Examen du 4 septembre 2006.

Durée : 2h.
Aucun document autorisé. Téléphones portables éteints.
Calculatrices type collège, non graphiques et non programmable autorisées.
Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1. Solution d'équations différentielles par transformée de Laplace

L'évolution dans le temps d'une population de bactéries est déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = n \cdot x(t) - m \cdot x(t) + f(t) \qquad (1)$$

où $x(t)$ représente le nombre d'individus au temps *t*, *n* et *m* sont respectivement les taux de naissance et de mort (constants), et $f(t)$ représente l'apport d'individus fait par un opérateur extérieur.

1. Dans une première expérience, l'opérateur injecte une quantité *c* donnée de bactéries à *t=0* : on a donc $f(t) = c \cdot \delta(t)$. On suit l'évolution de la population.

a) Déterminer la TL de l'équation différentielle obtenue dans ce cas.

b) En déduire $\hat{x}(p)$ puis, par TL inverse, déterminer l'évolution de la population au cours du temps $x(t)$.

c)) Tracer sur un même graphe $x(t)$ et $f(t)$ pour les deux cas $n > m$ et $n < m$. Justifier brièvement les allures observées sur la base de la physique du problème.

2. On se place maintenant dans le cas où $n < m$. L'opérateur choisit dans ce cas d'injecter des bactéries dans le système avec un flux constant *F* à partir de *t=0*. On a alors $f(t) = F \cdot \Gamma(t)$.

a) Déterminer la TL de l'équation différentielle obtenue dans ce cas.

b) En déduire $\hat{x}(p)$ puis, par TL inverse, déterminer l'évolution de la population au cours du temps $x(t)$.

c) Tracer sur un même graphe $x(t)$ et $f(t)$ et justifier brièvement l'allure observée.

3. En identifiant en $f(t)$ un signal d'entrée et en $x(t)$ un signal de sortie, quel serait la transmittance *H(p)* associée à ce problème (équation 1) ?

Exercice 2. Signaux aléatoires.

1. Soit $b(t)$ un bruit blanc de densité spectrale de puissance $\gamma_b / 2$.

a) Tracer $\varphi_{bb}(\tau)$, la fonction d'autocorrélation de $b(t)$, et sa DSP $S_{bb}(\nu)$ (où $\nu = \omega / 2\pi$ représente la fréquence).

b) Que vaut sa variance ? Justifier la réponse.

2. Ce bruit est transmis dans un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = 2\phi\, sinc(2\pi\phi t)$ et on note $x(t) = b(t) * h(t)$ le signal à la sortie du filtre.

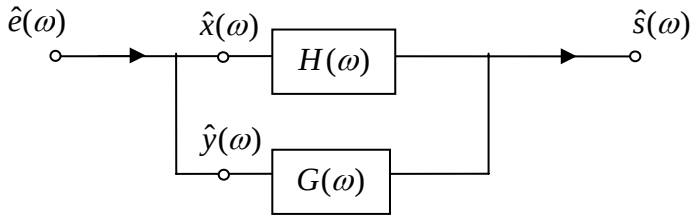
a) Déterminer la transmittance du filtre $H(\nu)$, puis la DSP du signal filtré $S_{xx}(\nu)$. Tracer $S_{xx}(\nu)$.

b) En déduire et tracer la fonction d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\tau)$.

c) Déterminer la variance σ_x du signal filtré.

Exercice 3. Etude d'un circuit électronique avec contre-réaction.

Soit le circuit suivant :



où $\hat{e}(\omega)$ et $\hat{s}(\omega)$ sont les amplitudes complexes des signaux d'entrée et de sortie, $\hat{x}(\omega)$ et $\hat{y}(\omega)$ les amplitudes complexe mesurées aux points indiqués. Les deux circuits électroniques contenus dans les boites sont connus par leurs transmittances, $H(\omega)$ et $G(\omega)$.

1. En sachant que

$$\hat{s}(\omega) = H(\omega)\ \hat{x}(\omega), \qquad \hat{y}(\omega) = G(\omega)\ \hat{s}(\omega), \qquad \hat{x}(\omega) = \hat{e}(\omega) + \hat{y}(\omega),$$

déterminer la relation liant $\hat{e}(\omega)$ à $\hat{s}(\omega)$ en fonction des transmittances $H(\omega)$ et $G(\omega)$. Quelle est la transmittance $T(\omega)$ du circuit?

2. Soit $G(\omega) = G$ un amplificateur/atténuateur idéal. Déterminer la réponse du circuit pour $G << 1$ puis pour $G >> 1$.

3. Le circuit de transmittance $H(\omega)$ est un circuit dérivateur : en appliquant à son entrée un signal $x(t)$ on obtient comme signal de sortie $s(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$. Que vaut dans ce cas $H(\omega)$?

4. Déduire l'expression de la transmittance $T(\omega)$ obtenue dans ces hypothèses. Analysez le module et la phase de $T(\omega)$ pour $\omega \to 0, \infty$ et $\omega = 1/G$.

5. Tracez module et phase de $T(\omega)$.

6. Comment pourrait-on construire un circuit simple ayant une même expression pour la transmittance ?

Exercice 4. Echantillonnage.

On considère le signal rectangulaire $x(t) = \mathrm{Rect}(t/a)$ égale à 1 pour $-a/2 \le t \le a/2$, zéro ailleurs.

1. Tracer le signal et le module de sa transformée de Fourier en fonction de la fréquence $f = \omega / 2\pi$. Déterminez l'expression des zéros f_k du spectre.

2. Le signal est échantillonné avec un pas temporel $\Delta t = a/10$ et sur une durée de $T_e = 4a$. Calculer la fréquence d'échantillonnage f_e, la résolution en fréquence Δf et le nombre de points N (pour une analyse par FFT). Tracer le signal échantillonné et son spectre discret (obtenu par FFT) en justifiant vos choix.

3. Qu'est-ce qu'on aurait trouvé avec un pas d'échantillonnage $\Delta t = a/4$ et la même durée T_e ? Sans faire de calculs, tracer un schéma indicatif.