L3 – Physique – parcours PSVP
LP 342 – Mesures Physiques
Année 2009-2010

Evaluation Continue n°2 – 17 novembre 2009

Documents et calculatrices interdits. Téléphones portables éteints.
Vous trouverez un dictionnaire des TF et TL en annexe.

I. Quelques propriétés de la transformée de Fourier

On considère une fonction $x(t)$ réelle dont la transformée de Fourier vaut $X(\omega)$.

1. Si x est une fonction est une fonction paire, que peut-on dire de sa transformée de Fourier ?
2. Démontrez cette propriété.
3. On considère la fonction y définie par $y(t) = x(t - t_0)$. Exprimer la transformée de Fourier $Y(\omega)$ en fonction de $X(\omega)$.
4. Comparer les spectres en énergie de Y et de X.

II.

La tension aux bornes d'une capacité d'un circuit RLC série en régime impulsionnel suit une loi horaire, pour $t \geq 0$, du type :
$V(t) = V_0\, e^{-at} \cos(\beta t)$ où V_0, α et β sont trois constantes réelles et positives.

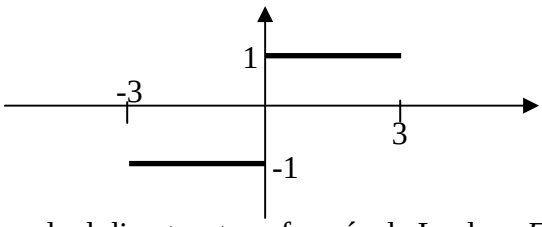
1. Quels sont les dimensions de ces trois constantes ?
2. Représenter l'allure de la courbe $V(t)$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles $V = 0$.
3. Déterminer à l'aide du dictionnaire, sa transformée de Laplace $L(p)$.
4. Donner l'allure de cette transformée.
5. Déterminer la transformée de Fourier $F(\omega)$ de $V(t)$.

III.

On considère la fonction $f(t)$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < -3 \text{ ou } t > 3 \\ -1 \text{ pour } -3 < t < 0 \\ 1 \text{ pour } 0 < t < 3 \end{cases}$$

Son graphe est représenté ci-dessous.



1. Déterminer par un calcul direct sa transformée de Laplace $F_L(p)$.
2. En déduire sa transformée de Fourier $F(\omega)$.
3. Vérifier que votre résultat tient compte des propriétés de symétrie de $f(t)$.
4. Représenter le spectre en module de la TF. Préciser les valeurs de ω correspondants aux zéros du spectre.
5. La fonction $f(t)$ est échantillonnée sur 5 points. Déterminer le pas d'échantillonnage Δt.
6. Que vaut la fréquence d'échantillonnage f_e ?
7. Représenter l'allure de la TF du signal échantillonné et commentez ses différences par rapport à celui de la TF du signal continu.

IV.

A. Soit le signal $x(t) = e^{-at}\Gamma(t)$, avec a réel positif et G la fonction échelon qui vaut 1 pour $t \geq 0$, et 0 pour $t < 0$.

1. Calculer directement la TL de ce signal $X_L(p)$ et en définir le domaine de validité Σ.
2. Montrer comment on aurait pu trouver $X_L(p)$ à partir de la TL de la fonction échelon $\Gamma(t)$ et des propriétés des TL. Vérifier le résultat obtenu sur le dictionnaire.
3. En déduire la TF du signal $X(\omega)$ et tracer $|X(\omega)|^2$. Déterminer la largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ du spectre.

B. On échantillonne le signal $x(t)$ avec un temps d'échantillonnage Δt. Pour les questions suivantes il peut être utile d'utiliser l'approximation $\pi \cong 3$ pour avoir une idée quantitative des résultats obtenus.

1. Déterminer la largeur du spectre $2f_L$, qu'on identifiera avec l'intervalle à l'intérieur duquel la valeur de $|X(\omega)|^2$ est supérieure à $|X(0)|^2/10$.
2. On prend $\Delta t = \dfrac{1}{4\pi a}$. Déterminer la fréquence d'échantillonnage f_e. Tracer le signal ainsi échantillonné et son spectre, en respectant au mieux les proportions et en s'aidant par le calcul de quelques grandeurs qui semblent significatives.
3. Commenter le repliement du spectre.
4. Que devient le spectre pour $\Delta t = \dfrac{1}{12\pi a}$? Le tracer. Y a-t-il repliement de spectre dans ces conditions ?

Dictionnaire :

X(t)	X(ω)	$X_L(p)$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\Gamma(t)$	$\dfrac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$	$\dfrac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at}\Gamma(t)$	$\dfrac{1}{j\omega + a}$	$\dfrac{1}{s + a}$