Principales propriétés de l'opérateur de convolution

Définition de l'intégrale de convolution de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$:

$$x * y = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot y(t-u) du$$

Remarque sur la notation : $x * y$ est souvent notée $x(t) * y(t)$ mais la variable t est celle du résultat, il faudrait plutôt écrire $c(t) = x * y$.

Remarque sur les unités : $x(t) * y(t)$ n'a pas la même unité que $x(t) \cdot y(t)$. Par exemple si $x(t)$ et $y(t)$ sont des tensions (unité V), $x(t) * y(t)$ est en V^2s. Dans l'étude des systèmes linéaires, on a affaire à une convolution d'un signal avec une réponse impulsionnelle (RI) $h(t)$: $s(t) = h(t) * e(t)$. Dans ce cas, l'unité de la grandeur de sortie peut être la même que celle d'entrée. Exemple : la RI d'un filtre relie la tension de sortie à la tension d'entrée. L'unité de la RI est alors : s^{-1}.

L'intégrale de convolution existe également pour les distributions à condition que l'une des deux distributions du produit de convolution soit à support borné (durée finie), p. ex. la distribution de Dirac.

Propriétés :

(1) commutativité :	$x * y = y * x$
(2) distributivité :	$[a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] * z(t) = a \cdot [x(t) * z(t)] + b \cdot [y(t) * z(t)]$
(3) associativité :	$x * (y * z) = (x * y) * z$
(4) invariance au décalage :	$x(t-t_0) * y(t) = x(t) * y(t-t_0)$
(5) identité :	$x * \delta = x$
(6) dérivée :	$(x * \delta)' = x * \delta' = x' * \delta = x'$
(7) transformée de Laplace:	$z(t) = x(t) * y(t) \Rightarrow Z_L(p) = X_L(p) \cdot Y_L(p)$
(8) transformée de Fourier :	$z(t) = x(t) * y(t) \Rightarrow Z(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$

La propriété (5) est une autre manière de définir la distribution de Dirac : c'est l'application qui associe à une fonction $x(t)$ sa valeur en un point t particulier :

$$x * \delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot \delta(t-u) du = x(t)$$