Mesures Physiques

Travaux dirigés n°3. Transformées de Laplace et de Fourier.

I. Soit le signal $\mathrm{Rect}(t/\tau) = 1$ pour $t \in [-\tau, \tau]$ et 0 ailleurs.

1. Calculez la TL et précisez son domaine d'existence.
2. Calculez la TF et représentez son spectre (module et phase).
3. Déterminez l'expression des zéros du spectre, notés ω_k.
4. Que devient le spectre lorsque la durée τ tend vers l'infini ou vers zéro ?

II. Soit la fonction $f(t) = \exp(-at).\Gamma(t)$, avec a un réel positif et $\Gamma(t) = 1$ pour t>0 et 0 ailleurs.

1. Calculez la TL et précisez son domaine d'existence.
2. Montrez comment ce résultat se déduits de la TL de la fonction échelon.
3. Calculez la TF et représentez son spectre (module et phase).
4. Déterminez la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ du spectre.

III. Soit la fonction $f(t) = \exp(-t^2)$.

1. Calculez la TL et précisez son domaine d'existence.
2. Calculez la TF et représentez son spectre (module et phase).

IV. Soit la fonction $f(t) = \sin(\omega_0 t).\Gamma(t)$.

1. Trouvez la TL sans faire de calcul (utilisez les résultats du I et les propriétés de la TL).
2. Idem pour la TF. Représentez son spectre (module et phase).

V. Soit la fonction $f(t) = \frac{1}{2\pi\sigma}\exp(-(t-t_0)^2/2\sigma^2)$.

1. Trouvez la TL sans faire de calcul (utilisez les résultats du IV et les propriétés de la TL).
2. Idem pour la TF. Représentez son spectre (module et phase).

VI. Inégalité d'Heisenberg

Considérons l'ensemble des fonctions f(x) de carré sommable et normées, c'est-à-dire telles que : $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$. Si l'on suppose que $|f(x)|$ est symétrique, alors la largeur de la fonction f(x) est définie par : $\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx$. On note F(k) la transformée de Fourier de f(x).

1. Quelle est l'expression de Δk^2, la largeur de F(k) ?
2. Rappelez la relation liant F(k) et la transformée de Fourier de la dérivée de f(x) : G(k).
3. A l'aide de l'égalité de Parseval et du résultat précédent, montrez que : $\Delta k^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$

4. On définit un polynôme P(λ) à l'aide de l'intégrale suivante : $P(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x.f(x) + \lambda.f'(x) \right|^2 dx$

Justifiez que P(λ) est toujours ≥0.

5. Exprimez le discriminant de P(λ) à l'aide de Δx^2, Δk^2 et de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).f'(x)dx$.

6. Montrez que I=-1/2.

7. Déduire des résultats précédents l'inégalité suivante : $\Delta x.\Delta k \geq \frac{1}{2}$. Commentez.