rightarrow UR^iV$. In the low temperature phase, the residual symmetry group consists in a diagonal $SO(3)$ so that the symmetry breaking scheme is given by $SO(3)\otimes O(3)\rightarrow SO(3)$. The order parameter space of the model thus identifies with the $O(3)$ manifold.

Beyond its physical interest, the principal chiral model provides—as a direct generalization of the $O(N)$ vector model to matrices—the simplest example lying in the class of models depicted above: its NLσ model analysis exhibits a fixed point in $d=2+\epsilon$,[23,24,10] so that a second order phase transition is expected, whereas the weak coupling expansion performed in $d=4-\epsilon$ on the LGW model rather suggests a first order phase transition induced by fluctuations since no fixed point is identified.[27] In addition, the $1/N$ expansion predicts a continuous phase transition everywhere between two and four dimensions[27] in contradiction with the $N=3$ case in $d=4-\epsilon$. Finally, the investigations by Monte Carlo simulations of the $O(3)$ model largely favor a pronounced first order phase transition in three dimensions.[25]

Let us now briefly come back to the different perturbative approaches, their domain of validity and drawbacks. As for the $\epsilon=d-2$ expansion, the crucial fact is that the perturba-

 ©2000 The American Physical Society

tive β function of a NLσ model associated with the symmetry breaking scheme $G\to H$ only depends on the *local geometrical* structure of the manifold G/H.[24] It is therefore insensitive to its topology. For the principal chiral model, the $O(3)$ manifold is *locally* isomorphic to the four dimensional sphere $S^3=SO(4)/SO(3)$ whereas the two manifolds *globally* differ since $\Pi_0(O(3))=\Pi_1(O(3))=Z_2$, S^3 being free of topological defects. Therefore, the principal chiral model and the $N=4$ vector model have the *same* perturbative β function[23,28] although their low energy spectra differ by topological excitations. This raises serious doubts on the validity of the predictions based on the NLσ model approach, at least at sufficiently high temperature where these excitations are activated. On the other hand, the perturbative β function of the LGW model near $d=4$ is not ''geometrical'' since it depends on the representation of G spanned by the order parameter and could be sensitive to the topological degrees of freedom. Let us however emphasize that there is no general consensus on the ability of the *perturbative* treatment of the LGW model to deal with these topological degrees of freedom. In our case, both the LGW model and Monte Carlo simulations predict a first order phase transition, but this agreement should not be overestimated, since the *absence* of a fixed point near four dimensions is generally a poor information about the three-dimensional physics. Indeed several systems, among which type-II superconductors, are suspected to undergo a second order phase transition in three dimensions[15,29] although no fixed point is found around four dimensions. For such models, a nonperturbative approach in three dimensions[30,31] has proven the unreliability of the $\epsilon=4-d$ expansion, extrapolated to ϵ of order 1. The same situation is encountered for electroweak phase transition.[18] See, however, Refs. 19 and 20. All these features show the necessity to go beyond perturbation theory.

We perform here a nonperturbative approach of this problem by means of an exact Wilson-like renormalization group equation. We use the concept of effective average action $\Gamma_k[\phi]$,[32,33] which corresponds to a coarse-grained free energy functional and is obtained by integrating out all Fourier components of the *classical* field ϕ with momenta $q\geq k$. The usual effective action—generating one particle-irreducible correlation functions—is then recovered in the limit $k\to 0$. The k dependence of Γ_k is described by an exact evolution equation, the Legendre transformed of the Polchinski equation: [34–36]

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{ (\Gamma_k^{(2)}+R_k)^{-1}\frac{\partial R_k}{\partial t}\right\}, \tag{2}$$

where $t=\ln k/\Lambda$ and Λ is an ultraviolet cutoff. The trace has to be understood as a momenta integral as well as a summation over internal indices. In Eq. (2), R_k is the effective infrared cutoff which suppresses the propagation of modes with momenta $q<k$. A convenient cutoff is provided by[36,37]

$$R_k(q)=\frac{Z_k q^2}{e^{q^2/k^2}-1}, \tag{3}$$

where Z_k is the field renormalization. In Eq. (2), $\Gamma_k^{(2)}$ is the *exact field-dependent* inverse propagator—i.e., the second derivative of the effective average action Γ_k. This is what provides the nonperturbative content of the equation and its efficiency to recover critical exponents of the three-dimensional Heisenberg model,[38,6] to investigate the Kosterlitz-phase transition,[39] the physics of superconductors,[30,31] first order phase transition,[40] low energy QCD,[41] Yang-Mills theory,[42] etc.

Let us now deal with the principal chiral model. The exact evolution equation (2) is a nonlinear functional differential equation, far too difficult to be solved exactly. We must truncate Γ_k in order to keep a manageable number of coupling constants. We consider here a general $SO(3)\otimes O(3)$ quartic effective action:

$$\Gamma_k=\int d^dx\left\{\frac{1}{2}Z_k\partial_\mu\phi_{ab}\partial_\mu\phi_{ab}+\frac{\lambda}{12}(\rho-3\kappa)^2+\mu\tau\right\}, \tag{4}$$

where ϕ_{ab} is a real 3×3 matrix while $\rho=\mathrm{Tr}\,{}^t\phi\phi$ and $\tau=1/6(\mathrm{Tr}\,{}^t\phi\phi)^2-1/2\mathrm{Tr}\,({}^t\phi\phi)^2$ are both $SO(3)\otimes O(3)$ invariants. In Eq. (4) we have neglected all terms with more than two derivatives and derivative terms such as $\partial_\mu\rho\partial_\mu\rho$, assumed to be less relevant. For $\lambda\geq 0$ and $\mu\leq 0$, the minimum of the theory is realized by a configuration of the form $\phi_{ab}^{\min}=\sqrt{\kappa}R_{ab}$, R_{ab} being a rotation matrix. The symmetry of the minimum is a diagonal $SO(3)$ group so that the symmetry breaking scheme is $SO(3)\otimes O(3)/SO(3)$. Note that for $\phi_{ab}=\phi_{ab}^{\min}$ one has $\rho=3\kappa$ and $\tau=0$ so that Eq. (4) corresponds to a quartic expansion around this minimum.

The spectrum of the theory in the broken phase is obtained by studying small fluctuations around $\phi_{ab}^{\min}$. It consists in a triplet of Goldstone modes—corresponding to the three broken generators of the $O(3)$ group—and six massive modes related to the fluctuations of length and of relative angles of the axes of the matrix ϕ_{ab}: a quintuplet with mass $m_1=-4\mu\kappa$ and a singlet with mass $m_2=2\lambda\kappa$.

The coupling constants κ, λ and μ, in the ordered phase, are defined by

$$\left.\frac{\delta\Gamma_k}{\delta\rho}\right|_{\phi_{ab}^{\min}}=0,\quad \lambda=6\left.\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\rho^2}\right|_{\phi_{ab}^{\min}},\quad \mu=\left.\frac{\delta\Gamma_k}{\delta\tau}\right|_{\phi_{ab}^{\min}}. \tag{5}$$

Their k dependence is obtained by taking the t derivative of these relations, by using Eq. (2) and the *ansatz* Eq. (4). The flow for the field-renormalization Z_k, $\eta=-d\ln Z_k/dt$ is computed along the same line (cf. Ref. 41).

The fixed points show up for dimensionless renormalized quantities:

$$\kappa_r=Z_k k^{2-d}\kappa,\quad \lambda_r=Z_k^{-2}k^{(d-4)/2}\lambda,\quad \mu_r=Z_k^{-3/2}k^{(d-6)/2}\mu. \tag{6}$$

In terms of these parameters, we have obtained, after some work, the recursion equations in the ordered phase:

$$\frac{d\kappa_r}{dt}=-(d-2+\eta)\kappa_r-v_d\left[2l_1^d(0)+2l_1^d(m_{r_2})\right.$$
$$\left.+\frac{10}{3\lambda_r}(\lambda_r-4\mu_r)l_1^d(m_{r_1})\right],$$

$$\frac{d\lambda_r}{dt}=(d-4+2\eta)\lambda_r-v_d\bigg[2\lambda_r^2 l_2^d(0)+6\lambda_r^2 l_2^d(m_{r_2})+\frac{10}{3}(\lambda_r-4\mu_r)^2 l_2^d(m_{r_1})\bigg],$$

$$\frac{d\mu_r}{dt}=(d-4+2\eta)\mu_r+v_d\mu_r\bigg[\frac{3}{2}\,\frac{l_1^d(0)}{\kappa_r}+21\mu_r l_2^d(m_{r_1})+\mu_r l_2^d(0)+\frac{4(\lambda_r-\mu_r)}{(\lambda_r+2\mu_r)}\,\frac{l_1^d(m_{r_2})}{\kappa_r}-\frac{(11\lambda_r-2\mu_r)}{2(\lambda_r+2\mu_r)}\,\frac{l_1^d(m_{r_1})}{\kappa_r}\bigg], \tag{7}$$

$$\eta=-\frac{4v_d}{3d}\left[20\mu_r^2\kappa_r m_{2,2}^d(0,m_{r_1})+4\lambda_r^2\kappa_r m_{2,2}^d(0,m_{r_2})\right],$$

where $v_d^{-1}=2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$, $m_{r_1}=-4\mu_r\kappa_r$, and $m_{r_2}=2\lambda_r\kappa_r$. In Eq. (7) we have used the dimensionless ''threshold functions'':[6]

$$l_n^d(\omega)=\frac{n}{2}\int_0^\infty dy\,y^{d/2}s[y(1+r)+\omega]^{-(n+1)},$$

$$m_{2,2}^d(0,\omega)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty dy\,y^{d/2}\frac{\hat{\partial}}{\partial t}\,\frac{(1+r+yr')^2}{[y(1+r)]^2[y(1+r)+\omega]^2} \tag{8}$$

with $y=q^2/k^2$, $r=1/(e^y-1)$ and $s=-2ye^y/(e^y-1)^2$. In Eq. (8), $\hat{\partial}/\partial t$ acts only on the regulator $r(y)$. These threshold functions encode the non perturbative aspect of the recursion equations (7). As we now see, they also control the decoupling of the massive modes of the theory.

The physics around two dimensions. Let us first show how our recursion equations allow us to recover the predictions of the NLσ model around two dimensions. In the vicinity of $d=2$, we expect the existence of a regime where the physics is controlled by Goldstone modes, i.e., where the massive fluctuations are frozen. This regime is defined through the limit of large mass: m_{r_1} and $m_{r_2}\to\infty$. Using the dominant behavior of $m_{2,2}^{d=2}(0,\omega)$ when $\omega\to\infty$: $m_{2,2}^{d=2}(0,\omega)\simeq-2\omega^{-2}$, one gets

$$\eta\simeq\frac{3}{8\pi\kappa_r}. \tag{9}$$

On the other hand, the dominant contribution to the flow of κ_r in this limit is given by

$$\frac{d\kappa_r}{dt}\simeq-(d-2+\eta)\kappa_r-2v_d l_1^d(0) \tag{10}$$

since $l_n^d(\omega)\propto\omega^{-(n+1)}$ when $\omega\to\infty$. Using $l_1^{d=2}(0)=-2$ and combining Eq. (9) and Eq. (10) one obtains the flow for κ_r around two dimensions:

$$\frac{d\kappa_r}{dt}=-\epsilon\kappa_r+\frac{1}{8\pi}, \tag{11}$$

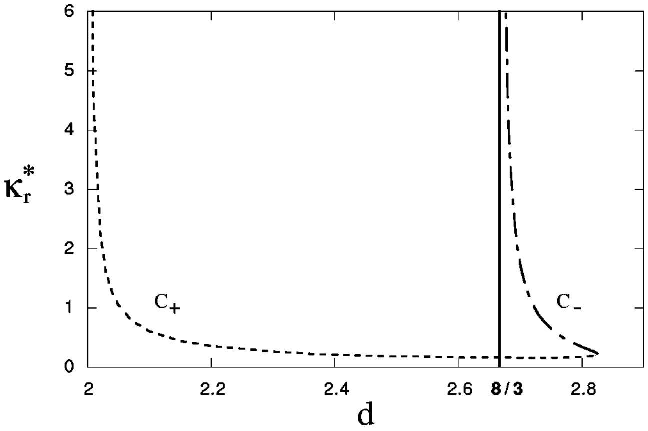


FIG. 1. κ_r^* as a function of d for the fixed points C_+ and C_-. The fixed point C_- exists only between $d_1=8/3$ and $d_2\simeq2.83$ where it annihilates with the principal chiral fixed point C_+. Above d_2 no fixed point is found.

with $\epsilon=d-2$. This is exactly the expected result provided by the low temperature expansion of the principal chiral model to first order.[28,23] Note that the correspondence with the ''temperature'' T of the NLσ model is obtained by the substitution $\kappa_r\to1/T$. Equation (11) predicts a fixed point at a temperature $T^*=1/\kappa_r^*=8\pi\epsilon$ of the $SO(4)/SO(3)$ universality class. We however emphasize that, if the existence of this fixed point is trustable in the immediate vicinity of two dimensions, where a Goldstone mode expansion is safe, it might be destabilized by nonperturbative effects away from two dimensions where the critical temperature T^* is finite.

The physics around four dimensions. The weak-coupling perturbative expansion around four dimensions for the LGW action is recovered in the linear regime corresponding to small masses: m_{r_1}, $m_{r_2}\ll1$. One then has to perform an expansion in powers of these masses. Using $l_n^d(\omega)\simeq l_n^d(0)-n\omega l_{n+1}^d(0)$ for $\omega\ll1$, and $l_2^{d=4}(0)=-2$ we find $\eta=O(\mu_r^2,\lambda_r^2)$ and

$$\frac{d\lambda_r}{dt}=-\epsilon\lambda_r+\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{17}{3}\lambda_r^2-\frac{40}{3}\lambda_r\mu_r+\frac{80}{3}\mu_r^2\right),$$

$$\frac{d\mu_r}{dt}=-\epsilon\mu_r+\frac{1}{8\pi^2}(-12\mu_r^2+4\lambda_r\mu_r), \tag{12}$$

with $\epsilon=4-d$. This is the result found by means of a direct weak coupling expansion.[27] We recall that these equations admit *no* fixed point around $d=4$.

The physics between two and four dimensions. We have numerically analyzed the flow equations (7) by varying the dimension between $d=2$ and $d=4$. We have identified the different fixed points and studied their stability. Note first that for $\mu=0$, Eq. (4) is the action of the $O(9)/O(8)$ vector model. As expected, we find the corresponding Wilson-Fisher fixed point, everywhere between two and four dimensions. The situation is far more unusual for the principal chiral model. Around two dimensions, we locate a stable fixed point C_+ characterized by $\kappa_r^*\simeq1/8\pi\epsilon$ (see Fig. 1) and $\eta\simeq3\epsilon$ with $\epsilon=d-2$, which identifies with the standard $SO(4)/SO(3)$NLσ model fixed point. The coupling constants λ_r^* and μ_r^* being finite at leading order in ϵ, the masses m_{r_1} and m_{r_2} diverge like $1/\epsilon$, which justifies the Goldstone mode treatment for this model. This situation remains qualitatively unchanged until the dimension $d_1=8/3$ is reached. At this particular value of d emerges a *new and unstable* fixed point C_- (Fig. 1) whose coordinates behave like $\kappa_r^*\simeq 1/\epsilon'$, $\lambda_r^*\simeq\epsilon'^3$ and $\mu_r^*\simeq$const, where $\epsilon'=d-8/3$, which corresponds to $m_{r_1}\to\infty$ and $m_{r_2}\to 0$. This behavior of the coupling constants as well as the rational value 8/3 can be obtained analytically from the flow equations (7). As the dimension d is increased, the two fixed points get closer, coalesce and finally disappear at $d_2\simeq 2.83$. Above this dimension no fixed point is found. The flow exhibits a runaway towards an instability region, which can be interpreted as a first order behavior. This result extends up to four dimensions, in agreement with the weak coupling expansion.[27]

In conclusion, our approach, based on the concept of average action, allows us to overcome the difficulties of perturbation theory and to obtain a coherent picture of the physics of the principal chiral model everywhere between two and four dimensions. Our results agree with all previous perturbative results[28,27,23] and coincide with the numerical prediction of a first order phase transition in three dimensions.[25] Previous studies of other models performed with the same method[43] lead us to believe on the robustness of our results beyond our truncation Eq. (4). We conjecture that the appearence of a fixed point and its subsequent annihilation with the chiral fixed point is a generic phenomenon. This can be substantiated by the observation that for generalizations of the principal chiral model ($n\times p$ matrices of real or complex fields, scalar electrodynamics, etc.) *perturbative* studies performed around four dimensions exhibit the same kind of annihilation of two fixed points.[13,18,22,27,44] The simplest assumption is that *for all those models* the analog of the C_+ fixed point reaches two dimensions and identifies with that of the NLσ model whereas the other fixed point C_- vanishes with an infinite value of κ_r^* in a non trivial dimension $d>2$. Finally, the precise dimension d_2 where the two fixed points annihilate should be model-dependent. Whether it is greater, smaller or slightly smaller than three will imply the order of the transition in $d=3$ to be second, first or almost second order.

We thank J. Vidal for a careful reading of the manuscript. LPTHE is a laboratoire associé au CNRS UMR 7589.

[1] K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep., Phys. Lett. **12C**, 75 (1974).
[2] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, New York, 1989).
[3] F. J. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. A **8**, 401 (1973).
[4] A. Hasenfratz and P. Hasenfratz, Nucl. Phys. B **270**, 687 (1986).
[5] G. Zumbach, Nucl. Phys. B **413**, 754 (1994).
[6] N. Tetradis and C. Wetterich, Nucl. Phys. B: Field Theory Stat. Syst. **422**, 541 (1994).
[7] T. R. Morris, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **42**, 811 (1995).
[8] T. Garel and P. Pfeuty, J. Phys. C **9**, 245 (1976).
[9] M. Yosefin and E. Domany, Phys. Rev. B **32**, 1778 (1985).
[10] P. Azaria, B. Delamotte, F. Delduc, and Th. Jolicoeur, Nucl. Phys. B **408**, 485 (1993).
[11] H. Kawamura, J. Phys.: Condens. Matter **10**, 4707 (1998).
[12] D. R. T. Jones, A. Love, and M. A. Moore, J. Phys. C **9**, 743 (1976).
[13] D. Bailin, A. Love, and M. A. Moore, J. Phys. C **10**, 1159 (1977).
[14] B. I. Halperin, T. C. Lubensky, and S. H. Ma, Phys. Rev. Lett. **32**, 292 (1974).
[15] C. Dasgupta and B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **47**, 1556 (1981).
[16] S. Teitel and C. Jayaprakash, Phys. Rev. B **27**, 598 (1983).
[17] I. D. Lawrie and C. Athorne, J. Phys. A **16**, 587 (1983).
[18] J. March-Russel, Phys. Lett. B **296**, 364 (1992).
[19] M. Laine and K. Rummukainen, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **73**, 180 (1999).
[20] Z. Fodor, hep-lat/9909162 (unpublished).
[21] B. I. Halperin and T. C. Lubensky, Solid State Commun. **14**, 997 (1974).
[22] P. Ginsparg, Nucl. Phys. B **170**, 388 (1980).
[23] E. Brézin, S. Hikami, and J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. B **165**, 528 (1980).
[24] D. H. Friedan, Ann. Phys. (N.Y.) **163**, 318 (1985).
[25] H. Kunz and G. Zumbach, J. Phys. A **26**, 3121 (1993).
[26] T. Dombre and N. Read, Phys. Rev. B **39**, 6797 (1989).
[27] H. Kawamura, J. Phys. Soc. Jpn. **59**, 2305 (1990).
[28] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **59B**, 79 (1975).
[29] L. Radzihovsky, Europhys. Lett. **29**, 227 (1995).
[30] B. Bergerhoff, F. Freire, D. F. Litim, S. Lola, and C. Wetterich, Phys. Rev. B **53**, 5734 (1996).
[31] B. Bergerhoff, D. Litim, S. Lola, and C. Wetterich, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 4273 (1996).
[32] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **352**, 529 (1991).
[33] C. Wetterich, Z. Phys. C **57**, 451 (1993).
[34] J. J. Polchinski, Nucl. Phys. B **231**, 269 (1984).
[35] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2411 (1994).
[36] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
[37] T. R. Morris and J. F. Tighe, hep-th/9906166 (unpublished).
[38] T. R. Morris, Nucl. Phys. B **509**, 637 (1998).
[39] M. Grater and C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **75**, 378 (1995).
[40] J. Berges and C. Wetterich, Nucl. Phys. B **487**, 675 (1997).
[41] D.-U. Jungnickel and C. Wetterich, Phys. Rev. D **53**, 5142 (1996).
[42] U. Ellwanger, M. Hirsch, and A. Weber, Z. Phys. C **69**, 687 (1996).
[43] D.-U. Jungnickel and C. Wetterich, hep-ph/9902316 (unpublished).
[44] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, and K. B. Varnashev, Phys. Lett. A **208**, 161 (1995).

The randomly dilute Ising model: a nonperturbative approach

Matthieu Tissier[1], Dominique Mouhanna[1], Julien Vidal[2] and Bertrand Delamotte[1]
[1] *Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, CNRS UMR 7589, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 France*
[2] *Groupe de Physique des Solides, CNRS UMR 7588, Universités Pierre et Marie Curie Paris 6 et Denis Diderot Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 France*

The N-vector cubic model relevant, among others, to the physics of the randomly dilute Ising model is analyzed in arbitrary dimension by means of an exact renormalization group equation. This study provides a unified picture of its critical physics between two and four dimensions. We give the critical exponents for the three-dimensional randomly dilute Ising model which are in good agreement with experimental and numerical data. The relevance of the cubic anisotropy in the $O(N)$ model is also treated.

PACS numbers: 75.10.Nr, 11.10.Hi, 11.15.Tk, 64.60.-i

Understanding the effects of a weak quenched disorder on magnetic systems is one of the great challenges of statistical physics. In this context, much attention has been paid to the Ising model with randomly distributed non magnetic impurities, i. e. the random Ising (RI) model (see[1] and[2] for reviews) described by the following hamiltonian :

$$H = -J \sum_{\langle i,j\rangle} \varepsilon_i \varepsilon_j S_i S_j \tag{1}$$

with $J > 0$. In Eq.(1), the S_i are Ising variables and the ε_i are quenched, uncorrelated, random variables taking the value 1 with probability p and 0 with probability $1-p$. According to the Harris criterion[3], the critical behavior of a pure system is altered by the disorder if its specific-heat exponent α is positive, as it is the case for the three-dimensional Ising model for which $\alpha \simeq 0.109$, $\beta \simeq 0.326$, $\gamma \simeq 1.24$, $\nu \simeq 0.630$ and $\eta \simeq 0.0335$ (see[4]).

Experimentally, there now exist several compounds corresponding to a RI model. They essentially consist in crystalline difluoride of iron or manganese where FeF_2 or MnF_2 is replaced by a non magnetic material such as ZnF_2. Experiments performed on $Fe_pZn_{1-p}F_2$ or $Mn_pZn_{1-p}F_2$ with different values of the concentration p have revealed scaling laws with exponents clearly distinct from those of the pure Ising model. One has (see[2]), for instance, for $Fe_pZn_{1-p}F_2$: $-0.12 \leq \alpha \leq -0.06$, $0.34 \leq \beta \leq 0.38$, $1.28 \leq \gamma \leq 1.4$ and $0.68 \leq \nu \leq 0.72$.

Numerically, early Monte Carlo simulations had confirmed the relevance of disorder for the Ising model (see[2]). The situation was however unclear since the critical exponents seemed to vary with p. Recently, Ballesteros et al.[5], by a careful infinite volume extrapolation of the data based upon an analysis of the correction-to-scaling terms, have reached the conclusion of dilution-independent critical exponents : $\alpha = -0.051(16)$, $\beta = 0.3546(28)$, $\gamma = 1.342(10)$, $\nu = 0.6837(53)$ and $\eta = 0.0374(45)$ for $0.4 \leq p \leq 0.9$.

From a theoretical point of view, the continuous field theory relevant to the study of the RI model is obtained by considering N replica of the model (1) and by taking the average over all possible realizations of the Gaussian distributed disorder. This leads to the Ginzburg-Landau-Wilson action for the N-vector model with cubic anisotropy[6,7] :

$$S = \int d^dx \left\{ \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} \left[(\partial_\mu \phi_a)^2 + m^2 \phi_a^2 \right] + u_1 \left(\sum_{a=1}^{N} \phi_a^2 \right)^2 + u_2 \sum_{a=1}^{N} \phi_a^4 \right\} \tag{2}$$

with $u_1 \propto -(1-p) < 0$ and $u_2 > 0$. The physics of the RI model is then obtained through the $N \to 0$ limit of the renormalization group (RG) equations obtained from action (2). The determination of these RG equations has been the subject of an intense activity, mainly performed within perturbative frameworks. Different renormalization schemes have been used : minimal subtraction (MS) scheme[6,8–11] or massive scheme[12–17] directly in three dimensions where the β functions have been computed up to five[11] and six loops[15] respectively. In each scheme, two different kinds of expansions for the corresponding β functions have been considered : *i)* ϵ-expansion (actually $\sqrt{\epsilon}$-expansion)[6,8–11] in the MS scheme and pseudo-$\sqrt{\epsilon}$-expansion[18] in the massive scheme *ii)* expansion in the coupling constants in three dimen sions[12–17]. It has, however, appeared that the series obtained in case *i)* are non-Borel summable and thus inappropriate for the quantitative evaluation of critical exponents behaviour[9,10,19], a result anticipated by several authors[20,21] within an analysis of the zero-dimensional problem (see however[22]). In case *ii)*, generalizations of Padé-Borel resummation techniques for several variables have been considered. In the MS scheme, Chisholm-Borel resummation scheme has been used[9,19,23]. This method has led to satisfying results at low order but has also appeared to be unstable with respect to the order of approximation. Indeed, the five-loop calculation does not allow to obtain real coordinates for the RI fixed point. This point has been related to the possible Borel-non-summability of the series[2,19,23]. In the massive scheme, Pelissetto et al.[12], using a procedure of resummation formulated within a subsequent analysis of the zero-dimensional problem[22], have employed Padé-Borel and conformal Padé-Borel resummation techniques within a six-loop RG calculation. They found a fixed point with exponents $\gamma = 1.330(17)$, $\nu = 0.678(10)$, $\eta = 0.030(3)$ which are in rather good agreement with previous perturbative results[13,14,16] and with the present-day numerical data. Let us however mention that, even in this case, the location of the fixed point is found to be calculation-dependent. This has led Pelissetto et al. to consider the possibility of an optimal truncation, possibly shorter than that considered in[12], a fact which could constitute a limitation of the method.

Despite the good agreement between experimental and numerical data with the perturbative results, we would like to stress upon the need for a complementary approach, not relying on perturbative expansions and this, for several reasons. The first one is that the perturbative field theoretical treatment implies the use of sophisticated resummation techniques which, if they proved to lead to safe results in the case of pure magnets, are far from being under control in the case of disordered systems[2,20–22]. The second reason for the use of a nonperturbative treatment is that there exist cases where the perturbative approach apparently seems to provide incorrect results. For instance, in the context of frustrated magnets, six-loop perturbative RG computations predict the existence of a fixed point[24] and, thus, a universal behavior for their critical physics. The experimental data, although displaying scaling laws, are rather in favor of a non-universal behavior, the critical exponents varying from one material to the other. Computations based on the exact RG formalism have shown to be able to reproduce this phenomenology[25,26]. Finally, there are situations where only specific techniques work well. For example, in two dimensions, one can use integrability or conformal invariance which, however, only operate in this dimension. All these features plead toward the use of a method that does not rely on the treatment of divergent series, that provides a systematic way to improve the results and that is able to tackle with the physics in any dimension.

A Wilson-like[27] nonperturbative treatment of (2) has been first performed by Newman and Riedel[28] on the basis on the scaling-field (SF) method. However, due to the complexity of its practical implementation, this approach has been given up and perturbative approaches largely preferred. We used here a nonperturbative approach based on the concept of effective average action $\Gamma_k[\phi]$[29,30] which appears as a very efficient tool. The quantity $\Gamma_k[\phi]$ has the meaning of a coarsed grained free energy at the scale k in the sense that it only includes the fluctuations with momenta $q \geq k$. It is a function of the effective order parameter ϕ at the scale k, the analog of a magnetization at this scale. In the low-energy limit $k \to 0$, all modes are integrated out so that $\Gamma_{k=0}$ identifies with the usual effective action Γ. At the microscopical scale Λ, no fluctuation has been integrated and $\Gamma_{k=\Lambda}$ identifies with the microscopic action S. The k-dependence of Γ_k is controlled by an exact evolution equation[31] :

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{ (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \frac{\partial R_k}{\partial t} \right\} , \qquad (3)$$

where $t = \ln(k/\Lambda)$. The trace has to be understood as a momentum integral as well as a summation over internal indices. In Eq.(3), $\Gamma_k^{(2)}$, the second derivative of Γ_k, is the *exact field-dependent* inverse propagator and R_k is the effective infrared cut-off which suppresses the propagation of modes with momenta $q < k$. A convenient cut-off is provided by[30] : $R_k(q) = Zq^2/(\exp(q^2/k^2) - 1)$, where Z is the field renormalization. The effective average action Γ_k is a functional invariant under the symmetry group of the system and thus includes all powers of all invariants – and their derivatives – built out from the average order parameter. Thus, Eq.(3) is a nonlinear functional equation, too difficult to be solved exactly so that, in practice, one has to deal with a truncated form of Γ_k. We choose here to perform an expansion of Γ_k around its minimum, keeping a finite number of monomials in the invariants and including the most relevant derivative terms[30]. We first consider the following truncation :

$$\begin{aligned}\Gamma_k \;=\; & \int d^d x \left\{ \sum_{a=1}^{N} \frac{Z}{2} (\partial_\mu \phi_a)^2 + u_1 \left(\sum_{a=1}^{N} ({\phi_a}^2 - \kappa) \right)^2 \right. \\ & \left. + \, u_2 \sum_{a=1}^{N} \left({\phi_a}^2 - \kappa \right)^2 \right\} \qquad (4)\end{aligned}$$

where $\{u_1, u_2, \kappa, Z\}$ are the k-dependent coupling constants that parametrize the evolution of the model with the scale k. The action (4) displays a discrete $\mathbb{Z}_N$ permutation symmetry. For $Nu_1 + u_2 > 0$, the minimum of action (4) is given by a replica symmetric configuration defined by $\phi_a^{min} = \sqrt{\kappa}$ for all a. Expression (4) thus corresponds to a quartic expansion of Γ_k around the minimum ϕ_a^{min}. There is no residual symmetry in the minimum so that the symmetry breaking scheme is given by a fully broken $\mathbb{Z}_N$ group. The spectrum of the theory in the broken phase is given by the eigenvalues of $\Gamma_k^{(2)}$ at the minimum and consists in a singlet of mass $m_1^2 = 8\kappa(Nu_1 + u_2)$ and a $(N-1)$-uplet of mass $m_2^2 = 8\kappa u_2$. When $u_2 = 0$, this $(N-1)$-uplet corresponds to the Goldstone modes of the $O(N)$-invariant model which gets here a mass proportionnal to the $O(N)$-symmetry-breaking-coupling-constant u_2.

Using Eq.(3) and Eq.(4), we have derived the flow equations for the dimensionless renormalized coupling constants κ_r, u_{1r}, u_{2r}, and Z :

$$
\begin{aligned}
\partial_t\kappa_r &= -(d-2+\eta)\kappa_r - \frac{2v_d}{N(Nu_{1r}+u_{2r})}\Big[3(Nu_{1r}+u_{2r})L_1^d[m_{1r}^2]+(N-1)(Nu_{1r}+3u_{2r})L_1^d[m_{2r}^2]\Big]\\
\partial_t u_{1r} &= (d-4+2\eta)u_{1r} - \frac{2v_d}{N^2\kappa_r}\Big[-Nu_{1r}L_1^d[m_{1r}^2]+Nu_{1r}L_1^d[m_{2r}^2]+36\kappa_r(Nu_{1r}+u_{2r})^2L_2^d[m_{1r}^2]\\
&+\Big(4(N-1)N^2\kappa_r u_{1r}^2+24N(N-1)\kappa_r u_{1r}u_{2r}+36\kappa_r u_{2r}^2\Big)L_2^d[m_{2r}^2]-8\kappa_r(Nu_{1r}+3u_{2r})^2L_{1,1}^d[m_{1r}^2,m_{2r}^2]\Big] \qquad (5)\\
\partial_t u_{2r} &= (d-4+2\eta)u_{1r} - \frac{2v_d}{N\kappa_r}\Big[Nu_{1r}L_1^d[m_{1r}^2]-Nu_{1r}L_1^d[m_{2r}^2]+36(N-2)\kappa_r u_{2r}^2L_2^d[m_{2r}^2]\\
&+8\kappa_r(Nu_{1r}+3u_{2r})^2L_{1,1}^d[m_{1r}^2,m_{2r}^2]\Big]\\
\eta &= -\partial_t\ln Z = -\frac{256\kappa_r v_d}{Nd}\Big[(N-1)u_{2r}^2M_{2,2}^d[0,m_{2r}^2]+(Nu_{1r}+u_{2r})^2M_{2,2}^d[0,m_{1r}^2]\Big]
\end{aligned}
$$

where $1/v_d = 2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$. In Eqs.(5), $L^d_{n_1,n_2}[m_{1r}^2,m_{2r}^2]$, $L_n^d[m_{ir}^2]$ and $M^d_{n_1,n_2}[m_{1r}^2,m_{2r}^2]$ are the "threshold functions"[32] that encode the nonperturbative aspects of the RG equations (5). We show how this set of equations provides a qualitative and, partly, quantitative description of the physics of model (2) between $d=2$ and $d=4$.

Around $d=4$, the fixed point coupling constants u_{1r} and u_{2r} are expected to be of order $\epsilon=4-d$. One can thus obtain simplifications of Eqs.(5) performing a small mass – m_{1r} and m_{2r} – expansion of the threshold functions. Using their asymptotic behavior one finds $\eta=O(u_{1r}^2,u_{2r}^2)$ and :

$$\partial_t u_{1r} = -\epsilon u_{1r}+\frac{1}{2\pi^2}\left[(N+8)u_{1r}^2+6u_{1r}u_{2r}\right] \qquad (6)$$

$$\partial_t u_{2r} = -\epsilon u_{2r}+\frac{1}{2\pi^2}\left[9u_{2r}^2+12u_{1r}u_{2r}\right]\ . \qquad (7)$$

These equations are those obtained directly in the weak coupling expansion of the N-vector cubic model[6,7]. For $N\neq 0$ they display three non-trivial fixed points : the $O(N)$ fixed point ($u_{1r}^*>0, u_{2r}^*=0$), the N-decoupled Ising one ($u_{1r}^*=0, u_{2r}^*>0$) and the cubic one ($u_{1r}^*>0, u_{2r}^*<0$ or >0). The cubic fixed point is stable for $N>N_c$ and unstable for $N<N_c$ with $N_c(d=4-\epsilon)=4-2\epsilon+O(\epsilon^2)$, as known from early perturbative approaches[6,7]. For $N=0$ the only fixed point of the equations (6) and (7) is the Gaussian one but this is an artefact of the leading order of perturbation theory that disappears at second order in ϵ. This leads to the famous $\sqrt{\epsilon}$-expansion[6,8]. However, when the Eqs.(5), obtained with the simplest ansatz (4), are analyzed without ϵ-expansion, the random fixed point already appears. All the fixed points found here persist when the dimension is lowered from $d=4$ to the vicinity of $d=2$, a case which deserves a special treatment.

Around $d=2$, one also expects the Eqs.(5) to well describe, even quantitatively, the physics in the vicinity of the $O(N>1)$ fixed-point. The reason is that, around this dimension, the phase transition associated to this fixed point takes place at a temperature of order $\epsilon=d-2$. Since the anomalous dimension is of the same order of magnitude, this situation must be well described even with our wild truncation which neglects high order derivative terms. Around $d=2$, $1/(N\kappa_r)=T_r$ provides the effective perturbative temperature of the associated $O(N)$ non-linear sigma (NLσ) model. One also has to consider u_2 as a small perturbation around the $O(N)$ fixed point. Thus, the procedure now consists in a double expansion of Eqs.(5) in the large mass m_{1r} and in the small coupling constant u_{2r}. Using the asymptotic behaviors of the threshold functions, one obtains : $\eta=T_r/(2\pi N)$ and :

$$\partial_t T_r = \epsilon T_r-\frac{(N-2)}{2\pi}T_r^2 \qquad (8)$$

$$\partial_t u_{1r} = -2u_{1r}+4u_{1r}^2\frac{(N-1)}{\pi}\ln 2 \qquad (9)$$

$$\partial_t u_{2r} = \left(-2+\epsilon+\frac{4}{N\pi}T_r\right)u_{2r}\ . \qquad (10)$$

These equations admit a non-trivial fixed point with $T_r^*=2\pi\epsilon/(N-2)$, $u_{1r}^*=\pi/(2\ln 2(N-1))$ and $u_{2r}^*=0$ which corresponds to the standard $O(N)$ fixed point of the NLσ model. It is then interesting to consider the flow of u_{2r} around this fixed point. One has :

$$\partial_t\delta u_{2r} = \left(-2+\frac{(N+6)}{(N-2)}\,\epsilon\right)\delta u_{2r}\ . \qquad (11)$$

This shows that the cubic perturbation is relevant for $N>N_c$ and irrelevant for $N<N_c$ with $N_c(d=2+\epsilon)=2+4\epsilon+O(\epsilon^2)$, in agreement with the perturbative approach of the NLσ model around $d=2$[33]. Concerning the fixed points with discrete symmetry (Ising $O(1)$, N-decoupled Ising, cubic and random Ising), they cannot, around $d=2$, be properly described by our truncation. Actually, the large values of η at these fixed points around $d=2$ likely require the inclusion in (4) of all powers of the field and high order derivative terms.

In $d = 3$, in order to obtain satisfying quantitative results, we have pushed the calculation using a more sophisticated ansatz than (4). We have considered all monomials up to order eight in the fields as well as all derivative terms including two derivatives and four fields and established the RG equations for the corresponding coupling constants. Theses equations are too long to be given here[34] and we just give our results. First, we have tested our calculation on the $O(N)$ model. In the Ising and Heisenberg cases, we have respectively found $\nu = 0.627$ and $\nu = 0.719$ which are very reasonable compared to previous results(see[4]). The values of the anomalous dimensions $\eta = 0.053$ and $\eta = 0.0452$ are less convincing and related to the omission of higher order derivative terms in Γ_k. Considering the cubic anisotropy, we have determined an estimate of N_c above which the cubic fixed point is stable and found $N_c(d = 3) = 3.1$. This value differs significantly from those obtained from recent perturbative approaches for which $N_c < 3$[10,11,14–18]. For instance, in a recent six-loop calculation, N_c is found to be equal to $2.89(4)$[15], a value already obtained from lower order computations[16,17]. If this last result is confirmed, our result should be imputed to the poor determination of η. The strong dependence of N_c with respect to η already appears in a hierarchical approximation where, neglecting any field renormalization, $N_c = 2.219$[35]. Note also that the result $N_c = 3.4$ was found within the work of Newman and Riedel[28]. For the RI fixed point we have found $\nu = 0.67$ and $\eta = 0.05$ which give, through scaling laws, $\gamma = 1.306$, $\beta = 0.351$ and $\alpha = -0.01$. These results are in good agreement with perturbative methods[2,9,12,13,16,17,19?] and also with numerical estimates, while they show a certain discrepancy with the SF method that provides $\nu = 0.697$, $\gamma = 1.39$ and $\eta = 0.015$[28].

Finally, we indicate that we have noted a rapid convergence of our results with respect to the order of the truncation in the fields. However, a challenging and still open question is that of the convergence when including higher derivative terms which is essential for an improvement of the anomalous dimension.

We thank M. L. Rosinberg, B. N. Shalaev and G. Tarjus for discussions.

---

[1] R. B. Stinchcombe, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz, (Academic Press, New York, 1983), Vol. 7, p.152 .

[2] R. Folk and Yu. Holovatch and T. Yavors'kii, cond-mat/0106468 .

[3] A. B. Harris, J. Phys. C **7**, 1671 (1974).

[4] A. Pelissetto and E. Vicari, cond-mat/0012164 .

[5] H. G. Ballesteros, L. A. Fernandez, V. Martin-Mayor, A. Munoz Sudupe, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo, Phys. Rev. B **58**, 2740 (1998).

[6] G. Grinstein and A. Luther, Phys. Rev. B **13**, 1329 (1976).

[7] A. Aharony, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz, (Academic Press, New York, 1976), Vol. 6, p.357 .

[8] D. E. Khmel'nitskii, Sov. Phys. JETP **41**, 981 (1975).

[9] R. Folk and Yu. Holovatch and T. Yavors'kii, JETP Letters **69**, 747 (1999).

[10] B. N. Shalaev, S. A. Antonenko, and A. I. Sokolov, Phys. Lett. A **230**, 105 (1997).

[11] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, Phys. Lett. B **342**, 284 (1995).

[12] A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rev. B **62**, 6393 (2000).

[13] D. V. Pakhnin and A. I. Sokolov, Phys. Rev. B **61**, 15130 (2000).

[14] I. O. Mayer, A. I. Sokolov, and B. N. Shalaev, Ferroelectrics **95**, 93 (1989).

[15] J. M. Carmona, A. Pelissetto, and E. Vicari, Phys. Rev. B **61**, 15136 (2000).

[16] K. B. Varnashev, Phys. Rev. B **61**, 14660 (2000).

[17] K. B. Varnashev, J. Phys. A **33**, 3121 (2000).

[18] R. Folk and Yu. Holovatch and T. Yavors'kii, Phys. Rev. B **62**, 12195 (2000).

[19] R. Folk and Yu. Holovatch and T. Yavors'kii, Phys. Rev. B **61**, 15114 (2000).

[20] A. J. McKane, Phys. Rev. B **49**, 12003 (1994).

[21] A. J. Bray, T. McCarthy, M. A. Moore, J. D. Reger, and A. P. Young, Phys. Rev. B **36**, 2212 (1987).

[22] G. Alvarez, V. Martin-Mayor, and J. J. Ruiz-Lorenzo, J. Phys. A **33**, 841 (2000).

[23] R. Folk and Yu. Holovatch and T. Yavors'kii, J. Phys. Stud. **2**, 213 (1998).

[24] A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, Phys. Rev. B **63**, 140414 (2001).

[25] M. Tissier, B. Delamotte, and D. Mouhanna, Phys. Rev. Lett. **84**, 5208 (2000).

[26] M. Tissier, B. Delamotte, and D. Mouhanna, cond-mat/0107183 .

[27] K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. C **12**, 75 (1974).

[28] K. E. Newman and E. K. Riedel, Phys. Rev. B **25**, 264 (1982).

[29] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **352**, 529 (1991).

[30] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, hep-ph/0005122 .

[31] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).

[32] N. Tetradis and C. Wetterich, Nucl. Phys. B [FS] **422**, 541 (1994).

[33] R. A. Pelcovits and D. R. Nelson, Phys. Lett. A **57**, 23 (1976).

[34] M. Tissier, D. Mouhanna, J. Vidal, and B. Delamotte, in preparation .

[35] K. Pinn, M. Rehwald, and C. Wieczerkowski, J. Stat. Phys. **95**, 1 (1999).

Liste des tableaux

Table des figures

Bibliographie

[AB98] N. D. Antunes and L. M. A. Bettencourt, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 3083.

[ABH98] N. D. Antunes, L. M. A. Bettenciourt, and M. Hindmarsh, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 908.

[ADDJ93] P. Azaria, B. Delamotte, F. Delduc, and T. Jolicœur, Nucl. Phys. B [FS] **408** (1993), 485.

[ÀMMRL00] G. Àlvarez, V. Martín-Mayor, and J. J. Ruiz-Lorenzo, J. Phys. A **33** (2000), 841.

[AMS+98] K. I. Aoki, K. Morikawa, W. Souma, J. I. Sumi, and H Terao, Prog. Theor. Phys. **99** (1998), 451.

[ANU+88] Y. Ajiro, T. Nakashima, Y. Unno, H. Kadowaki, M. Mekata, and N. Achiwa, J. Phys. Soc. Japan **57** (1988), 2648.

[AS94] S. A. Antonenko and A. I. Sokolov, Phys. Rev. B **49** (1994), 15901.

[ASV95] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, and V. B. Varnashev, Phys. Lett. A **208** (1995), 161.

[Bar86] P. H. Barrett, Phys. Rev. B **34** (1986), 3513.

[BBLJ94] T. Bhattacharya, A. Billoire, R. Lacaze, and T. Jolicœur, J.Phys. I (Paris) **4** (1994), 181.

[BCS+83] R. J. Birgeneau, R. A. Cowley, G. Shirane, H. Yoshizawa, D. P. Belanger, A. R. King, and V. Jaccarino, Phys. Rev. B **27** (1983), 6747.

[BdVdP88] G. H. F. Brits and P. de V. du Plessis, J. Phys. F **18** (1988), 2659.

[Ber70] V. L. Berezinskii, Sov. Phys. JETP **32** (1970), 493.

[BF88] P. Braun and Fähnle, J. Stat. Phys. **52** (1988), 775.

[BFMM+98] H. G. Ballesteros, L. A. Fernández, V. Martín-Mayor, A. Muñoz Sudupe, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo, Phys. Rev. B **58** (1998), 2740.

[BKJ86] D. P. Belanger, A. R. King, and V. Jaccarino, Phys. Rev. B **34** (1986), 452.

[BKM76] P. Bak, S. Krinsky, and D. Mukamel, Phys. Rev. Lett. **36** (1976), 52.

[BLD96] E. H. Boubcheur, D. Loison, and H. T. Diep, Phys. Rev. B **54** (1996), 4165.

[BLH95] H. W. Blöte, E. Luijen, and J. R. Heringa, J. Phys. Math. Gen. **28** (1995), 6289.

[BLM77] D. Bailin, A. Love, and M.A. Moore, J. Phys. C **10** (1977), 1159.

[BM79] I. Balberg and A. Maman, Physica B **96** (1979), 54.

[BMO79] M. R. Beasley, J. E. Mooij, and T. P. Orlando, Phys. Rev. Lett **42** (1979), 1165.

[BWS+95] D. P. Belanger, J. Wang, Z. Slanič, S. J. Han, R. M. Nicklow, M. Lui, C. A. Ramos, and D. Lederman, J. Magn. Magn. Matter. **140-144** (1995), 1549.

[BWS+96] D. P. Belanger, J. Wang, Z. Slanič, S. J. Han, R. M. Nicklow, M. Lui, C. A. Ramos, and D. Lederman, Phys. Rev. B **54** (1996), 3420.

[BWvL+00] R. Bügel, J. Wosnitza, H. von Löhneysen, T. Ono, and H. Tanaka, Phys. Rev. B **64** (2000), 094406.

[BWvLV93] D. Beckmann, J. Wosnitza, H. von Löhneysen, and D. Visser, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 2829.

[BZJ76] E. Brézin and J. Zinn-Justin, Phys. Rev. B **14** (1976), 3110.

[BZJG76] E. Brézin, J. Zinn-Justin, and J.C. Le Guillou, Phys. Rev. D **14** (1976), 2615.

[CADM01] M. Caffarel, P. Azaria, B. Delamotte, and D. Mouhanna, Phys. Rev. B **64** (2001), 014412.

[CCFS86] J. T. Chayes, L. Chayes, D. S. Fisher, and T. Spencer, Phyys. Rev. Lett. **57** (1986), 2999.

[Col89] M. F. Collins, *Magnetic critical scattering*, Oxford University Press, 1989.

[CP97] M. F. Collins and O. A. Petrenko, Can. J. Phys. **75** (1997), 605.

[CPV00] J. M. Carmona, A. Pelissetto, and E. Vicari, Phys. Rev. B **61** (2000), 15136.

[CS86] D. Chowdhury and D. Staufer, J. Stat. Phys. **44** (1986), 203.

[DG81] R. A. Dunlap and A. M. Gottlieb, Phys. Rev. B **23** (1981), 6106.

[DH79] S. Doniach and B. A. Huberman, phys. Rev. Lett. **42** (1979), 1169.

[DJ96] F. David and T. Jolicœur, Phys. Rev. B **76** (1996), 3148.

[DL86] G. C. DeFotis and J. R. Laughlin, J. Magn. Magn. Matter. **54-57** (1986), 713.

[DP81] G. C. DeFoftis and S. A. Pugh, Phys. Rev. B **24** (1981), 6497.

[DPC78] G. C. DeFotis, S. A. Palacio, and R. L. Carlin, Physica (Amsteram) **95B** (1978), 380.

[dVDPDD83] P. de V. Du Plessis, C. F. Van Doorn, and D.C. Van Delden, J. Magn. Magn. Mater. **40** (1983), 91.

[dVDPVB95] P. de V. Du Plessis, A. M. Venter, and G. H. F. Brits, J. Phys. : Condens. Matter **7** (1995), 9863.

[DvLW+92] R. Deutschmann, H. von Löhneysen, J. Wosnitza, R. K. Kremer, and D. Visser, Euro. Phys. Lett. **17** (1992), 637.

[EFS94] M. Enderle, G. Fortuna, and M. Steiner, J. Phys. : Condens. Matter **6** (1994), L385.

[Ell94] U. Ellwanger, Z. Phys. C **62** (1994), 503.

[ESMK97] M. Enderle, R. Schneider, Y. Matsuoka, and K. Kakurai, Physica B **234-236** (1997), 554.

[FHY98] R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, J. Phys. Stud. (Ukraine) **2** (1998), 213.

[FHY99] R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, JETP Letters **69** (1999), 747.

[FHY00] R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, Phys. Rev. B **61** (2000), 15114.

[FHY01] R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, Phys. Rev. B **62** (2001), 12195.

[FKJ91] I. B. Ferreira, A. R. King, and V. Jaccarino, Phys. Rev. B **43** (1991), 10797.

[Fri85] D. H. Friedan, Ann. Phys.(N.Y.) **163** (1985), 318.

[GHC88] B. D. Gaulin, M. Hagen, and H. R. Child, J. Phys. (Paris) Colloq. **49** (1988), C8–327.

[GL76] G. Grinstein and A. Luther, Phys. Rev. B **13** (1976), 1329.

[GMCL89] B. D. Gaulin, T. E. Mason, M. F. Collins, and J. F. Larese, Phys. Rev. Lett. **62** (1989), 1380.

[GP76] T. Garel and P. Pfeuty, J. Phys. C : Solid St. Phys. **9** (1976), L245.

[GW95] M. Gräter and C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 378.

[GZJ87] J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, J. Physique **48** (1987), 19.

[Har74] A. B. Harris, J. Phys. C **7** (1974), 1671.

[Hen93] M. Hennecke, Phys. Rev. B **48** (1993), 6271.

[Heu90] H. O. Heuer, Europhys. Lett. **12** (1990), 551.

[Heu93] H. O. Heuer, J. Phys. A **26** (1993), L333.

[HF83] A. F. Hebard and A. T. Fiory, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 1603.

[HF90] T. Holey and M. Fähnle, Phys. Rev. B **41** (1990), 11709.

[HFH+97] J. P. Hill, Q. Feng, Q. J. Harris, R. J. Birgeneau, A. P. Ramirez, and A. Cassanho, Phys. Rev. B **55** (1997), 356.

[HHT+94] G. Helgesen, J. P. Hill, T. R. Thurston, D. Gibbs, J. Kwo, and M. Hong, Phys. Rev. B **50** (1994), 2990.

[HNI91] K. Hirota, Y. Nakazawa, and M. Ishikawa, J. Phys. C **3** (1991), 4721.

[JCS85a] K. D. Jayasuriya, S. J. Campbell, and A. M. Stewart, Phys. Rev. B **31** (1985), 6032.

[JCS85b] K. D. Jayasuriya, S. J. Campbell, and A. M. Stewart, J. Phys. F : Met. Phys. **15** (1985), 225.

[JLM76] D. T. R. Jones, A. Love, and M. A. Moore, J. Phys. C : Solid St. Phys. **9** (1976), 743.

[JSCG84] K. D. Jayasuriya, A. M. Stewart, S. J. Campbell, and E.S.R. Gopal, J. Phys. F **14** (1984), 1725.

[Kad66] L. P. Kadanoff, Physics **2** (1966), 263.

[Kaw85] H. Kawamura, J. Phys. Soc. Japan **54** (1985), 3220.

[Kaw86] H. Kawamura, J. Phys. Soc. Japan **55** (1986), 2095.

[Kaw88] H. Kawamura, Phys. Rev. B **38** (1988), 4916.

[Kaw90] H. Kawamura, Prog. Theo. Phys. Supp. **101** (1990), 545.

[Kaw92] H. Kawamura, J. Phys. Soc. Japan **61** (1992), 1299.

[KCP90] H. Kawamura, A. Caillé, and M. L. Plumer, Phys. Rev. B **41** (1990), 4416.

[KGA+93] H. A. Katori, T. Goto, Y. Ajiro, K. Nakajima, and Y. endoh, J. Phys. Soc. Japan **60** (1993), 1708.

[Kib76] T. Kibble, J. Phys. A **9** (1976), 1387.

[KM85] K. Koyama and M. Matsuura, J. Phys. Soc. Japan **54** (1985), 4085.

[KSIA88] H. Kadowaki, S. M. Shapiro, T. Inami, and Y. Ajiro, J. Phys. Soc. Japan **57** (1988), 2640.

[KT72] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6** (1972), 1181.

[KUH+87] H. Kadowaki, K. Ubukoshi, K. Hirakawa, J. L. Martinez, and G. Shirane, J. Phys. Soc. Japan **56** (1987), 4027.

[KZ93] H. Kunz and G. Zumbach, J. Phys. A : Math. Gen. **26** (1993), 3121.

[Lan80] D. P. Landau, Phys. Rev. B **22** (1980), 2450.

[LCW74] E. Loh, C. L. Chien, and J. C. Walker, Phys. Letters A **49** (1974), 357.

[LD94] D. Loison and H. T. Diep, Phys. Rev. B **50** (1994), 16453.

[Lit00] D. Litim, Phys. Lett. B **486** (2000), 92.

[Loi99] D. Loison, Physica A **207** (1999), 275.

[LS98] D. Loison and K. D. Schotte, Euro. Phys. J. B **5** (1998), 735.

[LS00] D. Loison and K. D. Schotte, Euro. Phys. J. B **14** (2000), 125.

[LSD+00] D. Loison, A.I. Sokolov, B. Delamotte, S. A. Antonenko, K. D. Schotte, and H. T. Diep, JETP Lett. **72** (2000), 337.

[Lub75] T. C. Lubensky, Phys. Rev. B **11** (1975), 3573.

[MCG87] T. E. Mason, M. F. Collins, and B. D. Gaulin, J. Phys. C **20** (1987), L945.

[MCY+86] P. W. Mitchell, R. A. Cowley, H. Yoshizawa, P. Böni, Y. J. Uemura, and R. J. Birgeneau, Phys. Rev. B **34** (1986), 4719.

[Mer79] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** (1979), 591.

[MGC89] T. E. Mason, B. D. Gaulin, and M. F. Collins, Phys. Rev. B **39** (1989), 586.

[MK76] D. Mukamel and S. Krinsky, Phys. Rev. B **13** (1976), 5065.

[MLT86] J. Marro, A. Labarta, and J. Tejada, Phys. Rev. B **34** (1986), 347.

[MPC94] A. Mailhot, M. L. Plumer, and A. Caillé, Phys. Rev. B **50** (1994), 6854.

[MvWG+90] J. E. Mooij, B. J. van Wees, L. J. Geerligs, M. Peters, R. Fazio, and G. Schön, Phys. Rev. Lett. **65** (1990), 645.

[OTK+98] T. Ono, H. Tanaka, T. Kato, K. Iio, K. Nakajima, and K. Kakurai, J. Magn. Magn. Mater. (1998), no. 177-181, 735.

[OTK+99] T. Ono, H. Tanaka, T. Kato, K. Nakajima, and K. Kakurai, J. Phys. : Condens. Matter **11** (1999), 4427.

[PCP90] M. Poirier, A. Caillé, and M. L. Plumer, Phys. Rev. B **41** (1990), 4869.

[PHC88] M. L. Plumer, K. Hood, and A. Caillé, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 45.

[PKV+00] V. P. Plakhty, J. Kulda, D. Visser, E. V. Moskvin, and J. Wosnitza, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), 3942.

[PM94] M. L. Plumer and A. Mailhot, Phys. Rev. B **50** (1994), 16113.

[PN76] R. A. Pelcovits and D. R. Nelson, Phys. Lett. A **57** (1976), 23.

[Pol75] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **59** (1975), 79.

[Pol84] J. Polchinski, Nucl. Phys. B **84** (1984), 269.

[PRV01a] A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, Phys. Rev. B **63** (2001), 140414.

[PRV01b] A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, Nucl. Phys. B [FS] **607** (2001), 605.

[PV98] A. Pelissetto and E. Vicari, Nucl. Phys. B **519** (1998), 626.

[PV00] A. Pelissetto and E. Vicari, Phys. Rev. B **62** (2000), 6393.

[PW95] T. Papenbrock and C. Wetterich, Z. Phys. C **65** (1995), 519.

[RKJ88] C. A. Ramos, A. R. King, and V. Jaccarino, Phys. Rev. B **37** (1988), 5483.

[RKL+88] N. Rosov, A. Kleinhammes, P. Lidbjörk, C. Hohenemser, and M. Eibschütz, Phys. Rev. B **37** (1988), 3265.

[SB98] Z. Slanič and D. P. Belanger, J. Magn. Magn. Matter. **186** (1998), 65.

[SB99] Z. Slanič and D. P. Belanger, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 426.

[SBFB98] Z. Slanič, D. P. Belanger, and J. A. Fernandez-Baca, J. Magn. Magn. Matter. **177-181** (1998), 171.

[SEB+87] G. Shirane, Y. Endoh, R. J. Birgenau, M. A. Kastner, Y. Hidaka, M. Oda, M. Suzuki, and T. Murakami, Phys. Rev. Lett. **59** (1987), 1613.

[SSA+00] J. I. Sumi, W. Souma, K. I. Aoki, H. Terao, and K. Morikawa, hep-th/0002231.

[SSS+94] U. Schotte, N. Stusser, K.D. Schotte, H. Weinfurter, H. M. Mayer, and M. Winkelmann, J. Phys. : Condens. Matter **6** (1994), 10105.

[SW99] S. Seide and C. Wetterich, Nucl. Phys. B **562** (1999), 524.

[TDM00] M. Tissier, B. Delamotte, and D. Mouhanna, Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 5208.

[TDM01] M. Tissier, B. Delamotte, and D. Mouhanna, cond-mat/0107183, 2001.

[THH+94] T. R. Thurston, G. Helgesen, J. P. Hill, D. Gibbs, B. D. Gaulin, and P. J. Simpson, Phys. Rev. B **49** (1994), 15730.

[THS+95] C. C. Tang, P. W. Haycock, W. G. Stirling, C. C. Wilson, D. Keen, and D. Fort, Physica B **205** (1995), 105.

[TMD99] M. Tissier, D. Mouhanna, and B. Delamotte, Phys. Rev. B **61** (1999), 15327.

[TMVD01] M. Tissier, D. Mouhanna, J. Vidal, and B. Delamotte, cond-mat/0109176.

[TPBH88] T. R. Thurston, C. J. Peters, R. J. Birgeneau, and P. M. Horn, Phys. Rev. B **37** (1988), 9559.

[TPPC93] Y. Trudeau, M. L. Plumer, M. Poirier, and A. Caillé, Phys. Rev. B **48** (1993), 12805.

[TSJ+92] C. C. Tang, W. G. Stirling, D. L. Jones, A. J. Rolloson, A. H. Thomas, and D. Fort, J. Magn. Magn. Mater. **103** (1992), 86.

[TW94] N. Tetradis and C. Wetterich, Nucl. Phys. B [FS] **422** (1994), 541.

[vGW01] G. von Gersdorff and C. Wetterich, Phys. Rev. B **64** (2001), 054513.

[WBG91] J. Wang, D. P. Belanger, and B. D. Gaulin, Phys. Rev. Lett. **66** (1991), 3195.

[WBG92] J. Wang, D. P. Belanger, and B. D. Gaulin, J. Magn. Magn. Mater. **117** (1992), 356.

[WBW+95] H. Weber, D. Beckmann, J. Wosnitza, H. von Löhneysen, and D. Visser, Intern. J. Modern Phys. B **9** (1995), 1387.

[WC89] J. S. Wang and D. Chowdhury, J. Phys. France **50** (1989), 2905.

[WD98a] S. Wiseman and E. Domany, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 22.

[WD98b] S. Wiseman and E. Domany, Phys. Rev. E **58** (1998), 2938.

[WDvLK94] J. Wosnitza, R. Deutschmann, H. von Löhneysen, and R. K. Kremer, J. Phys. : Condens. Matter **6** (1994), 8045.

[Wet91] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **352** (1991), 529.

[Wet93a] C. Wetterich, Z. Phys. C **57** (1993), 451.

[Wet93b] C. Wetterich, Z. Phys. C **60** (1993), 461.

[Wet93c] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301** (1993), 90.

[WH73] F. J. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. A **8** (1973), 401.

[WK74] K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. C **12** (1974), 75.

[WWMC90] J. S. Wang, M. Wöhlert, H. Mühlenbein, and D. Chowdhury, Physica A **166** (1990), 173.

[WWW+96] H. B. Weber, T. Werner, J. Wosnitza, H. von Löhneysen, and U. Schotte, Phys. Rev. B **54** (1996), 15924.

[ZJ89a] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, 3 ed., Oxford University Press, New York, 1989.

[ZJ89b] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, 3 ed., pp. 151, 578, Oxford University Press, New York, 1989.

[Zum93] G. Zumbach, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 2421.

La majeure partie de ce travail consiste en l'étude de systèmes de spins soumis à des interactions compétitives et présentant de la frustration. Nous donnons une description détaillée de la situation expérimentale et numérique dans le domaine. Un des points cruciaux qui découle de cette analyse est la nécessité d'aller au delà des théories de perturbation pour comprendre la physique de ces systèmes.

Ceci justifie d'utiliser une approche non-perturbative. Nous présentons une telle approche, basée sur une équation exacte du groupe de renormalisation. Nous discutons en détail les résultats obtenus lors de l'étude du modèle vectoriel, afin d'illustrer son utilisation dans les situations concrètes et de montrer la puissance de cette méthode.

Lors de l'étude des systèmes frustrés, l'utilisation de cette méthode non-perturbative mène à la conclusion que ces systèmes présentent une transition faiblement du premier ordre. Ce comportement est en bon accord avec les résultats expérimentaux et numériques.

Nous présentons dans le dernier chapitre une étude du modèle d'Ising en présence d'impuretés non magnétiques, en utilisant la même approche non perturbative.

Summary : The main part of this work consists in the study of spins submitted to competing interactions, and which are therefore frustrated. We give a detailed description of the experimental and numerical situation. We emphasize on the fact that it is necessary to go beyond perturbation theory for understanding the physical behavior of these systems.

A non-perturbative approach is therefore needed. We describe such an approach, based on an exact renormalization group equation. We discuss in details the case of vectorial models in order to show how this approach is implemented in practice, and to stress on its outstanding features.

While studying frustrated systems, this non-perturbative approach indicates that these systems exhibit a weakly first order phase transition, in good agreement with experimental and numerical results.

We present in the last chapter a study of the Ising model in presence of non-magnetic impurities by using the same non-perturbative approach.