aart 2 1/02/08 14:25 Page 1

2

Déterminisme et aléatoire dans les systèmes complexes : un faux débat ?

Annick Lesne

L'étude[1] des systèmes complexes s'accompagne souvent d'une interrogation sur la nature, déterministe ou stochastique, des mécanismes à l'œuvre. Cette interrogation n'est pertinente, en physique, que si elle porte sur les modèles élaborés pour décrire le système réel ; la réponse dépend alors de façon cruciale de l'échelle à laquelle on se place. Il est ainsi possible d'introduire des modèles déterministes et des modèles stochastiques pour décrire un même phénomène, et de relier leurs variables et paramètres respectifs. Cette discussion va souligner l'importance de dégager les différentes échelles caractéristiques d'un phénomène, en particulier les longueurs et les temps de corrélation, avant d'aborder sa modélisation.

Les termes du débat

Le terme de « déterminisme » est aussi riche et difficile à cerner que le terme de « complexité » qui lui fait pendant dans le titre, ce qu'anticipe le pluriel avec lequel ils figurent. Je vais d'entrée préciser le sens restreint dans lequel je vais les envisager. Sans tenter de relever le défi de définir un système complexe, je prendrai ici la caractérisation assez large suivant laquelle *un système est complexe si le comportement collectif observé à l'échelle du système est plus riche que le comportement des éléments qui le composent*. Concernant le déterminisme, il ne s'agira en aucune manière d'aborder la délicate question, plus philoso-

1. J'entends ici l'étude menée par les physiciens, articulant observation, modélisation et prédiction des systèmes complexes. Une autre étude, sur la nature ontologique des systèmes complexes, peut aussi être menée, relevant alors de la philosophie. Nous renvoyons à ce propos à l'article de Michel Bitbol dans le présent ouvrage.

phique que physique, de la détermination, voire du finalisme. Je parlerai ici d'« évolution déterministe » lorsque la loi d'évolution est une équation différentielle ou intégro-différentielle, une équation aux dérivées partielles, voire un automate cellulaire à règles déterministes, c'est-à-dire l*orsqu'on utilise un modèle déterministe pour rendre compte de la dynamique : l'état instantané détermine alors univoquement l'état à l'instant suivant*. La question du déterminisme qui sera traitée ici ne portera donc que sur les représentations de la réalité considérées dans les modèles et théories physiques, ou issues de la physique. La théorie du chaos a par ailleurs montré que ce déterminisme ne devait pas être confondu avec la prédictibilité à long terme de l'évolution, laquelle disparaît (lorsque la dynamique est chaotique) dès qu'il existe la plus infime incertitude sur les conditions initiales ou sur les mécanismes en jeu [Ruelle, 1991].

Maintenant délimité le sens dans lequel entendre l'adjectif « déterministe », précisons celui des adjectifs « aléatoire » et « stochastique ». Je les emploierai indifféremment, en suivant l'usage établi (on parle par exemple de variable aléatoire mais de processus stochastique) et sans autre distinction que leur étymologie respectivement latine ou grecque. En particulier, je ne donnerai pas au terme « aléatoire » le sens restreint de « probabilité uniforme, sans biais et sans aucune corrélation temporelle ni spatiale ». Un processus stochastique peut posséder une structure temporelle très organisée, par exemple des corrélations à longue portée (et ce, même s'il est markovien, c'est-à-dire sans mémoire et entièrement caractérisé par les probabilités de transition élémentaires). En ce sens, une évolution déterministe apparaît simplement comme un cas très particulier de processus stochastique : un processus markovien, où la probabilité de transition du système d'un état à un autre est nulle sauf si la transition associée est celle prescrite par l'évolution déterministe. La théorie de l'information [Shannon, 1948], avec la notion d'entropie (par unité de temps) d'un processus, permet de quantifier l'organisation temporelle d'un processus et l'information qu'elle contient, précisément en mesurant l'écart entre la distribution du processus et la distribution totalement aléatoire d'une suite de variables indépendantes et uniformément distribuées [Karlin et Taylor, 1975].

Un premier élément de réponse face à l'alternative déterministe/stochastique posée en titre apparaît d'emblée : il va s'agir d'un débat technique, portant sur l'efficacité et la mise en œuvre de *modèles* (à des fins opérationnelles), et ce serait une erreur de le faire porter sur la *nature* des phénomènes envisagés (question indécidable dans le domaine de la physique). C'est cette réserve que je vais ici argumenter, en montrant que des visions déterministes et stochastiques ne s'excluent pas l'une l'autre, mais qu'au contraire elles s'entrecroisent, suivant l'échelle à laquelle elles se situent. Je vais détailler l'exemple de la diffusion et une de ses variantes : le mouvement brownien.

L'EXEMPLE DU MOUVEMENT BROWNIEN

Le mouvement brownien est un exemple emblématique de la coexistence aux différentes échelles de descriptions stochastiques et déterministes, et de l'impossibilité d'énoncer de façon absolue qu'un phénomène est déterministe ou stochastique. Il doit son nom au biologiste Robert Brown, qui en 1827 observa le mouvement erratique de particules initialement contenues dans des grains de pollen, extraites et placées en suspension dans de l'eau. L'explication de ce phénomène fut proposée en 1905 par Albert Einstein, et elle constitue l'une des premières théories s'appuyant explicitement sur la structure atomique de la matière, encore controversée à l'époque, et suggérant des tests expérimentaux et quantitatifs de cette structure [Einstein, 1905, 1956]. Une étude expérimentale fut menée quelques années plus tard par Jean Perrin ; elle confirma les travaux d'Einstein et permit d'obtenir une très bonne estimation du nombre d'Avogadro [Perrin, 1913]. Depuis cette époque, il est ainsi avéré que l'explication du mouvement brownien réside dans les collisions sur la particule des molécules d'eau en agitation thermique.

À l'échelle atomique, la description classique du phénomène est parfaitement déterministe : celui-ci apparaît comme une succession de collisions élastiques entre une particule et des molécules de vitesses bien déterminées, suivant les lois de la dynamique newtonienne. On peut ainsi développer un modèle totalement déterministe, à l'échelle des molécules. Un des buts est de justifier l'hypothèse de chaos moléculaire qui, depuis Boltzmann, fonde l'édifice de la mécanique statistique [Dorfman, 1999]. Cependant, on n'a pas accès en pratique à la vitesse initiale de chacune de ces molécules, et leur nombre est beaucoup trop grand pour pouvoir décrire l'ensemble des degrés de liberté associés ; de plus, le caractère chaotique de la dynamique microscopique rend irrémédiablement imprédictible le mouvement observé aux échelles supérieures. On choisit donc de décrire statistiquement l'influence des collisions moléculaires, ce qui conduit à divers modèles stochastiques pour la description du mouvement à l'échelle de la particule. On utilise par exemple un modèle effectif de marche aléatoire, à pas successifs indépendants dès que l'échelle de temps à laquelle on se place est très supérieure au temps de corrélation du mouvement de la particule. La limite continue de ce modèle conduit au processus de

Wiener, modèle idéal du mouvement erratique de la particule dans lequel l'échelle microscopique, à laquelle on voit des collisions et des mouvements rectilignes entre elles, est réduite jusqu'à la limite idéale où elle est exactement nulle [Wiener, 1948].

Une description stochastique plus explicite est également possible. Comme on a une grosse particule au milieu de molécules beaucoup plus petites, on invoque un argument de séparation des échelles pour décomposer l'effet des innombrables collisions moléculaires sur la particule en une force de friction $- \gamma u$ cohérente (force de frottement visqueux) et une force de Langevin f fluctuante (un bruit blanc). On détermine l'amplitude de la force de Langevin en écrivant qu'asymptotiquement, le système est à l'équilibre thermique à une température T et vérifie le théorème d'équipartition de l'énergie $kT/2$ par degré de liberté (où k est la constante de Boltzmann), en particulier pour ceux de la particule [Kubo *et al.*, 1991]. Cela revient en fait à écrire une condition de cohérence de la décomposition, puisque les deux termes ont la même origine physique. Par simple intégration, on déduit également de l'équation d'évolution de la vitesse de la particule que le mouvement suit une loi de diffusion normale $< x^2(t) > \sim Dt$ où le coefficient de diffusion D et le coefficient de friction γ sont reliés par la *relation d'Einstein* $D \gamma = kT$ (forme particulière du *théorème fluctuation-dissipation*, reliant l'amplitude des fluctuations et le coefficient de réponse par rapport au champ conjugué [Kubo, 1966]). Des travaux récents ont montré comment réconcilier les lois déterministes et réversibles de la dynamique newtonienne avec ces modèles stochastiques et irréversibles [Gaspard, 1998], en particulier en donnant l'expression dans chacun de ces modèles du coefficient de diffusion D.

Une dernière description est encore envisageable, si l'on a une population de particules, en introduisant la concentration $c\ (x, t)$ observable à l'échelle macroscopique : le comportement du système est alors décrit par une équation aux dérivées partielles déterministe, l'équation de diffusion $\partial c/\partial t = D\ \Delta c$, établie empiriquement à la fin du XIXe siècle.

DES MODÈLES DE NATURES DIFFÉRENTES SUIVANT L'ÉCHELLE D'OBSERVATION

La multiplicité de modèles s'articulant les uns aux autres, que nous venons de décrire dans le contexte du mouvement brownien, est en fait très générale. Typiquement, un système naturel est décrit au niveau microscopique (le niveau de ses constituants élémentaires, par exemple les individus en dynamique des populations) par un très grand nombre de degrés de liberté déterministes, dont l'évolution, chaotique, est très rapidement imprédictible. À une échelle un peu supérieure, mésoscopique, il sera donc plus pertinent et surtout plus efficace d'utiliser une modélisation stochastique ; l'état du système est alors décrit par des observables aléatoires. Les moyennes (spatio-temporelles) locales et instantanées de ces observables aléatoires sont des champs *réguliers et déterministes* : on moyenne à la fois les inhomogénéités (spatiales) et les fluctuations (statistiques). La justification mathématique de cette affirmation s'appuie sur la loi des grands nombres et le théorème limite central ; comme telle, elle n'est strictement vraie qu'asymptotiquement, lorsque le nombre d'éléments devient infini, mais elle est en général valable dès que ce nombre est assez grand. Cette image n'est mise en défaut que dans certaines situations particulières, dites *critiques*, où ces deux théorèmes ne s'appliquent pas : corrélations de portée infinie entre les individus, distributions individuelles larges, non stationnarité ou inhomogénéités [Laguës et Lesne, 2003].

À l'échelle microscopique, outre la description déterministe exacte (utilisée essentiellement à des fins théoriques), on peut développer des modèles discrets, généralement numériques, prenant explicitement en compte le comportement des différents agents, sous une forme simplifiée. Cette approche, permettant de dégager les ingrédients minimaux d'un phénomène, est très utilisée dans le domaine des systèmes complexes. Des automates cellulaires (modèles où l'espace, le temps et les états sont discrets) peuvent également être utilisés à l'échelle mésoscopique ; l'automate est alors régi par des règles probabilistes. Le comportement spatio-temporel de l'automate est relié à la description macroscopique déterministe par une approximation de « champ moyen » : typiquement, si X est une observable (variable aléatoire) de l'automate, l'observable macroscopique déterministe correspondante sera $< X >$ et on obtient l'équation d'évolution macroscopique en identifiant $< X^2 >$ avec $< X >^2$, autrement dit en négligeant les fluctuations $\delta X = X - < X >$. Évaluer l'influence de ces fluctuations dans le comportement global, c'est-à-dire évaluer l'écart à la théorie de champ moyen, et en fin de compte, évaluer la validité de la description macroscopique déterministe, est l'un des intérêts des approches utilisant des automates cellulaires [Chopard et Droz, 1998].

CARACTÉRISATION QUANTITATIVE D'UNE ÉVOLUTION

Pour expliciter et évaluer le caractère multi-échelles d'un système, des concepts et des outils ont été développés à la croisée de la mécanique statistique et de la théorie du chaos. La méthode la plus simple et la plus générale consiste à déterminer les fonctions de corrélation spatiales et temporelles du système. Les premières mesurent la corrélation statistique entre deux éléments du système distants de *r*, à un instant donné. Elles présentent typiquement une décroissance exponentielle en *exp* [$-r/\zeta$], où ζ est une échelle caractéristique appelée la *longueur de corrélation* ; ζ estime la distance au-delà de laquelle les éléments se comportent de façon indépendante. Les secondes sont l'analogue temporel des premières ; elles mesurent la corrélation statistique entre les états d'un même élément à deux instants séparés de *t*. Le comportement typique en *exp* [$-t/\tau$] de ces fonctions de corrélation temporelles fait apparaître un temps caractéristique appelé le temps de corrélation. τ et ζ vont ainsi prescrire respectivement le pas de temps et la taille des éléments dans une description mésoscopique effective du système. Une décroissance plus lente qu'une exponentielle, typiquement en loi de puissance (et donc associée à une divergence des temps et longueurs de corrélation), est la signature d'un phénomène critique, pour lequel d'autres méthodes multi-échelles (les méthodes de *renormalisation*), plus sophistiquées que l'approche de champ moyen esquissée ci-dessus, doivent être développées [Laguës et Lesne, 2003].

Je citerai également l'ϵ-entropie, initialement introduite par Kolmogorov et Tikhomirov dans un contexte mathématique (approximation de fonctions) [Kolmogorov et Tikhomirov, 1959]. Sans rentrer dans les détails techniques (le lecteur intéressé pourra se reporter à [Nicolis et Gaspard, 1994] et à [Boffetta *et al.*, 2002]) il s'agit d'une mesure de la quantité d'information générée par unité de temps lorsque la résolution de l'observateur dans l'espace de phase n'est pas infiniment précise mais est égale à $\epsilon > 0$.

Un intérêt de cet indice, outre le fait d'être une caractéristique globale et quantitative de la dynamique, est de ne pas requérir le cadre étroit et subjectif d'un modèle pour être définie, estimée et interprétée. Au contraire, elle permet d'évaluer à partir de données expérimentales le caractère déterministe ou stochastique du comportement observé dans une gamme donnée d'échelles : elle fournit ainsi un guide précieux dans le choix de la modélisation la plus appropriée. Des « étalons » sont fournis par quelques modèles typiques. Dans un système chaotique déterministe, par exemple, cette entropie (un débit, en fait, puisqu'il s'agit d'une grandeur par unité de temps) tend vers une limite finie lorsque ϵ tend vers 0, égale à l'entropie de Kolmogorov-Sinai du système dynamique. Au contraire, elle se comporte comme $1/\epsilon^2$ pour le modèle de mouvement brownien qu'est le processus de Wiener. Il est intéressant d'examiner la divergence associée quand ϵ

tend vers *0* : celle-ci reflète le caractère idéalisé aux petites échelles de ce modèle (le mouvement brownien réel redevient régulier aux échelles spatiales inférieures au libre parcours moyen, c'est-à-dire à la distance parcourue par la particule entre deux collisions avec des molécules d'eau). Aux très petites échelles, le modèle stochastique n'est plus légitime, et il faut revenir à une description déterministe dans le cadre de la dynamique newtonienne. La notion se généralise : on peut de même définir une (ϵ,τ)-entropie où l'on fait aussi varier le pas de temps τ de la description, pour quantifier la régularité temporelle de l'évolution [Gaspard et Wang, 1993].

PERSPECTIVES : OÙ SONT LES « VRAIS » DÉBATS ?

Si la discussion opposant déterminisme et stochasticité est un faux débat, quels sont alors les vrais débats jalonnant la description et la compréhension des systèmes complexes ? Les pages précédentes nous ont préparés au premier d'entre eux, concernant la façon de *prendre en compte les différentes échelles* présentes dans un système complexe. Une caractérisation essentielle des systèmes complexes, apparaissant dans leur définition même, est en effet l'existence de différents niveaux, s'échelonnant depuis l'échelle « microscopique » des individus et des règles régissant leur comportement, jusqu'à l'échelle « macroscopique », globale, où s'effectue l'observation du système complexe dans son ensemble.

Deux approches opposées sont généralement envisagées : une approche appelée *top-down*, que l'on peut résumer comme étant une approche empirique, partant de l'observation macroscopique pour tenter d'en inférer les mécanismes sous-jacents ; une approche *bottom-up*, familière entre autres en physique et plus particulièrement en mécanique statistique, où l'on part des propriétés élémentaires que l'on agrège pour en déduire les comportements collectifs. Cependant, plusieurs propriétés communes à de nombreux systèmes complexes remettent en question l'une et l'autre de ces approches, du moins dans la version simple que je viens de rappeler.

La première de ces propriétés est le fait que les interactions du système avec l'extérieur prennent généralement place à toutes les échelles. Il faut donc, *à chaque étape de la progression descendante ou ascendante, prendre en compte des éléments extérieurs de natures différentes*. Un exemple est la formation des reliefs côtiers, où interviennent non seulement les vagues et la turbulence à petite échelle dans l'eau de la frange littorale, mais aussi les courants, à une échelle intermédiaire, et enfin, à grande échelle, les marées, la pression et autres variations climatiques. Ces éléments extérieurs interviennent à des échelles différentes, ce qui oblige à considérer autant de niveaux différents dans la description de la dynamique et des conditions aux bords [Werner, 1993].

La seconde propriété nécessitant une modification des approches ascendantes ou descendantes est la présence de rétroactions des niveaux supérieurs sur les éléments. La plus simple de ces rétroactions est celle où les comportements globaux interviennent sous forme de champs additionnels dans la description microscopique. Un exemple familier des physiciens est celui des milieux magnétiques, où le comportement collectif des spins (un spin est une petite boussole placée sur chaque atome, interagissant avec les boussoles voisines, et sensible au champ magnétique ambiant) crée un champ global venant s'ajouter à l'éventuel champ magnétique appliqué au système. Une telle situation peut se résoudre à l'aide d'une *méthode autocohérente, de champ moyen*, où l'on écrit que la résultante des interactions entre les paires de spins voisins a l'effet d'un champ magnétique proportionnel à l'aimantation globale ; cela correspond à moyenner spatialement (c'est-à-dire sur l'ensemble des spins) le champ créé sur un spin par ses voisins. Cette approche n'est cependant valable que si les corrélations entre les individus, ici les spins, sont de portée finie. La situation alternative où les corrélations sont à longue portée (corrélations à ne pas confondre avec les couplages directs, ici à courte portée) se traite à l'aide de *méthodes de renormalisation*, s'appuyant précisément sur l'invariance d'échelle associée à la divergence de la longueur de corrélation [Laguës et Lesne, 2003]. Dans un système complexe, les rétroactions peuvent être beaucoup plus dramatiques et *modifier jusqu'aux potentialités des éléments* : par exemple, un élément monostable peut devenir bistable. L'analogie de ce type de rétroaction dans l'exemple du milieu magnétique ci-dessus serait une dépendance de la température T (énergie cinétique moyenne des degrés de liberté microscopiques) vis-à-vis de l'aimantation globale ou de la longueur de corrélation ; une telle rétroaction a été réalisée artificiellement, conduisant à une situation de criticalité auto-organisée rappelant celles couramment rencontrées dans les systèmes complexes [Sornette, 1992]. Un exemple naturel est fourni par le chromosome et le niveau d'organisation intermédiaire qu'est la fibre de chromatine : l'insertion de l'ADN dans la superstructure chromatinienne contraint mécaniquement la double hélice et modifie radicalement ses interactions avec les protéines avoisinantes (comparé aux mêmes interactions ADN-protéines *in vitro*, sur des fragments d'ADN libre) [Victor *et al.*, 2002].

La troisième propriété interdisant une approche simplement ascendante ou descendante est l'omniprésence des architectures en réseaux dans les schémas d'interactions [Thomas et Kaufman, 2001]. Là encore, la notion de causalité séquentielle disparaît. L'effet de ces réseaux peut être d'améliorer la robustesse du comportement global par la capacité d'absorption et de réparation d'une perturbation locale. On pense aux réseaux de neurones, ou aux réseaux de distribution et de communication (Internet, trafic aérien), où la destruction d'une petite partie du réseau peut être compensée par une réorganisation des flux, restaurant les capacités initiales du réseau [Vespignani et Pastor-Satorras, 2004]. L'effet peut être au contraire d'amplifier une perturbation locale, permettant à un seul ingrédient de modifier qualitativement le comportement global.

CONCLUSION : MODÈLES ET ÉMERGENCE

En conclusion, descriptions déterministes et stochastiques ne doivent pas être envisagées comme les termes inconciliables d'une alternative, mais au contraire comme des points de vue complémentaires sur un phénomène donné, plus ou moins appropriée suivant l'échelle d'observation et les connaissances que l'on a *a priori* sur le système. Face à un phénomène naturel, la question pertinente ne sera pas celle de son caractère déterministe ou stochastique, mais plutôt les interrogations suivantes, dont les réponses ne dépendent en rien de l'éventuelle modélisation du phénomène et fournissent de ce fait une caractérisation « objective » :

— quelles sont les symétries et invariants à une échelle donnée ?

— quelles sont les différentes échelles caractéristiques (dans l'espace réel, l'espace de phase et le temps) ? Et quelles sont les corrélations présentes dans le système ?

— quelle est l'information contenue à une échelle donnée ((ϵ,τ)-entropie) ?

Toutes les observables sont des idéalisations plus ou moins évidentes et extrêmes de la réalité : c'est un choix subjectif de la représenter par une variable $X(t)$, une valeur moyenne $< X(t) >$ ou une distribution $P(X, t)$, sachant qu'on observe en fait une réponse moyennée sur une fenêtre temporelle, avec une résolution imparfaite, pour des conditions initiales imprécises et un environnement fluctuant. Le choix de la description correspondra au modèle le plus opérationnel suivant l'échelle de la description, comparée aux temps et longueur de corrélation et à l'échelle globale (taille du système, durée de l'observation). Difficultés et paradoxes n'apparaissent que si l'on interprète une distinction *quantitative* comme une différence *qualitative*, portant sur la nature des phénomènes.

Le débat esquissé dans les pages précédentes présente différents prolongements. Il ouvre d'une part sur les réflexions concernant la *détermination* et le *libre arbitre*, que je n'aborderai pas car les arguments relèvent du champ de la philosophie, voire de la théologie, et la question doit être traitée en conséquence. D'autre part, en restant dans le domaine de la physique et de la modélisation mathématique des phénomènes naturels, des interrogations similaires apparaissent concernant d'une part le caractère *discret ou continu*, d'autre part le caractère *réversible ou non réversible* d'un phénomène naturel. Là aussi, la question n'est bien posée (au sens mathématique d'un problème bien posé) que si elle concerne les descriptions que nous pouvons proposer de ce phénomène, et la réponse dépend de nouveau de façon essentielle de l'échelle à laquelle on se place. L'exemple de la diffusion ou celui de la cinétique chimique montrent que peuvent coexister une description déterministe, discrète et réversible (à l'échelle microscopique), des descriptions stochastiques, continues et irréversibles (aux échelles intermédiaires, mésoscopiques) et une description déterministe, continue et irréversible (à l'échelle macroscopique) [Arnold, 1980 ; Lemarchand et Vidal, 1988].

Notons enfin que notre discussion propose une clé à la délicate question de l'émergence, essentielle dans les sciences de la complexité. Strictement, c'est le modèle idéal utilisé à l'échelle d'observation qui présente des propriétés émergentes, c'est-à-dire des propriétés insoupçonnables au vu des propriétés des éléments. Ce modèle est idéal au sens où il est obtenu après passage à la limite (taille $N \to \infty$, durée $t \to \infty$, résolution dans l'espace de phase $\epsilon \to 0$). L'exemple physique le plus emblématique est fourni par les transitions de phase, que rien dans les mécanismes moléculaires ne laisse présager. Ce n'est que dans la limite où le nombre N de particules du système tend vers l'infini qu'il apparaît une singularité dans les propriétés thermodynamiques du système. Un autre exemple est celui des bifurcations et brisures de symétrie spatiales associées à la formation de motifs : c'est cette fois dans la limite $t \to \infty$ que la propriété est avérée. On peut extrapoler et parler de propriété émergente pour qualifier le phénomène lorsque les propriétés observées sont très proches de celles du modèle idéal : elles restent cependant de nature différente (elles ne présentent pas par exemple de singularités). Ce n'est que si l'on identifie strictement réalité et modèles idéaux, improbabilité et impossibilité, qu'il peut apparaître des paradoxes insolubles.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARNOLD L. (1980), « On the consistency of the mathematical models of chemical reactions », *in* HAKEN H. (éd.), *Dynamics of Synergetic Systems*, Springer, Berlin, p. 107-118.

BOFFETTA G., CENCINI M., FALCIONI M. et VULPIANI A. (2002), « Predictability : a way to characterize complexity », *Physics Reports,* 356, p. 367-474.

CHOPARD B. et DROZ M. (1998), *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

DORFMAN J. R. (1999), *An Introduction to Chaos in Non Equilibrium Statistical Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.

EINSTEIN A. (1905), « On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat », Ann. Physik, 17, p. 549-560 ; repris *in Investigations on the Theory of Brownian Motion*, Dover, New York, 1956.

GASPARD P. (1998) *Chaos, Scattering Theory and Statistical Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge.

GASPARD P. et WANG X.J. (1993), « Noise, chaos and (Ù, Є)-entropy per unit time », *Phys. Rep*., 235, p. 321-373.

KARLIN S. et TAYLOR H. M. (1975), *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

KOLMOGOROV A. N. et TIKHOMIROV V. M. (1959), « Є-entropy and Є-capacity of sets in functional space », Russian Mathematical Surveys, 2, p. 277-364 ; disponible in SHIRYAYEV A.N. (1993), Selected Works of A. N. Kolmogorov, vol. III, Kluwer, Dordrecht, p. 86-170

KUBO R. (1966), « The fluctuation-dissipation theorem », *Rep. Prog. Phys*., 29, p. 255.

KUBO R., TODA M. et HATSUHIME N. (1991), *Statistical Physics II. Non Equilibrium Statistical Mechanics*, Springer, Berlin.

LAGUËS M. et LESNE A. (2003), *Invariances d'échelle,* Belin, Paris.

LEMARCHAND et VIDAL C. (1988), *La Réaction créatrice : dynamique des systèmes chimiques*, Hermann, Paris.

NICOLIS G. et GASPARD P. (1994), « Toward a probabilistic approach to complex systems », *Chaos, Solitons and Fractals*, 4, p. 41-57.

PERRIN J. (1913), *Les Atomes*, Flammarion, coll. « Champs », réédition de l'édition originale publiée aux Éditions Félix Alcan, Paris.

RUELLE D. (1991), *Hasard et chaos*, Odile Jacob, Paris.

SHANNON C. E. (1948), « A mathematical theory of communication », *The Bell System Technical Journal*, 27, p. 479-423 et p. 623-656.

SORNETTE D. (1992), « Critical phase transitions made self-organized : a dynamical system feedback mechanism for self-organized criticality », *J. Phys. I France*, 2, 2065.

THOMAS R. et KAUFMAN M. (2001), « Multi-stationarity, the basis of cell differentiation and memory. I. Structural conditions of multi-stationarity and other non-trivial behaviour. II. Logical analysis of regulatory networks in terms of feedback circuits », *Chaos* 11, p. 170-195.

VESPIGNANI A. et PASTOR-SATORRAS R. (2004), *L'Internet,* Belin, Paris.

VICTOR J. M., BEN HAIM E. et LESNE A. (2002), « Intercalation and buckling instability of DNA linker within locked chromatin fiber », *Physical Review E*, 66, 060901.

WERNER B. T. (1999), « Complexity in natural landform patterns », *Science*, 284, 102.

WIENER N. (1948), *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine*, MIT Press, Cambridge, Mass.