Femmes et Mathématiques 3, 15–23 (1999).

# LA RENORMALISATION:
## un outil mathématique multiforme pour une nouvelle approche de la réalité physique

*Annick LESNE*

*Laboratoire de Physique Théorique des Liquides*
*Université Pierre et Marie Curie*
*Case courrier 121, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*
lesne@lptl.jussieu.fr

Les méthodes de renormalisation sont devenues un outil sinon incontournable, du moins omniprésent en physique théorique. Elles sont indispensables dans l'étude des *propriétés asymptotiques* (grandes échelles d'espace et de temps) de systèmes où les *fluctuations* jouent un rôle essentiel. Bien plus, en déterminant le lien entre les différents modèles effectifs représentant un même système physique lorsqu'on fait varier les échelles de la description, ces méthodes donnent accès à des propriétés intrinsèques, indépendantes des détails microscopiques et insensibles aux possibles lacunes et erreurs entachant la modélisation. Le développement de ces méthodes a accompagné celui des notions d'*invariance d'échelle*, illustrée par exemple dans les structures fractales, et d'*universalité*, à rapprocher de celles de forme normale et de robustesse.

Après une brève présentation de ce que recouvre le terme de « renormalisation » et des déplacements de sens qu'il a connu, nous présenterons quelques principes communs à toutes les méthodes de renormalisation; nous montrerons que c'est le statut même des *modèles (physiques)* qu'elles ont bouleversé; nous terminerons par quelques applications illustrant l'intérêt de la renormalisation dans des problèmes mathématiques.

### 1) Bref historique: les différents usages du terme « renormalisation »

La « renormalisation » a d'abord été un adjectif. L'idée remonte au siècle dernier où, dans le contexte hydrodynamique, la *masse « renormalisée »* d'un corps en mouvement dans un fluide est sa masse apparente, c'est-à-dire le coefficient d'inertie $m$ intervenant dans l'expression de son énergie cinétique $1/2mv^2$ et dans l'équation fondamentale de son mouvement ($mdv/dt =$ résultante des forces). Cette masse renormalisée est supérieure à la masse au repos car elle prend en compte une contribution due au fluide déplacé, l'énergie cinétique de ce dernier s'ajoutant à celle du corps considéré [1]. Plus généralement, une grandeur *renormalisée* est la valeur *apparente* de cette grandeur, obtenue en ajoutant à la valeur intrinsèque des contributions de même dimension résultant d'interactions, d'influences extérieures ou de degrés de liberté n'apparaissant pas explicitement dans la description. On distingue par exemple les corrélations directes entre deux particules d'un fluide et les corrélations renormalisées, ces dernières reflétant les interactions implicites (relayées par le reste du système) entre les particules.

La renormalisation est ensuite apparue en électrodynamique quantique, et plus généralement dans les théories quantiques de champs, avec le sens de *régularisation* [5]. Une théorie *renormalisable* est une théorie où l'influence des phénomènes de très grande fréquence (ou de façon équivalente, de très grande énergie) peut être prise en compte de façon implicite en remplaçant les paramètres initiaux $\theta$ par des *paramètres effectifs* $\tilde{\theta}$; conjointement, on ne décrit explicitement que les modes de fréquences $\omega$ inférieures à une valeur de coupure $\Omega$. L'expression des paramètres effectifs dépend bien sûr du choix *arbitraire* de $\Omega$. On appelle *(opérateurs de) renormalisation* les transformations $\mathcal{R}_{\Omega,\infty}$ et $\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}$ reliant les paramètres initiaux et les paramètres renormalisés

$$\tilde{\theta}(\Omega) \equiv \mathcal{R}_{\Omega,\infty}(\theta) \qquad\qquad \tilde{\theta}(\Omega_1) = \mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}[\tilde{\theta}(\Omega_0)] \tag{1}$$

La condition de cohérence de la démarche est la loi de groupe généralisée (groupe « non autonome » )

$$\mathcal{R}_{\Omega_1,\infty} = \mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}\mathcal{R}_{\Omega_0,\infty} \qquad\qquad \mathcal{R}_{\Omega_2,\Omega_0} = \mathcal{R}_{\Omega_2,\Omega_1}\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0} \tag{2}$$

Lorsque $\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}$ ne dépend que du rapport $k = \Omega_0/\Omega_1$, on retrouve une loi de groupe usuelle $\mathcal{R}_{k_2}\mathcal{R}_{k_1} = \mathcal{R}_{k_2k_1}$. L'intérêt de cette structure de groupe est si grand qu'on parle du[1] *groupe de renormalisation*. Cette structure

[1] Ce groupe n'est bien sûr pas unique: chaque méthode de renormalisation fait appel à un groupe différent! Sa dimension dépend du nombre de facteurs d'échelle (tels $k = \Omega_0/\Omega_1$) indépendants intervenant dans la transformation de renormalisation $\mathcal{R}$.

permet tout d'abord de mettre en œuvre la renormalisation en utilisant les outils de théorie des groupes (algèbres de Lie, représentations...) déjà largement utilisés pour exploiter l'existence de groupes de symétrie. Mais bien au-delà de cet argument technique, les groupes de symétrie d'un système physique déterminent une grande partie de ses propriétés observables; le groupe de renormalisation apparaît comme un groupe de symétrie particulier, et on peut souvent traduire en informations quantitatives les propriétés d'*invariance par renormalisation* du système physique.

Devenus indispensables dans de nombreux problèmes d'électrodynamique quantique, les groupes de renormalisation ont ensuite investi la mécanique statistique. Ils sont maintenant l'outil privilégié pour étudier les *phénomènes critiques*, c'est-à-dire tous les phénomènes où la divergence d'une longueur de corrélation interdit de découpler les échelles et de remplacer les degrés de liberté microscopiques par quelques grandeurs moyennes. La renormalisation permet de déterminer la *façon dont s'organisent les fluctuations aux différentes échelles* et d'expliciter les lois d'échelle découlant de cette organisation.

La renormalisation a ensuite été utilisée dans le contexte des systèmes dynamiques pour étudier l'apparition du *chaos*. La clé pour relier cette renormalisation avec celles utilisées en mécanique statistique est de traduire les dépendances et grandeurs *spatiales* en dépendances et grandeurs *temporelles*. Depuis lors, les méthodes de renormalisation se rencontrent dans les domaines les plus variés de la physique théorique.

Nous allons maintenant présenter quelques principes généraux communs à toutes ces méthodes, qui justifient l'emploi d'un unique vocable pour les désigner.

## 2) Les principales étapes d'une méthode de renormalisation

Insistons avant tout sur le fait que la renormalisation va opérer sur des *modèles* $\mathcal{M}$, c'est-à-dire sur des représentations en partie *subjectives* du système physique $\mathcal{S}$, dépendant par exemple des phénomènes qu'on choisit d'étudier et, de façon essentielle, de l'*échelle minimale* $a$ qu'on peut apprécier (résolution de l'appareil de mesure, par exemple). Cette échelle $a$, que nous qualifierons de *microscopique* par opposition à l'échelle *macroscopique* $L$ de l'observation, détermine les sous-systèmes de $\mathcal{S}$ qui seront considérés comme des constituants élémentaires, sans structure interne et décrits par un petit nombre de grandeurs, noté $s$ de façon abrégée. Un constituant élémentaire sera typiquement une cellule d'extension linéaire $a$, assimilée à un point dans le modèle $\mathcal{M}_a$. A l'échelle microscopique, l'état de $\mathcal{S}$ sera décrit par une *configuration* $\bar{s} \equiv (s_1, \ldots, s_N)$ donnant l'état des $N$ constituants élémentaires (par exemple $N = (L/a)^d$ dans un espace de dimension $d$). Nous pouvons maintenant préciser les ingrédients définissant un modèle $\mathcal{M}$:

— l'*espace de phase* du modèle est l'ensemble $\mathcal{E} = \{\bar{s}\}$ des configurations (il dépend donc de $a$ et de $N$);

— les caractéristiques physiques macroscopiques sont associées à des fonctions de l'état microscopique $\bar{s} \mapsto A(\bar{s})$ définies sur $\mathcal{E}$;

— l'épine dorsale du modèle est une fonction $\phi(\bar{s})$ que nous appellerons la *règle de structure*; dans une situation d'équilibre, elle détermine le poids statistique de la configuration $\bar{s}$ dans les propriétés macroscopiques de $\mathcal{S}$; dans un problème hors d'équilibre, elle détermine l'évolution de la configuration $\bar{s}$. $\phi$ sera par exemple l'Hamiltonien du système en mécanique statistique, la loi d'évolution pour un système dynamique ou les probabilités de transition pour un processus stochastique. Au lieu de faire intervenir un ensemble fonctionnel $\Phi = \{\phi\}$, on suppose souvent que la règle de structure est de forme paramétrée connue $\phi = \phi_K$. Le modèle est alors déterminé par un jeu de *paramètres*, noté de façon compacte $K \in \mathcal{K}$.

Les ingrédients de base de toute méthode de renormalisation sont une décimation, des changements d'échelle et une transformation des paramètres que l'on remplace par des paramètres effectifs. Introduits bien antérieurement, ils sont déjà en eux-mêmes des outils efficaces. La nouveauté apportée par les méthodes de renormalisation est *d'itérer* une combinaison adéquate de ces trois étapes, combinaison appelée *transformation de renormalisation*, et d'étudier l'action de cette transformation dans l'*espace des modèles*.

• *La décimation:* ce terme désigne toute procédure traduisant l'effet sur la configuration $\bar{s} \in \mathcal{E}$ d'un changement de résolution $a \to ka$. On va ainsi regrouper les constituants élémentaires en « paquets » (« *coarse-graining* » ) et relier la configuration $\bar{s}'$ de ces paquets à la configuration initiale $\bar{s}' = T_k(\bar{s})$. On a ainsi réduit le nombre $N$ de degrés de liberté d'un facteur $k^d$ en dimension $d$ (ou, à $N$ constant, augmenté d'un facteur $k$ le champ $L$ de l'observation). En contrepartie, cette décimation s'accompagne nécessairement d'une perte d'information sur les échelles inférieures à $ka$. La transformation $T_k$ sera choisie de façon

à préserver au mieux les informations et les propriétés dont on *pense* qu'elles jouent un rôle crucial aux grandes échelles. Cette étape, en partie arbitraire, est un point délicat de la démarche de renormalisation, où une compréhension préalable du phénomène étudié est utile, sinon nécessaire. Notons que dans l'espace conjugué (fréquences et vecteurs d'onde), la décimation se traduit par un changement $\Omega \to \Omega/k$ de la valeur de coupure $\Omega = 2\pi/a$ (« *cutoff* » ): le modèle renormalisé ne décrit plus explicitement les modes de très grandes fréquences et de très grands vecteurs d'onde.

• *Les changements d'échelle:* ils permettent de conserver l'échelle minimale apparente, le but étant:
— d'une part de conserver le même espace de phase (nécessité technique)
— d'autre part de mettre en évidence les propriétés d'auto-similarité (même principe qu'une loupe).
Si $n$ facteurs d'échelles sont impliqués, il n'y a en général qu'une famille $(k, k^{\alpha_2}, \ldots, k^{\alpha_n})_{k\geq 1}$ conduisant à une limite $k \to \infty$ non triviale, ce qui fournit la valeur $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de certains exposants. Prenons l'exemple d'une marche aléatoire en temps discret, sans biais (c'est--dire sans composante dterministe qui donnerait une dpendance linaire par rapport au temps). Elle obéit à la loi de diffusion $< |\vec{r}(t)|^2 >= Dt$ si $\vec{r}(t)$ est la position atteinte à l'instant $t$ sachant qu'on part de $O$ à $t = 0$. Si on contracte le temps d'un facteur $k$, en ne regardant que les positions $[\vec{r}(kt)]_{t\geq 0}$, il faut contracter l'espace d'un facteur $\sqrt{k}$ pour obtenir une trajectoire statistiquement identique. Ce facteur $\sqrt{k}$ est le seul pour lequel on obtient une limite $k \to \infty$ non triviale: si on contracte d'un autre facteur $k^{-\alpha}$, $\alpha \neq 1/2$, on obtient un coefficient de diffusion renormalisé $D_{k\to\infty} = 0$ (si $\alpha > 1/2$) ou $D_{k\to\infty} = \infty$ (si $\alpha < 1/2$).

• *Les paramètres effectifs:* pour que l'on continue à décrire le *même système physique*, l'effet conjoint de la décimation et des changements d'échelle doit être « compensé » par une transformation de la règle de structure $\phi$ du modèle en $R_k(\phi)$, de façon à ce que $R_k(\phi)$ décrive la statistique ou l'évolution de $T_k(\bar{s})$. Par exemple, si $\phi$ engendre une distribution de probabilité $P_\phi$ dans l'espace de phase, on aura

$$P_{R_k(\phi)}(\bar{s}') = \sum_{s\in T_k^{-1}[\bar{s}']} P_\phi(\bar{s}) = P_\phi(T_k^{-1}[\bar{s}']) \tag{3}$$

$R_k$, agissant dans l'espace fonctionnel $\Phi$, est appelé l'*opérateur de renormalisation.* Dans le cas d'un modèle paramétré $(\phi_K)_{K\in\mathcal{K}}$, on écrira

$$R_k(\phi_K) \approx \phi_{r_k(K)} \tag{4}$$

en général au prix d'approximations dont il faudra ensuite discuter la pertinence. Les paramètres $r_k(K)$ sont appelés les *paramètres renormalisés*; ils intégrent l'effet aux échelles supérieures à $ka$ des détails microscopiques d'échelle inférieure à $ka$.

Une notion essentielle sur laquelle reposent les méthodes de renormalisation est ainsi celle de *covariance.* Elle exprime la condition de cohérence que doit vérifier une transformation conjointe des différents ingrédients de $\mathcal{M}$ pour que le modèle $\mathcal{M}'$ obtenu décrive *la même réalité physique.* Ici, la propriété de covariance, explicitée dans des exemples dans les équations (3) et (4), assure que le modèle initial et le modèle renormalisé décrivent le *même* système physique (en particulier, la renormalisation conservera les invariants physiques du problème). Cette propriété exprime la (nécessaire) inaltérabilité de la réalité physique lorsque change *notre* façon de l'observer et de la décrire. Remarquons que cette notion se rencontre dans la formulation de n'importe quelle invariance par symétrie du système. On retrouve le fait qu'un groupe de renormalisation n'est rien d'autre qu'un groupe de symétrie particulier. Par exemple[2], l'invariance par rotation d'un système décrit par un champ de vecteurs $V(\vec{r})$ s'écrit: pour toute rotation $R$, $R[V(\vec{r})] = V(R\vec{r})$.

Une notion plus forte est celle d'*invariance par renormalisation.* Elle s'écrit

$$R_k(\phi^*) = \phi^* \tag{5}$$

Elle exprime une *propriété du système*, à savoir son *auto-similarité*: le système observé à l'échelle $ka$ est identique à l'image observée à l'échelle $a$ et dilatée d'un facteur $k$. Les points fixes de la renormalisation

[2] Dans le cas général, si $(T_g)_{g\in G}$ décrit l'action du groupe de symétrie $G$ sur les configurations $\bar{s}$ du système, l'expression de l'invariance par symétrie fait intervenir une représentation $\mathcal{T}$ de $G$ dans l'espace vectoriel $E$ où la règle de structure $\phi$ prend ses valeurs et s'écrit: $\forall g \in G, \mathcal{T}_g[\phi(\bar{s})] = \phi[T_g(\bar{s})]$.

sont ainsi, par contruction même de $R_k$, associés à des systèmes présentant une invariance d'échelle exacte. Les points fixes jouent un rôle crucial dans l'analyse par renormalisation pour les raisons suivantes:

• tous les modèles convergeant vers un point fixe sous l'action de la renormalisation manifesteront les mêmes propriétés aux grandes échelles;

• du fait des changements d'échelle inclus dans la renormalisation, l'échelle caractéristique $\xi^*$ (typiquement une longueur ou un temps de corrélation) associée à un point fixe, devant vérifier $\xi^* = k\xi^*$, sera ou bien nulle, ou bien infinie. Si $\xi^* = 0$, le point fixe est un modèle idéal où il n'y a *aucun couplage* entre les constituants élémentaires. Si $\xi^* = \infty$, le point fixe est un modèle décrivant un *phénomène critique*;

• le résultat essentiel est que l'analyse de $R_k$ au voisinage d'un point fixe $\phi^*$ critique ($\xi^* = \infty$) détermine explicitement les lois d'échelle asymptotiques décrivant les phénomènes critiques se rattachant à ce point fixe (les modèles associés convergent vers le point fixe sous l'action de la renormalisation). On montre en particulier [2-6] que les *exposants critiques* sont simplement reliés aux valeurs propres de l'opérateur de renormalisation linéarisé en $\phi^*$.

### 3) Un changement de point de vue: vers une description objective de la réalité physique

Revenons au cas fondamental de la renormalisation utilisée dans les théories quantiques de champs, présenté schématiquement au §1. Le modèle de départ – notons le $\mathcal{M}_\infty$ – sans coupure (c'est--dire sans limitation suprieure des vecteurs d'onde et des frquences), est assurément incorrect. En effet, nous manquons d'informations expérimentales sur les phénomènes de très grande énergie et ce modèle ne peut être obtenu qu'en extrapolant les mécanismes connus jusqu'à des fréquences et des vecteurs d'onde arbitrairement grands. Il s'ensuit des divergences dites « ultra-violettes » ; elles reflètent simplement l'inadéquation de notre description au-delà de certaines énergies, et non une catastrophe physique observable. Le modèle $\mathcal{M}_\Omega$, associé à une coupure $\Omega$ et à des paramètres renormalisés $\tilde{\theta}(\Omega)$, ne présente évidemment plus de divergences ultra-violettes puisque par construction, il ne décrit que des modes $|\omega| < \Omega$. Cependant, la prise en compte dans $\tilde{\theta}(\Omega)$ des phénomènes de fréquence $|\omega| > \Omega$ est nécessairement entachée d'erreur puisque nous ne pouvons faire que des conjectures sur ces phénomènes. Les modèles $\mathcal{M}_\Omega$ sont donc *subjectifs* (choix arbitraire de $\Omega$) et *approchés*. Par contre, le *lien* entre ces modèles donne accès à des propriétés intrinsèques. Ce lien est précisément donné par les transformations de renormalisation $\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}$. Elles décrivent comment doit changer *notre* modélisation $\mathcal{M}_\Omega$ de la réalité quand change *notre* échelle de description $|\omega| < \Omega$. La transformation $\mathcal{R}_{\Omega_1,\Omega_0}$ décrit l'influence aux échelles $|\omega| < \Omega_1$ des modes $\Omega_1 < |\omega| < \Omega_0$. Les transformations de renormalisation $\mathcal{R}$ décrivent ainsi *la façon dont coopérent les différentes échelles*. En s'attachant à décrire l'*organisation* des phénomènes plus que les phénomènes eux-mêmes, les méthodes de renormalisation conduisent à des résultats intrinsèques, insensibles aux inévitables approximations intervenant dans la description théorique.

Pour illustrer notre propos, considérons une courbe fractale. Sa « longueur » est une grandeur subjective $L(a)$ dépendant du pas $a$ avec lequel on arpente la courbe. Par contre, le *lien* entre des mesures $L(a)$ et $L(ka)$ obtenues en choisissant des échelles minimales $a$ et $ka$ différentes donne accès à une caractéristique intrinsèque: la *dimension fractale* $D_f$ de la courbe, définie à travers $L(ka) = k^{1-D_f}\, L(a)$. Cette dernière relation exprime l'auto-similarité – l'invariance d'échelle – de la courbe fractale.

Cette discussion dépasse largement le cadre des théories quantiques de champs. *Construire un modèle physique, c'est choisir de se mettre des œillères*: échelles minimales et maximales, délimitation du système $\mathcal{S}$ et de ses degrés de liberté, simplification du milieu extérieur et de ses interactions avec $\mathcal{S}$,.... Un modèle est donc nécessairement subjectif et imparfait. La démarche usuelle, consistant à déduire le maximum d'informations sur le comportement d'un système idéal décrit par le modèle, est donc par construction entachée d'incertitudes, voire d'erreurs. Les méthodes de renormalisation proposent une approche complètement différente. L'analyse se déplace de l'espace de phase dans un *espace de modèles*; en reliant entre eux des modèles, les groupes de renormalisation réalisent une partition de l'ensemble de modèles considéré en *classes d'universalité*, regroupant des modèles conduisant aux mêmes propriétés asymptotiques. Notons qu'un groupe de renormalisation n'est rien d'autre qu'un système dynamique dans l'espace des modèles. Il est immédiat de voir que le flot associé (« le flot de renormalisation » ) structure cet espace autour des points fixes de la transformation de renormalisation. Les classes d'universalité sont les bassins d'attraction des points fixes stables ou les variétés stables des points fixes hyperboliques.

Il suffit alors de déterminer la classe d'universalité à laquelle appartient le système physique – pour cela, un modèle rudimentaire suffit – pour prédire correctement ses propriétés aux grandes échelles. Les exposants apparaissant dans les lois d'échelle asymptotiques seront les mêmes que ceux du représentant typique de la classe d'universalité (le point fixe associé).

Les méthodes de renormalisation permettent de déterminer si une perturbation du modèle détruit (« perturbation essentielle » ) ou ne détruit pas (« perturbation inessentielle » ) les prédictions macroscopiques. On peut ainsi prouver la *robustesse* des résultats par rapport aux modifications des détails microscopiques et par là même la *validité du modèle*, puisque ses possibles inexactitudes microscopiques sont sans conséquences à l'échelle de l'observation.

## 4) Perspectives: la renormalisation en mathématiques

L'irruption de la renormalisation dans un journal de mathématiques est doublement justifiée. D'une part, c'est un bel exemple d'utilisation d'outils mathématiques sophistiqués (analyse spectrale d'opérateurs linéaires fonctionnels, par exemple) pour résoudre des problèmes physiques bien tangibles (transitions de phase, dynamique chaotique, diffusion, physique des polymères, croissance fractale,...). D'autre part, les méthodes de renormalisation peuvent être dégagées de leur contexte physique et appliquées à des questions mathématiques.

• Un premier exemple est celui des *méthodes perturbatives singulières*, où la renormalisation offre une autre approche que celle dite « des échelles multiples »La situation typique est la suivante: étant donnée une certaine équation fonctionnelle[3] dépendant d'un petit paramètre $\epsilon \ll 1$, on cherche à expliciter sa solution $f(\epsilon, \theta, t)$, en particulier son comportement asymptotique (temps $t \to \infty$) et la dépendance de ce dernier par rapport au(x) paramètre(s) $\theta$. La solution d'ordre 0 (correspondant à $\epsilon = 0$) est supposée connue. La résolution perturbative en $\epsilon$ est dite *singulière* lorsque le développement associé

$$f(\epsilon, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(\theta, t) \tag{6}$$

n'est pas uniformément convergent en $t$ et $\theta$, par exemple si $\lim_{t\to\infty} f_n(\theta, t) = \infty$. La *méthode des échelles multiples*[4] consiste à découpler les dépendances temporelles d'échelles caractéristiques différentes, ce qui permet de contourner le problème des divergences séculaires. La solution est cherchée sous la forme

$$f(\epsilon, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n F_n(\theta, t_0, t_1, \ldots, t_k) \tag{7}$$

où $t_0 = t$, $t_1 = \epsilon t$, ..., $t_k = \epsilon^k t$ sont considérées comme $k+1$ variables *indépendantes*. L'approche par renormalisation consiste au contraire à « absorber la contribution divergente » de la série dans une transformation du (ou des) paramètre(s) $\theta$:

$$f(\epsilon, \theta, t) = g[\epsilon, \Theta(\epsilon, \theta, t), t] \tag{8}$$

Le *paramètre renormalisé* $\tilde{\theta}(\epsilon, \theta, t)$ est construit de façon à ce que $g(\epsilon, \Theta, t)$ admette un développement en puissances de $\epsilon$ *uniformément convergent par rapport à* $\Theta$ *et à* $t$. Cette approche permet par exemple de déterminer le comportement aux grandes échelles spatio-temporelles des solutions d'équations aux dérivées partielles dépendant de façon singulière d'un petit paramètre $\epsilon$ [3].

• La renormalisation des processus de Markov [4] montre l'équivalence asymptotique (aux grandes échelles temporelles) des marches aléatoires browniennes et des processus de Wiener. On peut montrer[5]

[3] Pour fixer les idées, nous envisageons le cas de fonctions $f(t)$ dépendant d'une seule variable temporelle $t$; la généralisation à plusieurs variables est immédiate.

[4] A.H. Nayfeh, Perturbation methods, Wiley, New York (1973).

[5] J. Bricmont et A. Kupiainen, Rigorous renormalization-group and disordered systems, Physica A, **163**, 31-37 (1990). Renormalization group for diffusion in a random medium, Phys. Rev. Lett., **66**, 1689-1692 (1991).

par cette méthode qu'une mémoire finie (la distribution d'un pas dépendant de la réalisation des $k$ pas précédents, $1 < k < \infty$) et qu'un « faible désordre » (probabilités de transition aléatoires, variant à chaque pas de temps) ne détruisent pas la diffusion normale $< X^2(t) >\sim Dt$ (pour $t \to \infty$).

On peut aussi déterminer la loi de diffusion $< X^2(t) >\sim Dt^{2\nu}$ asymptotique de processus non-Markoviens (marches aléatoires auto-évitantes[6]) et calculer son exposant $\nu \neq 1/2$.

Enfin, la renormalisation met naturellement en évidence le caractère *auto-similaire* des lois stables et des processus browniens fractals; ceux-ci sont en effet des points fixes d'une transformation de renormalisation adéquate. Cette propriété peut être exploitée pour dégager, par renormalisations successives, la partie asymptotiquement auto-similaire d'une évolution stochastique [4].

• Dans le contexte des équations aux dérivées partielles stochastiques, la renormalisation permet[7] de tester la stabilité structurelle d'une équation aux dérivées partielles *déterministe* par rapport à une perturbation stochastique additive. En revenant dans le cadre physique, ce « bruit » modélise l'influence des degrés de liberté microscopiques non pris en compte explicitement dans le modèle. On justifie ainsi la capacité de l'équation déterministe à représenter la réalité physique telle qu'elle est perçue à notre échelle.

• Un problème ouvert est de clarifier le lien entre la renormalisation et l'*analyse non standard* [8]. Cette dernière est susceptible de fournir un langage particulièrement adapté à la mise en œuvre de méthodes de renormalisation. Il serait très certainement fructueux de considérer des transformations de renormalisation dépendant de facteurs d'échelle non standard. Inversement, certaines notions de base de l'analyse non standard peuvent être formulées en termes de transformations de renormalisation. Par exemple, l'étude des singularités locales d'une fonction $f$ fait appel à l'opérateur de renormalisation fonctionnel $R_{\alpha,x_0,\epsilon}$ défini par

$$[R_{\alpha,x_0,\epsilon}f](x) = f(x_0) + \frac{f[x_0 + \epsilon(x - x_0)] - f(x_0)}{\epsilon^\alpha} \qquad (\epsilon \text{ infiniment petit}) \tag{9}$$

On a bien sûr la loi de groupe $R_{\alpha,x_0,\epsilon_1}R_{\alpha,x_0,\epsilon_2} = R_{\alpha,x_0,\epsilon_1\epsilon_2}$ pour tout couple $(\epsilon_1, \epsilon_1)$ de nombres infiniment petits (donc non standard). La transformation $R_{\alpha,x_0,\epsilon}$ agit sur $f$ comme une loupe *parfairement locale* puisque son champ de vision est réduit au halo[9] de $x_0$. L'approche se généralise aux mesures fractales[10], où le caractère local de $R_{\alpha,x_0,\epsilon}$ apporte une précieuse simplification technique. En effet, les halos de points différents étant disjoints, il n'y a plus à se soucier du « recollement » des opérateurs $(R_{\alpha,x_0,\epsilon})_{x_0}$; on construit ainsi une transformation d'échelle « ponctuelle » qui permet d'élargir considérablement la notion d'auto-similarité d'une fonction ou d'une mesure.

**Conclusions**

Les méthodes de renormalisation apparaissent comme un outil rigoureux – et néanmoins constructif – pour étudier des phénomènes s'étendant sur une *large gamme d'échelles* (d'espace et/ou de temps), à utiliser lorsque les méthodes usuelles fondées sur la séparation des échelles échouent. Cet échec reflète l'existence de couplages entre les échelles, conduisant à des *lois d'échelle* dès qu'ils sont « homogènes[11] le long de l'axe des échelles » , c'est-à-dire *auto-similaires*. Bien que leur champ d'application soit très large, les méthodes de renormalisation sont fondées sur les mêmes principes (décimations ou coupures, prise en compte des degrés de liberté éliminés dans des paramètres effectifs, changements d'échelle) et leur mise en œuvre suit les mêmes étapes (construction de l'opérateur de renormalisation, analyse du flot de renormalisation dans un espace de modèles, si possible paramétré).

---

[6] P-G. De Gennes, Scaling concepts in polymer physics. 2ème édition. Cornell Univ. Press, Ithaca (1984).

[7] Voir par exemple D. Forster, D.R. Nelson et M.J. Stephen, Large-distance properties of a randomly stirred fluid, Phys. Rev. A **16**, 732-749, (1977) ou l'appendice 5D de [4].

[8] F. Diener et G. Reeb, Analyse Non Standard, Hermann, Paris (1989). A. Lesne, Renormalization-group insights in nonstandard analysis (and reciprocally), preprint (1998).

[9] Le halo de $x_0$ est l'ensemble $\{x_0 + \epsilon\}$ où $\epsilon$ décrit l'ensemble des nombres infiniment petits (donc non standard); le seul élément standard du halo de $x_0$ est $x_0$.

[10] B. Mandelbrot et C.J.G. Evertz, Exactly self-similar left-sided multifractals. Dans "Fractals and disordered systems", édité par A. Bunde et S. Havlin, Springer, Berlin (1991). Voir aussi [4], §7.2.

[11] c'est-à-dire lorsque le lien entre l'échelle $a$ et l'échelle $ka$ dépend de $k$ mais non de $a$.

Le choix délibéré d'abandonner la description des détails « microscopiques » rend possible une vision globale du système, centrée sur la description des phénomènes coopératifs et des liens entre les différentes échelles présentes dans le problème. Les résultats sont non seulement qualitatifs (*preuve* de l'existence de comportements auto-similaires décrits par des lois d'échelle) mais aussi *quantitatifs* (valeur des exposants et expression des fonctions universelles intervenant dans ces lois d'échelle). Ils sont surtout *robustes* puisqu'ils sont identiques pour tous les modèles d'une même classe d'universalité; ils ne sont donc pas invalidés par la possible méconnaissance du système aux petites échelles. En ce sens, les méthodes de renormalisation permettent de dépasser les limitations expérimentales et la « subjectivité » des théories physiques. A ce titre, elles marquent un tournant de la physique théorique.

### Quelques références générales:


[1] Laurie M. BROWN. Renormalization. From Lorentz to Landau (and beyond). Springer, Berlin (1993).

[2] Michael E. FISHER. "The renormalization-group and the theory of critical behavior". Rev.Mod.Phys. **46**, 597-616, (1974). "Renormalization group theory: its basis and formulation in statistical physics". Rev. Mod. Phys. **70**, 653-681, (1998).

[3] Nigel GOLDENFELD. Lectures on phase transitions and the renormalization-group. Series "Frontiers in Physics" vol. 85. Addison-Wesley, Reading (1992).

[4] Annick LESNE. Méthodes de renormalisation. Eyrolles, Paris (1995).

[5] Annick LESNE. "A comparative introduction to the renormalization methods used in statistical mechanics and for dynamical systems" et "Renormalization: a few words to avoid confusion". Actes du congrès "Workshop on renormalization in mathematics and physics", organisé par "European Women in Mathematics" et "Femmes et Mathématiques". Paris, IHP, 14-15 Juin 1996.

[6] Gérard TOULOUSE et Pierre PFEUTY. Introduction au groupe de renormalisation. Presses Universitaires de Grenoble (1974).