Travaux Dirigés

1 L'oscillateur harmonique

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique (classique) à une dimension s'écrit

$$U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

▷ **1-1** Écrire le Lagrangien de l'oscillateur harmonique et en déduire l'équation du mouvement.

▷ **1-2** Écrire le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique et retrouver l'équation du mouvement.

▷ **1-3** Montrer à l'aide des équations de Hamilton que le Lagrangien

$$L = \frac{m}{2}e^{\alpha t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2),$$

décrit le mouvement d'un oscillateur amorti.

2 Le bille et le cerceau

Une bille glisse sans frottement le long d'un cerceau de rayon R animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à vitesse angulaire ω constante. La position de la bille sur le cerceau est déterminée par un seul degré de liberté, l'angle θ avec la verticale. La position du cerceau est elle décrite par l'angle ϕ (voir la figure 1).

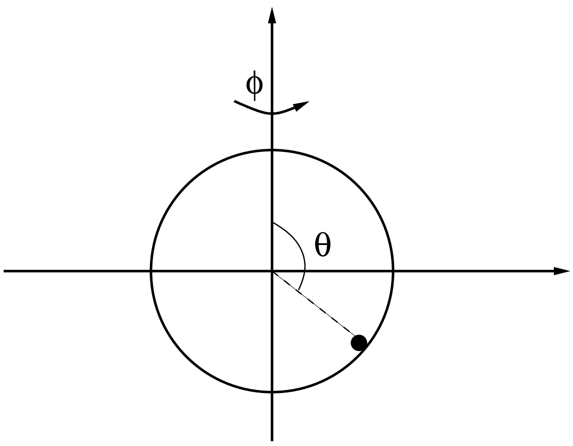

FIGURE 1 – *La bille sur le cerceau en rotation.*

▷ **2-1** Écrire le Lagrangien de ce système en coordonnées sphériques et en déduire l'équation du mouvement.

▷ **2-2** Écrire le Hamiltonien du système et en déduire à nouveau l'équation du mouvement.

▷ **2-3** Montrer que la bille est soumise à un potentiel effectif $V(\theta)$, que l'on tracera en fonction de θ. On pose $\omega_0 = \sqrt{g/R}$.

▷ **2-4** Quel est le comportement de la bille pour des vitesses de rotation lente ($\omega < \omega_0$) ?

▷ **2-5** Même question dans le cas de la rotation rapide ($\omega > \omega_0$).

3 La particule chargée dans un champ électromagnétique

On considère le Lagrangien d'une particule de masse m et de charge q plongée dans un champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ décrit par les potentiels scalaire $\phi(\mathbf{r}, t)$ et vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q\, \mathbf{v}.\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\, \phi(\mathbf{r}, t)\ .$$

▷ **3-1** Déterminer l'équation du mouvement de la particule et retrouver l'expression de la force de Lorentz. On rappelle que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont liés aux potentiels scalaire et vecteur par

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}.$$

▷ **3-2** Donner l'expression du Hamiltonien de la particule et en déduire les équations de Hamilton.

4 L'atome hydrogénoïde

On considère l'électron d'un atome hydrogénoïde [1] dans le potentiel central :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{C}{r}\ .$$

▷ **4-1** Donner l'expression du Lagrangien de ce système en coordonnées sphériques et en déduire les équations du mouvement.

▷ **4-2** En déduire l'existence de quantités conservées. Interpréter.

▷ **4-3** Écrire le Hamiltonien de ce système et les équations de Hamilton.

5 Le théorème du viriel

Une particule de masse m se déplace dans un potentiel $V(\mathbf{r})$ à trois dimensions. On suppose dans la suite que la particule est dans un état lié d'énergie E.

▷ **5-1** Donner l'expression du Hamiltonien de la particule, calculer le crochet de Poisson $\{A, H\}$, où

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{r}.\mathbf{p}$$

et en déduire l'équation donnant l'évolution de A.

▷ **5-2** Dans le cas d'un mouvement périodique, la moyenne temporelle $\langle f \rangle$ d'une grandeur physique $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ s'écrit

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f\big(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)\big)\ dt$$

où T est la période. Démontrer le théorème du viriel :

$$2\langle \frac{p^2}{2m} \rangle = \langle \mathbf{r}.\nabla V \rangle.$$

Pour un potentiel central de la forme $V(r) = C\ r^n$, quelle est la relation entre l'énergie totale E, la moyenne de l'énergie cinétique et la moyenne de l'énergie potentielle ?

▷ **5-3** En général, le mouvement peut être confiné sans être périodique. Comment généraliser le théorème du viriel ?

1. Un atome hydrogénoïde est un atome auquel on a arraché tous ses électrons sauf un. Il se comporte donc comme un atome d'hydrogène avec un noyau de charge $Z > 1$.