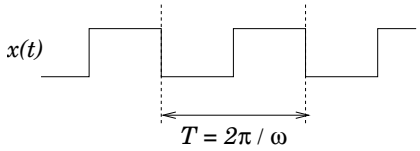
Introduction à la série de Fourier

Premier exemple et motivations

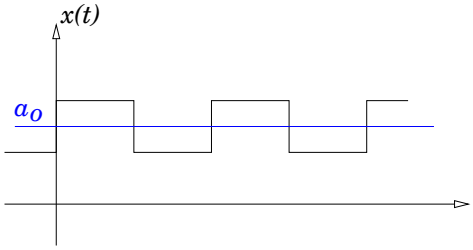
La théorie des systèmes linéaires permet de déterminer la réponse du système à une sollicitation sinusoïdale : on est capable d'obtenir par exemple le déplacement d'un oscillateur mécanique amorti soumis à l'action d'une force extérieure $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ ou, de la même manière, de connaître la tension $v_s(t)$ en sortie d'un circuit électrique (linéaire) si on connaît la tension appliquée à l'entrée $v_e(t) = v_0 \cos(\omega t)$.

On peut alors se poser la question de déterminer la réponse d'un système linéaire à une sollicitation qui est *périodique*, mais non *harmonique*, et ne peut donc pas s'exprimer comme une fonction sinusoïdale.

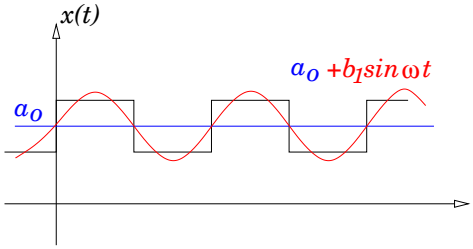
Par exemple, on peut considérer la fonction $x(t)$ périodique de période T de figure :



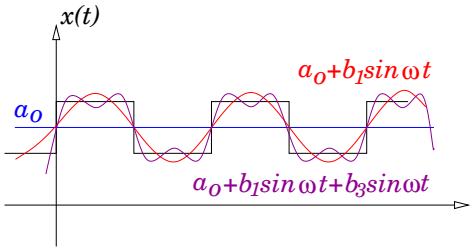
Le résultat auquel on va s'intéresser dans ce document est le suivant : on peut montrer qu'une fonction $x(t)$ périodique quelconque peut être approchée par une somme de fonctions sinusoïdales de périodes T, puis $T/2$, $T/3$ etc, et que cette approximation peut être rendue de plus en plus précise en rajoutant de plus en plus de termes. On peut décrire cette technique sur l'exemple de la figure précédente. D'abord, on essaye d'approcher la fonction $x(t)$ par une fonction constante, $x(t) \simeq a_0$ qui rend compte de sa valeur moyenne :



Ensuite, pour reproduire son allure oscillante, on ajoutera à a_0 une fonction oscillante $b_1 \sin(\omega t)$, avec la même période T :



Puis, pour s'approcher de la forme "moins arrondie" de la fonction, on s'aperçoit qu'il faut ajouter des fonctions sinusoïdales de pulsation de plus en plus élevée (période plus courte) et proportionnelles à la pulsation fondamentale. Par exemple, pour le cas de la fonction considérée dans la figure, la contribution suivante s'écrit $b_3 \sin(3\omega t)$:



Nous avons donc que, pour des valeurs appropriées de a_0, b_1 et b_3,

$$x(t) \simeq a_0 + b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t)\,. \tag{1}$$

Comme nous verrons dans la deuxième partie, cette séquence de termes peut être allongée à volonté pour obtenir des approximation de plus en plus précises de la fonction périodique, et on peut montrer qu'à la limite d'une somme infinie de termes (série) on arrive à reproduire parfaitement l'allure de la fonction périodique $x(t)$.

Mais avant de passer aux définition générales, revenons à la question initiale : pourquoi une telle *décomposition* en fonction sinusoïdales est intéressante si on veut déterminer la réponse d'un système linéaire à la sollicitation $x(t)$ donnée ? C'est justement en raison de la linéarité du système : nous savons en effet que un système linéaire (dont le comportement est décrit par des équations différentielles linéaires) est tel que si on applique une sollicitation qui est la somme de deux fonctions, la réponse sera la somme des deux réponses aux deux sollicitations prises séparément. Si on arrive donc à décomposer "l'entrée" du système dans une somme de contributions sinusoïdales, la réponse sera donnée simplement par la somme des réponses à chaque contribution. Nous allons revenir brièvement sur ce point à la fin de ce document.

Série de Fourier sur la base des fonctions sinusoïdales

L'opération de décomposition en fonctions sinusoïdales est très générale et peut s'appliquer à toute fonction périodique. Pour comprendre l'expression générale de cette décomposition il est utile de remarquer que, dans l'exemple que nous avons pris, la fonction était impaire, et son développement ne comprenait en effet que des fonctions sinus, elles aussi impaires. Si au contraire on avait pris une fonction paire, le développement aurait comporté des fonctions cosinus. Dans le cas général d'une fonction ni paire ni impaire, les deux sont présents.

Écrivons (sans démonstration) la définition du **développement en série de Fourier sur la base des fonctions sinusoïdales** :

soit $x(t)$ une fonction périodique de période $T = 2\pi/\omega$; $x(t)$ est alors identique à son développement en série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t). \tag{2}$$

Cette écriture est intéressante mais incomplète : évidemment, elle ne serait pas très utile si on n'avait pas un moyen de déterminer les coefficients a_n et b_n. Sur la base de considérations très générales, nous pouvons déjà dénombrer certaines propriétés de ces coefficients :

– Si $x(t)$ est une *fonction réelle*, alors les coefficients a_0, a_n et b_n sont réels.
– Si $x(t)$ est une *fonction paire*, alors les coefficients des sinus sont tous nuls : $b_n = 0 \ \ \forall n > 0$.
– Si $x(t)$ est une *fonction impaire*, alors les coefficients des cosinus sont nuls : $a_n = 0 \ \ \forall n > 0$.

Ces propriétés peuvent parfois simplifier remarquablement les calculs.

En autre, nous savons déjà que le coefficient a_0 doit correspondre à la valeur moyenne de la fonction $x(t)$. Le calcul de l'expression générale des autres coefficients demande un peu de théorie mathématique, que nous n'allons pas faire ici. Le résultat final est que l'on peut calculer les **coefficients du développement en série de Fourier** sur la base des fonctions sinusoïdales comme suit :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ dt \tag{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)\ dt \tag{4}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)\ dt\,. \tag{5}$$

Nous allons seulement mentionner ici que ces formules peuvent être interprétées comme des produits scalaires entre la fonction $x(t)$ et les fonctions $\cos(n\omega t)$ et $\sin(n\omega t)$. Nous n'utiliserons pas cette convention, mais il est utile de remarquer que l'opération qui permet de calculer les coefficients de Fourier fait correspondre à deux fonctions l'intégrale de leur produit : $f(t),\ g(t) \to \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot g(t)\ dt$. Le même type d'opération sera fait dans la partie suivante pour des fonctions à valeurs complexes, et nous verrons comment il faut l'écrire dans ce cas[1].

Une dernière remarque doit être faite en relation aux bornes d'intégration : nous avons limité l'intégrale entre 0 et T, mais en effet, les fonctions $f(t)$ intégrées étant toutes périodiques de période T, on a $\int_0^T f(t)\ dt \equiv \int_{t_x}^{t_x+T} f(t)\ dt$, pour n'importe quelle valeur de t_x : on peut choisir librement les bornes d'intégration, pourvu que l'intervalle d'intégration soit de longueur T.

Série de Fourier sur la base des exponentielles complexes

Nous nous sommes intéressés à la décomposition en série de fonctions sinusoïdales parce que nous savions déterminer la réponse d'un système linéaire à de telles fonction. Cependant, dans l'étude des équations différentielles linéaires, nous nous sommes vite aperçus que ces fonctions ne sont pas très pratiques à manipuler, et qu'il était beaucoup plus efficace de les récrire comme la partie réelle d'exponentielles complexes, beaucoup plus simples à utiliser. Il est donc naturel de se poser la même question ici : est-il possible de ré-exprimer le développement en série de Fourier en notation complexe ?

Il est facile de deviner que la réponse est affirmative. Il suffira en fait de récrire les fonctions sinus et cosinus comme

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} \qquad\qquad \sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} \tag{6}$$

et de réarranger les termes dans l'expression (1) pour obtenir le **développement en série de Fourier sur la base des exponentielles complexes** :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}\,. \tag{7}$$

[1] La même opération sera d'ailleurs encore nécessaire pour définir les transformées de Fourier et de Laplace.

On note parfois $f_n(t) = e^{jn\omega t}$, où ω est toujours égale à $2\pi/T$. Remarquons que la série comporte maintenant des termes allant de $-\infty$ à $+\infty$, à la différence du développement en sinus et cosinus.

Les **coefficients de la série**, c_n, peuvent être déterminé directement par le réarrangement des termes de la série à partir des a_n et b_n. On obtient les relations suivantes, toutes valables pour n positif :

$$c_0 = \quad a_0 \tag{8}$$

$$c_n = \quad (a_n - jb_n)/2 \tag{9}$$
$$c_{-n} = \quad (a_n + jb_n)/2 \tag{10}$$

$$a_n = \quad c_n + c_{-n} \tag{11}$$
$$b_n = \quad j(c_n - c_{-n})\,. \tag{12}$$

Comme on décompose maintenant $x(t)$ sur des fonctions complexes, il est normal que les coefficients c_n soient aussi complexes. On peut déduire les propriétés générales des coefficients c_n à partir des propriétés des a_n et b_n. En indiquant avec $\bar{z}$ le complexe conjugué de z :

- Si la fonction $x(t)$ est *réelle*, alors les a_n et b_n sont réels et, par conséquent, $c_n = \bar{c}_{-n}$.
- Si $x(t)$ est *paire*, alors $b_n = 0$ implique $c_n = c_{-n}$;
- si $x(t)$ est *impaire*, alors $a_n = 0$ implique $c_n = -c_{-n}$;
- si donc $x(t)$ est *réelle et paire*, les c_n sont *réels et tels que* $c_n = c_{-n}$,
- et si $x(t)$ est *réelle et impaire*, les c_n sont *imaginaires purs et tels que* $c_n = -c_{-n}$.

Les propriétés des coefficients c_n sont illustrées dans un des annexes au cours.

Les coefficients de la série peuvent être aussi déterminés indépendamment du développement sur les fonctions sinus et cosinus, et on prouve qu'ils s'écrivent de manière équivalente comme suit :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega t}\,dt\,. \tag{13}$$

Il est intéressant de remarquer que l'opération donnant c_n à partir des fonctions $x(t)$ et $f_n(t)$ est l'intégrale du produit de la première pour le complexe conjugué de la deuxième, c'est à dire l'opération $f(t), g(t) \to \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\bar{g}(t)\,dt$. Cette opération représente la version plus générale de celle déjà utilisée pour le cas des fonctions trigonométriques, valable aussi pour des fonction complexes.

Spectre, énergie et puissance

On appelle *spectre* de la fonction $x(t)$ l'ensemble des coefficients c_n. Ces coefficients étant complexes, on a l'habitude d'en représenter séparément la le module $|c_n|$ et la phase $\arg(c_n)$, sous la forme de fonctions (discrètes) de n (voir annexes). On peut aussi, bien sûr, en représenter partie réelle et partie imaginaire, sans perte d'information.

Il est important de comprendre que la connaissance du spectre d'une fonction périodique permet de la reconstruire complètement, à travers son développement en série de Fourier : le spectre contient donc *toute* l'information sur la fonction.

Par analogie avec les circuits électriques[2], on définit la *puissance moyenne* d'une fonction $x(t)$

[2]En électronique, si $v(t)$ représente la tension aux bornes d'une résistance et $i(t)$ le courant qui la traverse, alors la puissance instantanée consommée par la résistance est $p(t) = v(t)i(t) = v^2(t)/R$, et la puissance moyenne est donnée par l'intégrale de cette grandeur sur une période, divisée par la période. En effet, les mêmes définitions

comme

$$P(x) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt \tag{14}$$

et son *énergie* comme $E(x) = \int_0^T |x(t)|^2\, dt$ (rappelons que si $x(t)$ est une fonction complexe, $|x(t)|^2 = x(t)\bar{x}(t)$). Comme nous avons remarqué, le spectre de $x(t)$ doit contenir toute l'information sur $x(t)$, et il n'est donc pas étonnant que la puissance moyenne puisse être exprimée aussi sur la base des coefficients c_n. Il suffit en effet de développer $x(t)$ en série de Fourier et de substituer dans la définition (14) pour obtenir le **théorème de Parseval :**

$$P(x) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\,. \tag{15}$$

Il est donc équivalent d'intégrer la fonction $x(t)$ sur une période (et diviser par la période) ou de sommer tous les modules de ses coefficients de Fourier.

Nous verrons que ce théorème se généralise aux spectres des fonctions non périodiques (pour la *transformée* de Fourier) et aux signaux aléatoires (théorème de Wiener-Khintchine).

Conclusion

Comme nous avons vu, la décomposition en série de Fourier permet de déterminer la réponse d'un système à une sollicitation non sinusoïdale. Il est particulièrement intéressant de faire une analyse de ce type en électronique, où les signaux sont typiquement périodiques. Les circuits considérés en électronique se comportent souvent comme des *filtres*, c'est-à-dire ils transmettent certaines fréquences sans atténuation, alors que d'autres sont fortement atténuées. En termes de développement en série de Fourier, donc, on dira que seulement certaines composantes (termes de la série) sont transmises. Dans le cas d'un filtre passe-bas, par exemple, on peut voir l'effet sur les différents termes de la série de Fourier : en partant de la série complète, qui représente le signal d'entrée, le filtre coupe les fréquences plus élevées, les variations plus rapides sont supprimées et on observe en sortie un signal de plus en plus arrondi si la *fréquence de coupure* devient de plus en plus petite. Un filtre passe-haut, au contraire, sera capable de supprimer la composante continue $c_0 = a_0$ et certaines des oscillations à fréquences plus faibles, un filtre passe-bande sera éventuellement capable de ne laisser passer que une seule composante de la série, etc.

Il est possible de trouver des présentations alternatives et des outils interactifs concernant la série de Fourier dans plusieurs sites internet, dont on signale un choix non-exhaustif :

- *http://lumimath.univ-mrs.fr/ jlm/cours/fourier/fouriersos.htm*
- *http://www.ac-nice.fr/physique/Fourier/fourier.htm*
- *http://fcd.ema.fr/webg4/fourier.pdf*
- *http://mwt.e-technik.uni-ulm.de/world/lehre/basic_mathematics/fourier_fr/node2.php3*

peuvent être appliquées au cas d'un oscillateur mécanique amorti : voir *Le cours de physique de Feynman, mécanique I*, chapitre 24.