

## Corrigé du contrôle de biophysique n°2

### Exercice I

1. a.  $\text{NaCl} \rightarrow \text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ .

Pour que le bilan entrée-sortie soit nul, il faut que  $\pi_{\text{cyt}} = \pi_{\text{suc}}$ .

$$\pi_{\text{cyt}} = ([\text{Na}^+] + [\text{Cl}^-])RT = 2C_0RT \text{ avec } T = 273 + \theta = 300 \text{ K.}$$

$$\pi_{\text{suc}} = CRT, \text{ donc } C = 2C_0 = 0,3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

- b.  $\pi = \pi_{\text{cyt}} = 2C_0RT = 0,3 \cdot 10^3 \times (25/3) \times (273 + 27) = 7,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  (concentration dans le système international d'unités, c'est-à-dire en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

2.  $P = \pi_{\text{int}} - \pi_{\text{ext}} = \pi_{\text{cyt}} - \pi_{\text{suc}} = (2C_0 - C')RT = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$

### Exercice II

1. Appliquons la loi de Jurin pour une mouillabilité parfaite :  $2\sigma/r = \rho gh$ , soit  $\sigma = \rho ghr/2 = 33 \cdot 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$  (ou  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  ou  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

2. Appliquons la loi de Laplace en remarquant que deux surfaces sont créées :

$$P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \Delta P = 4\sigma/R = 13,2 \text{ Pa, donc } P_{\text{int}} = 10^5 + 13,2 = 100013 \text{ Pa.}$$

3. Ce travail peut être évalué de deux manières :

- Soit à partir du travail de la surpression  $\Delta P$  :  $\delta W = -\Delta P dV_{\text{ext}}$  (la force est tournée vers l'extérieur). En notant  $V$  le volume de la bulle, on a  $dV_{\text{ext}} = -dV$ , donc  $\delta W = \Delta P dV$ .

$$W = \int_0^R \Delta P dV = \int_0^R \frac{4\sigma}{R} d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \int_0^R 16\pi\sigma R dR = 8\pi\sigma R^2 = 83 \mu\text{J};$$

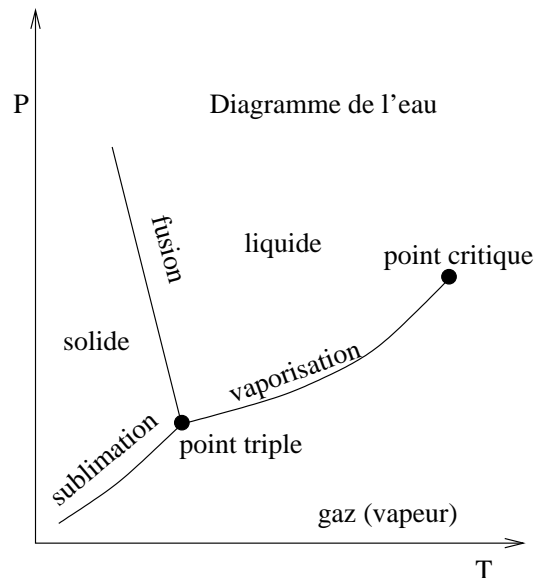
- Soit directement à partir de l'énergie de surface :  $dF = dU - SdT - TdS = \delta W + \delta Q - SdT - TdS = \delta W$  car  $dT = 0$  (isotherme) et  $\delta Q = TdS$  (quasi-statique). Ici,  $dF = 2\sigma d\Sigma$  (deux interfaces), donc

$$W = \int dF = \int_{\Sigma(0)}^{\Sigma(R)} 2\sigma d\Sigma = 2\sigma\Sigma(R) = 2\sigma \times (4\pi R^2) = 8\pi\sigma R^2 = 83 \mu\text{J}.$$

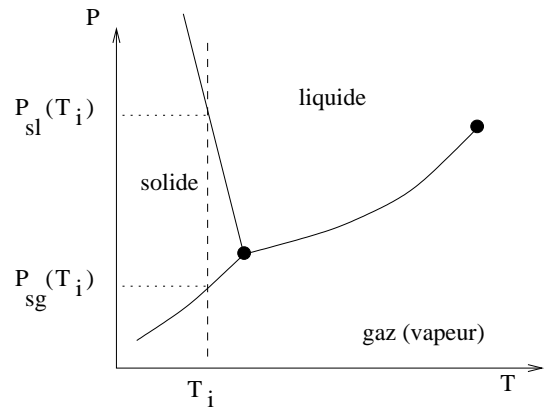
### Exercice III

#### A

- 1.



2. – vapeur si  $P < P_{sg}(T_i)$  ;
- équilibre solide-vapeur si  $P = P_{sg}(T_i) = 561 \text{ Pa}$  ;
- solide si  $P_{sg}(T_i) < P < P_{sl}(T_i)$  ;
- équilibre solide-liquide si  $P = P_{sl}(T_i) = 1,32 \cdot 10^7 \text{ Pa}$  ;
- liquide si  $P > P_{sl}(T_i)$ .



## B

1.  $V_s = m/\rho_s \approx 1 \text{ cL} \ll V$ .
2. Il y a un espace libre au-dessus du glaçon. Dans cet espace, la pression est initialement nulle, donc inférieure à  $P_{sg}(T_i)$ . L'état initial est donc hors équilibre et le glaçon va se sublimer, au moins partiellement.
3. À l'équilibre, il ne peut *pas* y avoir *que* des phases condensées (liquide, solide ou un mélange des deux) car elles n'occuperaient pas tout le volume (l'eau liquide est plus dense que la glace). Il y a donc de la vapeur (ce qu'on pouvait déjà imaginer d'après la question précédente). On a donc deux cas :

- Soit il n'y a *que* de la vapeur (on doit donc avoir  $P < P_{sg}(T_i)$ ). Alors  $n_g \equiv n_t = m/M(\text{H}_2\text{O}) = 0,5 \text{ mol}$  et

$$P = n_g RT_i / V = 0,5 \times 25/3 \times 272 / 10^{-3} \approx 1,13 \cdot 10^6 \text{ Pa} \gg P_{sg}(T_i) : \text{contradiction ;}$$

- Soit il y a *et* de la vapeur *et* du solide. Alors

$$P \equiv P_{sg}(T_i) = n_g RT_i / V,$$

$$\text{d'où } n_g = \frac{P_{sg}(T_i) V}{RT_i} = \frac{561 \times 10^{-3}}{25/3 \times 272} \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol},$$

$$n_s = n_t - n_g = 0,5 - 2,5 \cdot 10^{-4} = 0,49975 \text{ mol (et } n_l = 0, \text{ évidemment).}$$

## C

1.  $\delta Q_s = n_s C_{Vs} dT \approx n_s C_{Ps} dT$ .  
 $\delta Q_g = n_g C_{Vg} dT = n_g (C_{Pg} - R) dT$ , car, pour un gaz parfait,  $C_{Vg} = C_{Pg} - R$  (relation de Mayer).
2. Il faut une quantité  $dn_g L_{\text{sub}}$  de chaleur pour vaporiser  $dn_g = -dn_s$  moles de solide. Les parois étant adiabatiques,

$$\delta Q = 0 = \delta Q_s + \delta Q_g + dn_g L_{\text{sub}},$$

$$\text{donc } n_s C_{Vs} dT + n_g C_{Vg} dT + dn_g L_{\text{sub}} = 0.$$

3.  $n_g \ll n_s$ , donc  $n_s \approx n_t$  et  $n_g C_{Vg} dT \ll n_s C_{Vs} dT \approx n_t C_{Ps} dT$ , c'est-à-dire

$$n_t C_{Ps} dT + dn_g L_{\text{sub}} = 0.$$

En intégrant entre  $T_i$  et  $T_f$ , on obtient, puisque  $n_g(T_i) = 0$ ,

$$n_g(T_f) = \Delta n_g = -n_t C_{Ps} \Delta T / L_{\text{sub}}.$$

4. On a  $P_{sg}(T_f) V = n_g(T_f) RT_f$ . Si l'on suppose que  $T_f \approx T_i$ ,  $P_{sg}(T_f) \approx P_{sg}(T_i) \approx 561 \text{ Pa}$  (valeur calculée en A.2).  
On a donc

$$\Delta T \approx - \frac{P_{sg}(T_i) V L_{\text{sub}}}{RT_i n_t C_{Ps}}.$$

5.  $\Delta T = - \frac{561 \times 10^{-3} \times 46,7 \cdot 10^3}{25/3 \times 272 \times 0,5 \times 37,6} = - \frac{561}{272} \times \frac{46,7}{25} \times \frac{3}{37,6} \times \frac{1}{0,5} \approx - \frac{2 \times 2 \times 2}{12} \approx -0,67 \text{ K}$  (en fait,  $\Delta T = -0,62 \text{ K}$  avec un calcul plus précis).

On obtient

$$n_g(T_f) \approx \frac{P_{sg}(T_i) V}{RT_i} \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol (cf. B.3)} \ll 0,5 = n_t \approx n_s.$$

L'approximation  $n_g \ll n_t$  est bien justifiée.

En revanche, l'approximation  $P_{sg}(T_f) \approx P_{sg}(T_i)$  est moins bonne ( $P_{sg}(T_f) \approx 531 \text{ Pa}$  pour  $\Delta T = -0,62 \text{ K}$ ).