L3 – Physique – parcours PSVP
LP 342 – Mesures Physiques
Année 2007-2008

Evaluation Continue n°2 – 27 mars 2008

Documents et calculatrices interdits. Dictionnaire des TL-TF autorisé.

Exercice 1. SF et TF

On considère le signal $x(t) = \cos^2(2\pi f_0\, t)$.

1. Tracer soigneusement le signal en indiquant les coordonnées de quelques points significatifs. Quelle est la période T du signal ? Sa fréquence fondamentale ?
2. Calculer la SF de $x(t)$ par la méthode de votre choix. Représenter son spectre (coefficients c_n).
3. En déduire l'expression du spectre $X(f)$ de $x(t)$ tel qu'on l'obtiendrait par TF (au sens des distributions, *asdd*). Tracer $|X(f)|$.

Le signal $x(t)$ est mesuré pendant une durée T_e correspondant à 10 périodes d'oscillation T.

4. Comment sa TF en sera modifiée ? Tracer soigneusement le spectre $|X(f)|$ obtenu dans ce cas.

Exercice 2. Rayonnement d'un atome

La mesure de l'énergie émise par rayonnement par atome donne une courbe typique appelée lorentzienne, dont l'équation est :

$$I(\omega) = \frac{I_0\gamma}{2\pi}\frac{1}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2}$$

On peut donner une interprétation simple de ce comportement en considérant un modèle simple de l'atome (modèle de Thompson): le noyau est fixe et ponctuel, l'électron est un objet de masse m_e et charge e lié au noyau par une force de rappel harmonique (proportionnelle au carré de la distance de l'électron au noyau) de constante de raideur k.

On simplifie ultérieurement le calcul en considérant une seule direction x dans l'espace : le noyau est donc fixé à l'origine, la position de l'électron est $x(t)$.

1. L'équation différentielle qui décrit la dynamique de l'électron est alors :

$$\ddot{x} + \gamma\, \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Commenter le rôle des différents termes de cette équation. Que vaut ω_0 ?

2. Comme dans ce modèle γ est très petit devant ω_0^2, une solution approchée de l'équation différentielle est donnée par :

$$x(t) = x_0.e^{-\frac{\gamma t}{2}}.\cos(\omega_0 t).\Gamma(t)$$

Tracer x(t) (sans oublier que $\gamma << \omega_0^2$). Que vaut x(t) à t=0 ? Et à t<0 ? Pouvez-vous expliquer physiquement pourquoi la position de l'électron suit cette loi horaire ?

Le but de la suite de l'exercice est de déduire la loi lorentzienne à partir de x(t).

3. Montrer, en utilisant le dictionnaire, que la TF de x(t) : X(ω), est donnée par :

$$\mathrm{X}(\omega) = \frac{x_0}{2}\left\{\frac{1}{\frac{\gamma}{2} + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\frac{\gamma}{2} + j(\omega + \omega_0)}\right\}$$

(Remarque : on peut suivre différents chemins pour arriver à la formule précédente, plus ou moins rapides, en utilisant éventuellement les propriétés des TL/TF).

4. Si on ne s'intéresse qu'aux pulsations proches de ω_0, on peut négliger le deuxième terme dans X(ω) par rapport au premier. Pourquoi ? Déterminer dans ces conditions la densité d'énergie $|X(\omega)|^2$ émise par l'atome à la pulsation ω, la comparer à I(ω) et la tracer pour ω>0.
5. Quel est le rôle des deux paramètres physiques, γ et ω_0, dans la détermination de cette courbe ?

Exercice 3. TL, TF et échantillonnage

A. Soit le signal $x(t)=e^{-at}.\Gamma(t)$, avec a réel positif.

1. Calculer (en intégrant explicitement) la TL de ce signal $X_L(p)$ et en définir le domaine de validité Σ.
2. Montrer comment on aurait pu trouver $X_L(\omega)$ à partir de la TL de la fonction échelon Γ(t) et des propriétés des TL. Vérifier le résultat obtenu sur le dictionnaire.
3. En déduire la TF du signal X(ω) et en tracer $|X(\omega)|^2$. Déterminer la largeur à mi-hauteur Δω du spectre.

B. On échantillonne le signal x(t) avec un pas Δt. Pour les questions suivantes il peut être utile d'utiliser l'approximation π ≅ 3 pour avoir une idée quantitative des résultats obtenus.

1. Déterminer la largeur du spectre $2f_L$, qu'on identifiera avec l'intervalle à l'intérieur duquel la valeur de $|X(\omega)|^2$ est supérieure à $|X(0)|^2/10$.
2. On prend Δt=1/4πa. Déterminer la fréquence d'échantillonnage f_e. Tracer le signal ainsi échantillonné et son spectre, en respectant au mieux les proportions et en s'aidant par le calcul de quelques grandeurs qui vous semblent significatives. Le repliement de spectre vous semble-il important dans ces conditions ?
3. Que devient le spectre pour Δt=1/12π a ? Le tracer. Y a-t-il repliement de spectre dans ces conditions ?