TD n°6

A) Intégration numérique par la méthode des rectangles :

Le principe de la méthode des rectangles est de découper l'intervalle d'intégration [a,b] en n segments de longueur $\frac{b-a}{n}$. A chaque segment, on associe un rectangle de base ce segment et de hauteur la valeur de la fonction en un point du segment. Une approximation de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est la somme des aires des rectangles (aires négatives quand les rectangles sont sous l'axe des abscisses).

Exercice 1

a) Ecrire les fonctions

$f_1(x)=x^3-6x^2+8x+2$

$f_2(x)=\sin(x)$

b) Faire un programme qui calcule, grâce à la méthode des rectangles :

$\int_1^{2.5} f_1(x)dx$

$\int_0^1 f_2(x)dx$

Prendre comme point de la fonction, pour le rectangle entre x et $x+\frac{b-a}{n}$

- ba) $f(x)$
- bb) puis $f\left(x+\frac{b-a}{n}\right)$
- bc) puis $f\left(x+\frac{b-a}{2n}\right)$

Remarques ?

B) Intégration numérique par la méthode des trapèzes :

Exercice 2 :

On peut améliorer la méthode précédente en remplaçant les rectangles par des trapèzes. On a toujours deux côtés verticaux, en x et x+(b-a)/n, le troisième sur l'axe des abcisses, mais les extrémités du quatrième ont pour coordonnées $(x, f(x))$ et $\left(x+\frac{b-a}{n}, f\left(x+\frac{b-a}{n}\right)\right)$.

a) Implémenter (=programmer) cette méthode.

C) Trouver les zéros d'une fonction :

C1) La dichotomie

Soit f une fonction continue possédant une racine unique sur $]a,b[$ avec f(a) et f(b) non nuls.
On partage l'intervalle en deux intervalle de même longueur. Soit c=(a+b)/2. Trois cas se présentent

- $f(c)=0$,
- $f(a)f(c)<0$: dans ce cas, la racine se trouvent dans le segment $]c,b[$

- $f(a)f(c)>0$: alors, la racine se trouvent dans le segment $]a,c[$.
Si on n'a pas la solution exacte, on prend le demi-segment sur lequel se trouve la racine, et on le divise à nouveau en 2.
Les bornes du segment forment deux suites adjacentes, convergeant vers la racine.

Exercice 3 :
a) Ecrire une fonction dichotomie(a,b,epsilon) qui approxime la racine d'une fonction f prédéfinie.
b) L'appliquer pour trouver la racine de la fonction $f(x)=e^{2x-1}-2$.

C2) La méthode de la corde

Soit f une fonction continue, deux fois dérivable sur $]a,b[$, avec $f(a)f(b)<0$ et dont les dérivées f' et f'' sont de signe constant sur $]a,b[$ et ne s'annulent pas. Cette fonction a une racine unique x.
Par exemple, prenons f' et f'' positives. La fonction f est donc stictement croissante et convexe sur l'intervalle $]a,b[$.
Traçons la corde reliant les deux points extrêmes de la courbe représentant f sur $]a,b[$. Ce segment coupe l'axe des abcisses en un point C, d'abcisse c.
Comme f est strictement convexe, f(a)<f(c)<0. Donc, a<c<x. On réitère sur le segment $]c,b[$, ainsi de suite. On construit donc une suite croissante qui converge vers x.
On peut adapter la méthode à tous les signes possibles de f' et f''.

Exercice 4 :
a) Vérifier qu'on peut appliquer cette méthode à f.
b) Faire la fonction corde(a,b) qui retourne c.
c) Faire un programme qui utilise les fonctions f et corde pour trouver un x tel que $f(x)<10^{-5}$.

C3) La méthode de Newton

On prend les mêmes hypothèses que précédement. f'>0, f''>0.
On prend comme valeur de c l'intersection de la tangente en b à la courbe.
Puis, on considère la tangente en c, ainsi de suite. On a donc une suite décroissante tendant vers x.

Exercice 5 :
a) Faire la fonction Newton(a,b) qui retourne c.
b) Faire un programme qui utilise les fonctions f et Newton pour trouver un x tel que $f(x)<10^{-5}$

Exercice 6 :
Combiner les deux méthodes précédentes pour encadrer la racine à 10^{-6} près.

C3) La méthode des itérations

On veut résoudre x=f(x).
Soit une fonction f définie,continue, dérivable sur $[a,b]$, telle que
$\forall x\in[a,b], |f'(x)|\leq k<1$
et $f([a,b])\, inclus\, dans\, [a,b]$
Alors, la suite définie par $\begin{matrix} u_0\in[a,b] \\ u_{n+1}=f(u_n)\end{matrix}$ converge vers la racine.

Exercice 7 :
Résoudre x-cos(x)=0 par cette méthode, sur l'intervalle [0,1].