

# Introduction au principe variationnel et à la mécanique analytique



NOTES DE COURS DE LICENCE *L3-Phytem*

Nicolas Sator  
Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée  
Université Pierre et Marie Curie Paris 6

Depuis le XVII<sup>ème</sup> siècle, l’approche variationnelle permet de décrire des phénomènes physiques à l’aide d’un principe d’économie, appelé en optique *principe de Fermat* et en mécanique *principe de moindre action* : le comportement observé d’un système correspond à la minimisation (ou à la maximisation) d’une certaine grandeur.

Ce cadre abstrait et général permet une reformulation simple et élégante de nombreux problèmes en physique (optique géométrique, mécanique classique, mécanique quantique, relativité, électromagnétisme). Mais au-delà de considérations esthétiques ou techniques, l’approche variationnelle forme la pierre angulaire de la physique statistique, de la théorie du chaos et de la théorie des champs. Dans ces notes de cours, nous aborderons quelques notions de calcul variationnel (et en particulier les équations d’Euler-Lagrange) que nous appliquerons par la suite dans le cadre de la mécanique analytique.

## Bibliographie

- *Le principe de moindre action et les principes variationnels en physique*, J.-L. Basset (Vuibert, 2010)
- *Mécanique quantique, 1. Fondements et premières applications*, C. Aslangul (de Boeck, 2007), chapitre 7
- *Le cours de physique de Feynman, tome 1 : Électromagnétisme*, R. Feynman (Dunod, 1999), chapitre 19
- *Mécanique*, L. Landau et E. Lifchitz (Mir, Moscou, 1982)
- *Mécanique, De la formulation Lagrangienne au chaos Hamiltonien*, C. Gignoux et B. Silvestre-Brac (EDP Sciences, 2002)
- *Mécanique analytique*, R. Dandoloff (Publibook, 2005)

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction : le principe de Fermat</b>	<b>4</b>
<b>II</b>	<b>Approche variationnelle</b>	<b>5</b>
1	L’équation d’Euler-Lagrange . . . . .	6
a	Notion de fonctionnelle . . . . .	6
b	Démonstration de l’équation d’Euler-Lagrange . . . . .	6
c	Formule de Beltrami . . . . .	7
d	Exemples . . . . .	7
2	L’Approche variationnelle avec des contraintes . . . . .	9
a	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	10
b	Contraintes de type holonome . . . . .	13
c	Contraintes de forme intégrale . . . . .	14

<b>III</b>	<b>Rudiments de mécanique analytique</b>	<b>17</b>
1	De Newton à Lagrange : une reformulation de la mécanique . . . . .	17
2	Le formalisme Lagrangien . . . . .	17
	a Le principe de moindre action . . . . .	17
	b Le Lagrangien . . . . .	18
3	Le formalisme hamiltonien . . . . .	21
	a Les équations de Hamilton . . . . .	21
	b L'espace des phases . . . . .	24
	c Les crochets de Poisson . . . . .	24
4	Conclusion . . . . .	26
5	Exercices . . . . .	27
	a L'oscillateur harmonique . . . . .	27
	b La bille et le cerceau . . . . .	28
	c L'atome hydrogénoïde . . . . .	30
	d La particule chargée dans un champ électromagnétique . . . . .	32
	e Le théorème du viriel . . . . .	34

# I Introduction : le principe de Fermat

Les lois de l'optique géométrique – propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène, principe de retour inverse de la lumière et lois de la réflexion et de la réfraction de Snell (1621), Descartes (1637) et Ibn Sahl<sup>1</sup> (984)– ont une origine phénoménologique.

En 1661, Pierre de Fermat (1601-1665) propose une autre approche, plus abstraite, basée sur l'idée que “*La nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples*”<sup>2</sup>. Le principe de Fermat s'énonce comme un principe de moindre temps<sup>3</sup>, ou “*d'économie naturelle*” : La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours est stationnaire. Il s'agit bien d'un principe variationnel car la durée du parcours doit être extrémale, en générale minimale, par rapport à une petite variation du trajet.

A l'aide de ce principe, on démontre immédiatement la loi de propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène. Les lois de l'optique géométrique se reformulent à la Feynman par une analogie cinématique.

## Le problème du maître nageur

Telle la lumière qui se propage moins vite dans l'eau que dans l'air, un maître nageur court plus vite qu'il ne nage. Il se trouve au point  $A$  lorsqu'il aperçoit une jolie fille qui se noie en  $B$ . Comment arriver en  $B$  le plus vite possible ? Sachant que le maître nageur court en ligne droite à la vitesse  $v_1$  et nage à la vitesse  $v_2 < v_1$ , quel est le point  $I$  où il doit plonger ? Il faut trouver un compromis entre la ligne droite entre  $A$  et  $B$  et le parcours qui rend minimale la distance parcourue dans l'eau.

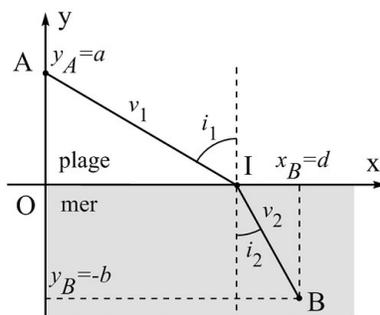


FIGURE 1 – Le problème du maître nageur en  $A$  et de la fille qui se noie en  $B$ .

Comme on le voit sur la figure 1, la trajectoire du maître nageur est constituée de deux droites  $AI$  et  $IB$ , où  $I(x, 0)$  est le point où le maître nageur plonge. A priori la distance

---

1. En effet, le mathématicien persan Ibn Sahl a découvert la loi de la réfraction dès 984.  
2. Plus exactement son principe de moindre temps s'énonce : “*Il n'y a rien de si probable ni de si apparent que cette supposition, que la nature agit toujours par les moyens les plus aisés, c'est-à-dire ou par les lignes les plus courtes, lorsqu'elles n'emportent pas plus de temps, ou en tout cas par le temps le plus court, afin d'accourcir son travail et de venir plus tôt à bout de son opération*”. La réaction du cartésien de Clerselier (dans une lettre à Fermat en 1662) est également instructive : “*Le principe que vous prenez pour fondement de votre démonstration, à savoir que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples, n'est qu'un principe moral et non point physique, qui n'est point et qui ne peut être la cause d'aucun effet de la nature*”.  
3. Une formulation plus moderne repose sur la notion de chemin optique ( $L = \int_C n dl$ , où  $n = c/v$  est l'indice de réfraction et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide) : Le trajet suivi par la lumière entre deux points  $A$  et  $B$  est celui qui correspond à une valeur stationnaire du chemin optique.

AI sera plus grande que la distance IB car il court plus vite qu'il ne nage. Le temps  $T(x)$  mis par le maître nageur pour aller de  $A$  en  $B$  est :

$$T = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2}$$

soit,

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Le temps est minimal (il ne peut pas s'agir d'un maximum!) quand

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0,$$

soit

$$\frac{1}{v_1} \sin(i_1) = \frac{1}{v_2} \sin(i_2).$$

La vitesse de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction  $n$  étant  $v = c/n$ , où  $c$  est la vitesse dans le vide, on retrouve la loi de la réfraction de Ibn Sahl-Snell-Descartes-Fermat (Fermat a utilisé lui une démonstration géométrique). On montrerait de même la loi de la réflexion.

## II Approche variationnelle

Dans le cas de la loi de la réfraction, la trajectoire du rayon lumineux était déterminée par la valeur de  $x$  qui minimise  $T(x)$ . En général, c'est toute une fonction (par exemple une trajectoire) que l'on recherche. Par exemple, quel est le plus court chemin entre deux points  $A$  et  $B$  d'un plan ?

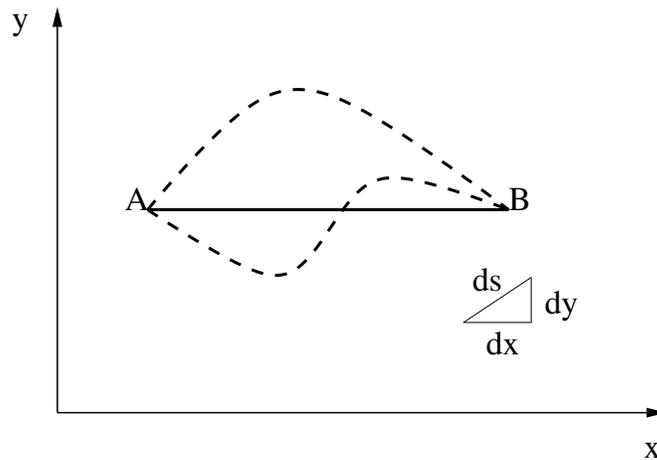


FIGURE 2 – Le chemin le plus court entre deux points  $A$  et  $B$ .

En notant  $s$  l'abscisse curviligne le long d'un chemin, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

où  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ . La longueur  $l$  du chemin est donnée par

$$l[y] = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

On cherche donc la fonction  $y(x)$  qui rend l'intégrale  $l[y]$  minimale telle que  $y(x_A) = y(x_B) = cte$ . La réponse est bien sûr  $y(x) = cte$ , mais comment le démontrer ?

## 1 L'équation d'Euler-Lagrange

### a Notion de fonctionnelle

La fonctionnelle est une généralisation de la fonction. Plutôt que de dépendre d'une (ou plusieurs) variable, une fonctionnelle dépend d'une (ou plusieurs) fonction, elle même dépendant d'une (ou plusieurs) variable. C'est donc une "fonction de fonction".

Considérons une fonction  $y(x)$  dépendant d'une variable  $x$  et une fonction  $f$  à trois variables non indépendantes  $f(y(x), y'(x), x)$ , où  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ . La fonction  $y(x)$  étant connue, la fonction  $f$  prend donc une valeur déterminée pour une valeur de  $x$  donnée. Nous verrons que la dépendance en la dérivée  $y'(x)$  intervient fréquemment, en particulier en mécanique. Remarquons que la fonction  $f$  dépend de  $x$  explicitement, mais aussi implicitement à travers  $y(x)$  et  $y'(x)$ . La dérivée totale de  $f$  par rapport à  $x$  est donc :

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Définissons la fonctionnelle  $S[y]$  par l'intégrale :

$$S[y] \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx.$$

La fonctionnelle  $S[y]$  est donc un nombre qui dépend de la fonction  $y(x)$ . L'approche variationnelle va nous permettre de déterminer la fonction  $y(x)$  telle que  $S[y]$  soit stationnaire (extrémale), sachant que  $y(x_1)$  et  $y(x_2)$  sont donnés.

Nous allons montrer que la fonction  $y(x)$  qui remplit cette condition vérifie l'équation d'Euler-Lagrange<sup>4</sup> :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.}$$

### b Démonstration de l'équation d'Euler-Lagrange

Supposons que l'on connaisse la fonction  $y_0(x)$  qui rende  $S$  extrémale et considérons une petite variation de chemin

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon \eta(x),$$

où  $\eta(x)$  est une fonction telle que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  et  $\epsilon \ll 1$ . Alors la fonctionnelle associée au chemin  $y(x)$  paramétré par  $\epsilon$  s'écrit

$$S(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y_0(x) + \epsilon \eta(x), y_0'(x) + \epsilon \eta'(x), x\right) dx.$$

4. Leonhard Euler (1707-1783) mathématicien et physicien suisse.

Dérivons par rapport à  $\epsilon$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\epsilon}(\epsilon) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\epsilon} f\left(y_0(x) + \epsilon \eta(x), y'_0(x) + \epsilon \eta'(x), x\right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties la seconde intégrale, on obtient :

$$\frac{dS}{d\epsilon}(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left( \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y} - \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \left[ \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Puisque  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , le dernier terme de l'équation s'annule. Et comme la fonctionnelle  $S(\epsilon)$  est extrémale pour la fonction  $y_0$ , sa dérivée doit s'annuler en  $\epsilon = 0$  donc

$$\frac{dS}{d\epsilon}(0) = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx = 0$$

et ce, quelle que soit la fonction  $\eta(x)$ . On en déduit l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

### c Formule de Beltrami

Si la fonction  $f$  ne dépend pas explicitement de la variable  $x$ , ( $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ), on obtient la formule de Beltrami :

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C, \quad (1)$$

où  $C$  est une constante. Pour démontrer cette formule, calculons

$$\frac{d}{dx} \left[ f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right] = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \underbrace{\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0,$$

en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange.

### d Exemples

#### Le chemin le plus court

On cherche le chemin  $y(x)$  qui minimise la longueur

$$l[y] = \int_{x_A}^{x_B} f(y') dx,$$

où  $f(y') = \sqrt{1 + y'^2}$  avec  $y(x_A) = y(x_B) = cte$ . Puisque  $f$  ne dépend pas de  $y$ , on a d'après l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

où  $C$  est une constante. On trouve donc  $y' = cte$ , autrement dit, l'équation d'une droite qui passe par les points  $A$  et  $B$ . Dans cet exemple la réponse était évidente, mais l'approche variationnelle est très utile lorsque l'espace-temps est doté d'une métrique plus complexe dans le cadre de la théorie de la relativité.

### La courbe brachistochrone

La courbe brachistochrone<sup>5</sup> a été étudiée par Leibniz, Newton, Jacques et Jean Bernoulli et Euler : En partant d'une position donnée sans vitesse initiale, quelle est la trajectoire qui permet d'atteindre le plus rapidement possible une position finale dans le champ de pesanteur ?

Pour préciser les notations, supposons que l'objet parte du point  $A$  de coordonnées  $x_A = 0$  et  $y_A = h > 0$ , sans vitesse initiale et glisse le long d'un toboggan jusqu'au point  $B$  de coordonnées  $x_B = d > 0$  et  $y_B = 0$  (voir la figure 3). On doit donc exprimer la durée du parcours entre  $A$  et  $B$ , puis chercher la courbe (la forme du toboggan) qui minimise cette durée.

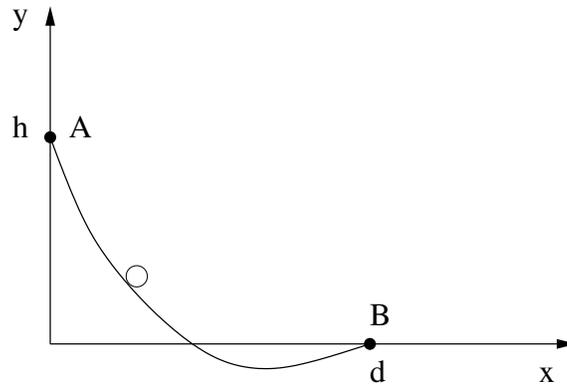


FIGURE 3 – Un objet part du point  $A$  sans vitesse initiale et glisse le long de la courbe jusqu'au point  $B$ .

Soit  $s$  l'abscisse curviligne, un élément de courbe  $ds$  s'exprime en coordonnées cartésiennes

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

où  $y' = \frac{dy}{dx}$ . La vitesse de l'objet est donnée par  $v = \frac{ds}{dt}$ . La conservation de l'énergie mécanique implique

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh.$$

Exprimons le temps de parcours  $T[y]$ . C'est une fonctionnelle qui dépend de la forme  $y(x)$  du toboggan. On a

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(h - y)}} dx.$$

Le temps de parcours s'écrit donc :

$$T[y] = \int_0^d f(y, y') dx,$$

5. En grec, "Brakhisto" signifie "le plus court" et "chronos", le temps.

où  $f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h - y)}}$  ne dépend pas de  $x$ . On cherche donc la forme  $y(x)$  qui minimise la fonctionnelle  $T[y]$ . Puisque  $f$  est indépendante de  $x$ , on peut utiliser la formule de Beltrami

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C,$$

où  $C$  est une constante. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \sqrt{2g(h - y)}.$$

En élevant au carré on a donc :

$$1 + y'^2 = \frac{R}{h - y},$$

où  $R = 1/2gC^2$ . Posons  $y' = \tan(\theta/2)$  :

$$1 + y'^2 = 1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{R}{h - y},$$

soit

$$y = h - R \cos^2 \frac{\theta}{2} = h - \frac{R}{2}(1 + \cos \theta).$$

Par ailleurs,

$$y' = \tan(\theta/2) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{R}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dx} = R \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{dx},$$

donc

$$dx = R \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta,$$

soit en intégrant

$$x = \frac{R}{2}(\theta + \sin \theta) + cte \quad \text{et} \quad y = h - \frac{R}{2}(1 + \cos \theta),$$

que l'on peut écrire avec le changement de variable  $\theta \rightarrow \theta - \pi$  et en imposant  $x(0) = 0$  :

$$x = \frac{R}{2}(\theta - \sin \theta) \quad \text{et} \quad y = h - \frac{R}{2}(1 - \cos \theta).$$

C'est l'équation d'une cycloïde. Reste à déterminer  $R$  pour que la trajectoire passe par le point  $B$ . Sur la figure 4, on remarque que la pente à l'origine est infinie pour obtenir une accélération initiale maximale

## 2 L'Approche variationnelle avec des contraintes

Dans un problème aux variations, il peut exister une (ou plusieurs) contrainte sur la fonction  $y(x)$ . Le problème isopérimétrique en est une belle illustration : Dans le plan, quelle est la courbe fermée qui a la plus grande aire pour un périmètre donné ?

Dans le plan muni d'un repère cartésien, on cherche l'équation  $y(x)$  de cette courbe telle que l'aire

$$A[x, y] = \oint y dx \tag{2}$$

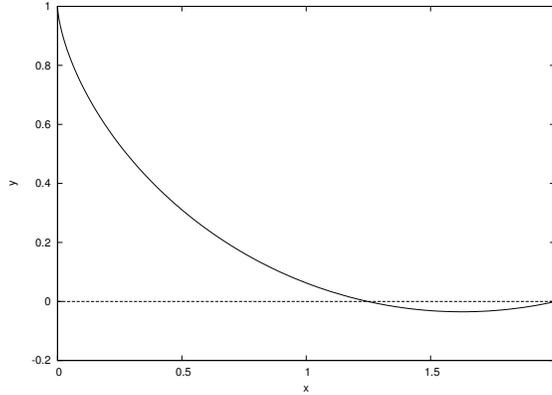


FIGURE 4 – La courbe brachistochrone entre le point  $A(0,1)$  et le point  $B(2,0)$  pour  $R \simeq 1.035$ .

soit maximale avec la contrainte suivante : le périmètre

$$l[x, y] = \oint \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (3)$$

est fixé.

#### a Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour simplifier, nous raisonnerons dans un premier temps à l'aide d'une *fonction* de plusieurs variables. La généralisation à la fonctionnelle ne posant pas de problème.

Par exemple, un fabricant souhaite produire un récipient cylindrique de volume fixé  $V_0$  dont la surface  $S$  soit la plus faible possible (pour minimiser la quantité de matériaux). Comment choisir la hauteur  $L$  et le rayon  $R$  du cylindre ?

La surface est une fonction de  $L$  et  $R$  :  $S(L, R) = 2\pi R^2 + 2\pi RL$ . On cherche le minimum de  $S$  avec la contrainte  $V(L, R) = \pi R^2 L = V_0$ . En remplaçant  $L = V_0/\pi R^2$  dans  $S(L, R)$  on se ramène facilement à une fonction à une variable dont il est facile de trouver le minimum obtenu pour  $R = (V_0/2\pi)^{1/3}$ , soit un rapport  $L = 2R$  (qui se rapproche le plus d'une sphère).

Généralisons, soit  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une fonction de  $n$  variables. Pour que  $f$  soit extrémale en un certain point  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , il faut que

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad (4)$$

Si toutes les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont indépendantes, cette condition est vérifiée pour

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Si les variables  $x_i$  vérifient une contrainte supplémentaire sous la forme (contrainte de type holonome)<sup>6</sup>

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = C, \quad (6)$$

6. Du grec "holos" qui signifie "la totalité" et "nomos", la loi.

où  $C$  est une constante, les variables  $x_i$  ne sont plus indépendantes et l'extremum de la fonction n'est plus obtenu par les  $n$  équations (5). Il faut tenir compte de cette contrainte et exprimer, par exemple,  $x_n$  en fonction de  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  et remplacer  $x_n$  dans l'expression de  $f$ . On se ramène donc à un problème à  $n - 1$  variables indépendantes avec  $n - 1$  équations (5) pour  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ...ce qui peut être très compliqué !

Une alternative efficace est d'introduire une nouvelle variable  $\mu$ , qui sera calculée a posteriori (l'ajout d'une variable pour lever une contrainte est assez courant en physique). Voyons deux façons différentes d'introduire cette méthode dite des "multiplicateurs de Lagrange" :

i) Rechercher l'extremum de la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  à  $n$  variables avec la contrainte (6) est équivalent à rechercher l'extremum de la fonction  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu)$  à  $n + 1$  variables sans contrainte

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \underbrace{\mu \left( g(x_1, x_2, \dots, x_n) - C \right)}_{=0},$$

où  $\mu$  est un réel à déterminer ultérieurement, appelé "multiplicateur de Lagrange". Les  $n + 1$  variables étant indépendantes l'extremum est donné par

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n.$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = C - g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

soit l'expression de la contrainte (6). Les  $n$  premières équations permettent ainsi d'exprimer les  $x_i$  en fonction du multiplicateur de Lagrange  $\mu$  qui est ensuite calculé à l'aide de la contrainte (6).

ii) Adoptons un point de vue géométrique. Au cours d'une promenade en montagne, on cherche le point le plus élevé. Ici  $f(x, y)$  est l'altitude du point de coordonnées  $(x, y)$  et  $g(x, y) = C$  définit la trajectoire du promeneur qui est imposée.

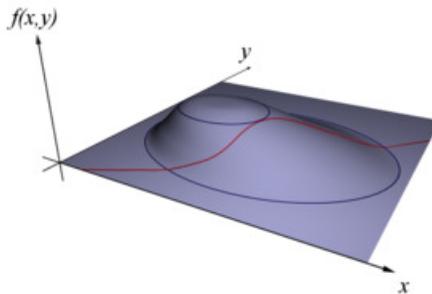


FIGURE 5 – La fonction  $f(x, y)$  est l'altitude du point de coordonnées  $(x, y)$  (sur une carte) et le chemin parcouru d'équation  $g(x, y) = C$  (en rouge) est imposé. Les lignes de niveau  $f(x, y) = cte$  sont représentées en bleu.

Aux points où le chemin coupe une ligne de niveau ( $f(x, y) = cte$ ), le chemin est en pente. Un extremum (stationnaire) correspond forcément à un point où le chemin est

tangent à une ligne de niveau. Autrement dit, au point extrémal les vecteurs gradients sont colinéaires :

$$\nabla f = -\mu \nabla(g - C),$$

où  $\mu$  est le multiplicateur de Lagrange. On retrouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \mu \frac{\partial g}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Illustrons la méthode des multiplicateurs de Lagrange par deux exemples :

- Supposons que la montagne a un profil paraboloidal :

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2,$$

tel que son sommet est en  $x = y = 0$  à l'altitude  $f(0, 0) = 1$ . La projection du chemin dans le plan  $(x, y)$  a pour équation  $g(x, y) = y + x = \frac{1}{2}$ . Le point du chemin dont l'altitude est la plus élevée est donc donné par le maximum de

$$F(x, y) = 1 - x^2 - y^2 - \mu \left( y + x - \frac{1}{2} \right).$$

Soit

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x - \mu = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y - \mu = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\partial F}{\partial \mu} = y + x - \frac{1}{2} = 0.$$

Le chemin passe donc par un point d'altitude maximale  $7/8$  en  $x = y = -\mu/2 = 1/4$ .

- Reprenons l'exemple de la boîte cylindrique. Introduisons le multiplicateur de Lagrange  $\mu$ . On cherche les extrema de

$$F(L, R, \mu) = S(L, R) - \mu(V(L, R) - V_0).$$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial S}{\partial L} - \mu \frac{\partial V}{\partial L} &= 2\pi R - \mu\pi R^2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial R} = \frac{\partial S}{\partial R} - \mu \frac{\partial V}{\partial R} &= 4\pi R + 2\pi L - 2\mu\pi RL = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R &= 2/\mu, \\ L &= 4/\mu. \end{aligned}$$

On en déduit  $\mu$  à l'aide de la contrainte :  $V_0 = \pi R^2 L = 16\pi/\mu^3$  donc  $\mu = (16\pi/V_0)^{1/3}$ . Finalement, on retrouve  $R = \frac{L}{2} = (V_0/2\pi)^{1/3}$ .

**En général** : Trouver l'extremum d'une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  à  $n$  variables liées par  $K$  contraintes holonomes  $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_j$ , où  $j = 1, 2, \dots, K$  revient à chercher l'extremum de la fonction à  $n + K$  variables indépendantes

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &- \mu_1 (g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - C_1) \\ &- \mu_2 (g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) - C_2) \\ &\dots \\ &- \mu_K (g_K(x_1, x_2, \dots, x_n) - C_K), \end{aligned}$$

où on a introduit  $K$  multiplicateurs de Lagrange.

## b Contraintes de type holonome

La méthode des multiplicateurs de Lagrange se généralise au cas d'une fonctionnelle à plusieurs variables<sup>7</sup> : Soit une fonction

$$f(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x), x).$$

Si la contrainte sur les fonctions  $y_1, y_2 \dots y_n$  peut s'écrire sous la forme

$$g(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x), x) = 0, \quad (7)$$

on dit que la contrainte est holonome<sup>8</sup>. L'extremum de la fonctionnelle

$$S[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x), x) dx, \quad (8)$$

soumise à la contrainte (7), est obtenu en recherchant l'extremum de la fonctionnelle

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ f(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n, x) - \mu(x)g(y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n, x) \right] dx.$$

La fonction  $\mu(x)$  est déterminée a posteriori par la contrainte (7).

## Exemple : Les géodésiques sur la sphère

Quel est le chemin le plus court entre deux points à la surface d'une sphère ?

Soit une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  et deux points  $A$  et  $B$  placés à sa surface. La position d'un point à la surface de la sphère obéit à la contrainte :

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = R^2, \quad (9)$$

où  $t$  est un paramètre (pas forcément le temps). L'arc élémentaire a une longueur

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) dt^2.$$

La longueur du chemin est donc

$$l[x, y, z] = \int_A^B \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

On recherche les fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  telle que  $l[x, y, z]$  soit minimale avec la contrainte (9). On introduit donc la fonction  $\mu(t)$  et on cherche à minimiser l'intégrale  $\int_A^B h(x, y, z, x', y', z') dt$  où

$$h(x, y, z, x', y', z') = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \mu(t)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2).$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour la fonction  $x$  donne

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -2\mu x = \frac{d}{dt} \frac{\partial h}{\partial x'} = \frac{d}{dt} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

7. Voir par exemple le chapitre 3.2) de "Mécanique, De la formulation Lagrangienne au chaos hamiltonien" C. Gignoux et B. Silvestre-Brac (EDP Sciences, 2002).

8. Un contre-exemple : lorsque la contrainte s'écrit sous la forme d'une inégalité.

de même pour  $y$  et  $z$ . On peut donc écrire :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -2\mu\mathbf{r}, \quad (10)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

En prenant le produit vectoriel de l'équation (10) avec  $\mathbf{r}$  on obtient

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0}$$

et comme  $\mathbf{u}$  et  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  sont colinéaires

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Le vecteur  $\mathbf{r} \times \mathbf{u}$  est donc constant entre les points  $A$  et  $B$ . Les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{u}$  sont dans le plan équatorial passant par  $A$  et  $B$ . Le chemin le plus court est donc l'arc de grand cercle (il y a deux chemins, mais un seul est le plus court).

### c Contraintes de forme intégrale

Dans les problèmes aux variations, la contrainte peut également s'exprimer sous la forme d'une intégrale :

$$C[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} g(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x), x) dx = C, \quad (11)$$

où  $C$  est une constante. Comme dans le cas précédent, l'extremum de la fonctionnelle (8) sera obtenu en recherchant l'extremum de la fonctionnelle

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ f(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) - \mu g(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x), x) \right] dx.$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\mu$  (qui n'est pas une fonction, comme dans le cas des contraintes holonomes) est déterminé a posteriori par la contrainte (11).

### Exemple 1 : Le problème isopérimétrique

On cherche l'équation  $y(x)$  de la courbe sous forme paramétrique  $x(t), y(t)$ , où  $t$  est un paramètre. Un élément de courbe positionné en  $(x, y)$  a une longueur  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ . La contrainte sur le périmètre est exprimée sous la forme d'une intégrale :

$$l[x, y] = \oint \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = cte. \quad (12)$$

L'aire que l'on souhaite maximale est donnée par :

$$A[x, y] = \oint y dx = \oint y(t) x'(t) dt, \quad (13)$$

ou encore, en intégrant par parties :

$$A[x, y] = - \oint x(t)y'(t)dt. \quad (14)$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on recherche donc l'extremum de

$$S[x, y] = \oint h_1(y, y', x')dt,$$

où  $h_1(y, y', x') = yx' - \mu\sqrt{x'^2 + y'^2}$  ne dépend pas explicitement de  $t$  et de  $x$ . L'équation d'Euler-Lagrange est donc ( $\frac{\partial h_1}{\partial x} = 0$ , variable cyclique) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial h_1}{\partial x'} = 0,$$

donc

$$\frac{\partial h_1}{\partial x'} = y - \mu \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = b, \quad (15)$$

où  $b$  est une constante. On pourrait exprimer l'équation d'Euler-Lagrange pour  $y$  mais il est plus facile d'utiliser à présent la fonctionnelle (14) et donc  $h_2 = -xy' - \mu\sqrt{x'^2 + y'^2}$ . L'équation d'Euler-Lagrange pour  $y$  donne donc ( $\frac{\partial h_2}{\partial y} = 0$ , variable cyclique) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial h_2}{\partial y'} = 0,$$

donc

$$\frac{\partial h_2}{\partial y'} = -x - \mu \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = -a, \quad (16)$$

où  $a$  est une constante. En multipliant l'équation (15) par  $2y'$  et l'équation (16) par  $2x'$  on obtient en ajoutant ces deux équations :

$$2(xx' + yy' - ax' - by') = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - 2ax - 2by) = 0.$$

Soit

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = (x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2 = c^2,$$

où  $c$  est une constante. On trouve bien sûr l'équation d'un cercle centré en  $(a, b)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . L'intérêt de la paramétrisation est que l'on peut calculer facilement le multiplicateur de Lagrange. En effet, avec  $x(t) = a + R \cos t$  et  $y(t) = b + R \sin t$ , on vérifie que  $R = l/2\pi$  et  $A = l^2/4\pi$ . Il est facile de se convaincre que cet extremum est bien un maximum.

## Exemple 2 : La chaînette

On considère un fil pesant inextensible et homogène de masse linéique  $\lambda$  et de longueur  $l$  attaché à ses deux extrémités en  $x = 0$  et en  $x = a \leq l$ . Déterminer sa forme à l'équilibre<sup>9</sup>.

Soit  $y(x)$  l'équation de cette forme. On a les conditions aux limites  $y(0) = y(a) = 0$  et la contrainte :

$$l = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{constante}. \quad (17)$$

9. Cette question a intéressé de nombreux savants comme Galilée, Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens.

Chaque élément de corde de longueur  $ds$  et de masse  $\lambda ds$  a pour coordonnées  $(x, y(x))$ . Les coordonnées du centre de gravité sont

$$X_g[y] = \frac{\int_0^a x \lambda ds}{\int_0^a \lambda ds} = \frac{1}{l} \int_0^a x \sqrt{1+y'^2} dx,$$

et

$$Y_g[y] = \frac{\int_0^a y \lambda ds}{\int_0^a \lambda ds} = \frac{1}{l} \int_0^a y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

La condition d'équilibre impose que le centre de gravité est le plus bas possible (ou autrement dit que son énergie potentielle  $\int \lambda gy ds$  gravitationnelle est minimale) :  $Y_g$  minimale avec la contrainte (17). En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on recherche donc l'extremum de

$$S[y] = \int_0^a h(y, y') dx,$$

où  $h(y, y') = y\sqrt{1+y'^2} + \mu\sqrt{1+y'^2}$  est indépendante de  $x$ , on peut donc utiliser la formule de Beltrami :

$$h - y' \frac{\partial h}{\partial y'} = (y + \mu)\sqrt{1+y'^2} - (y + \mu) \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

où  $C$  est une constante, soit

$$\frac{y + \mu}{\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Donc

$$1 + y'^2 = \left(\frac{y + \mu}{C}\right)^2.$$

Posons  $z = \frac{y + \mu}{C}$ , on a

$$1 + C^2 z'^2 = z^2 \quad \text{soit} \quad z' = \pm \frac{1}{C} \sqrt{z^2 - 1}.$$

Une solution est de la forme  $z = \cosh(\alpha x + \beta)$  avec  $\alpha = 1/C$ . Donc

$$y(x) = C \cosh\left(\frac{x}{C} + \beta\right) - \mu.$$

Or  $y(0) = y(a) = 0$  donc  $\beta = -a/2C$  et  $\mu = C \cosh\left(\frac{a}{2C}\right)$ . Ainsi :

$$y(x) = C \left( \cosh\left(\frac{x - a/2}{C}\right) - \cosh\left(\frac{a}{2C}\right) \right).$$

Reste à déterminer la constante  $C$  à l'aide de la contrainte (17) qui donne l'équation implicite :

$$l = 2C \sinh \frac{a}{2C}.$$

On en déduit également

$$X_g = \frac{1}{l} \int_0^a x \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{aC}{l} \sinh \frac{a}{2C} = \frac{a}{2},$$

où on a utilisé l'équation issue de la contrainte. On en déduit

$$Y_g = C \left(1 - \cosh \frac{a}{2C}\right).$$

La forme de la chaînette est donc un cosinus hyperbolique

### III Rudiments de mécanique analytique

#### 1 De Newton à Lagrange : une reformulation de la mécanique

L'expérience montre que le mouvement d'un objet ponctuel est complètement déterminé par sa position  $q(t)$  et sa vitesse  $\dot{q}(t)$  à un instant donné  $t$  (on se place pour l'instant dans un espace à une dimension). En effet, l'équation fondamentale de la dynamique fournit l'expression de  $\ddot{q}(t)$  en fonction de  $q(t)$  et  $\dot{q}(t)$  :

$$\ddot{q}(t) = f(q(t), \dot{q}(t)).$$

Connaissant les forces qui s'exercent sur le système et donc l'expression de la fonction  $f$ , la trajectoire est construite *localement*, de proche en proche, en passant de l'état mécanique à l'instant  $t$  à celui en  $t + dt$  : Ainsi,  $\dot{q}(t)$  permet de calculer  $q(t + dt)$  et  $\ddot{q}(t)$  permet de calculer  $\dot{q}(t + dt)$ . Le formalisme newtonien est donc basé sur une approche différentielle.

Il existe une autre approche de la mécanique basée sur le *principe de moindre action*<sup>10</sup> qui s'inspire du principe de moindre temps de Fermat : parmi tous les chemins possibles entre deux points donnés de l'espace, la trajectoire physique (réelle) d'un objet est le chemin qui minimise (ou en général "extrémise") une certaine quantité définie sur toute la trajectoire, appelée *action*. On retrouve une idée très générale en physique qui a le mérite d'être simple et élégante : les lois de la nature obéissent à un *principe d'économie*. Contrairement à l'approche newtonienne, il s'agit donc d'un critère *global* qui caractérise l'ensemble de la trajectoire.

L'enjeu n'est donc pas de trouver de nouvelles lois de la physique, mais de reformuler l'approche newtonienne sous la forme du principe de moindre action dans un cadre simple et unificateur<sup>11</sup>. Comment définir l'action de façon à retrouver les équations du mouvement ? Le principe variationnel va nous permettre de répondre à cette question. Au-delà de cette reformulation de la mécanique newtonienne, cette approche a des développements fondamentaux que nous discuterons brièvement dans la conclusion.

#### 2 Le formalisme Lagrangien

##### a Le principe de moindre action

Un objet part d'un point  $A_1$  à l'instant  $t_1$  et arrive au point  $A_2$  à l'instant  $t_2$ . Il existe une infinité de chemins entre ces deux points, pourtant l'objet en choisit un seul, la trajectoire physique (voir la figure 6).

Pour utiliser le principe variationnel, il faut introduire une fonctionnelle qui dépende du chemin  $q(t)$ , fictif ou réel, suivi par l'objet. Le plus simple est de définir cette fonctionnelle comme une intégrale sur le temps le long du chemin considéré. Il s'agit bien d'une quantité qui caractérise *globalement* le chemin. La fonction à intégrer dépend naturellement du chemin considéré  $q(t)$ , ainsi que de sa dérivée par rapport au temps  $\dot{q}(t)$ .

---

10. Pierre-Louis de Maupertuis énonce ce principe "*si digne de l'Être suprême*" en 1744 et Joseph-Louis de Lagrange, en 1787, en donne la formulation complète que nous connaissons aujourd'hui.

11. Comme l'écrit Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) dans l'avertissement de son livre "Mécanique analytique" (1787), un siècle après l'ouvrage de Newton : "*On ne trouvera point de Figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.*"

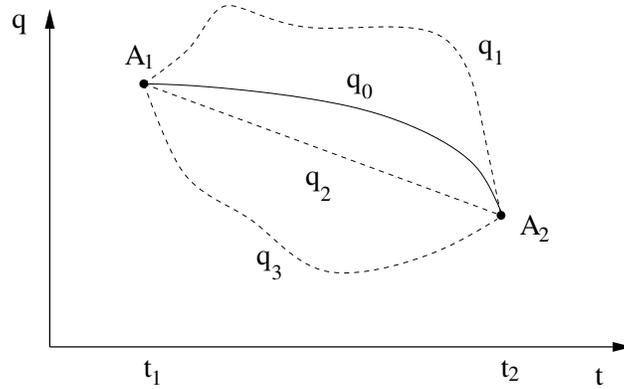


FIGURE 6 – Différents chemins  $q_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) en fonction du temps  $t$ . La trajectoire réelle  $q_0$  représentant un mouvement de chute libre dans le champ de pesanteur est représentée en traits pleins.

Plus généralement, cette fonction peut dépendre explicitement du temps. On définit donc l'action par

$$S[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (18)$$

où la fonction  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$  est appelée le *Lagrangien* du système. Nous verrons plus loin comment écrire cette fonction<sup>12</sup>. Rappelons que la fonction  $L$  dépend du temps explicitement, mais aussi implicitement à travers  $q(t)$  et  $\dot{q}(t)$ . La dérivée de  $L$  par rapport à  $t$  est donc :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}.$$

Pour un chemin donné, tel que  $q(t_1)$  et  $q(t_2)$  sont fixés,  $S[q]$  prend une certaine valeur. D'après le principe de moindre action, la trajectoire physique est le chemin qui donne une valeur minimale<sup>13</sup> à l'action. La trajectoire est donc donnée par l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.} \quad (19)$$

Plus généralement, le principe de moindre action implique que la dynamique d'une quantité physique (position d'une particule, valeur d'un champ,...) se déduit d'une unique grandeur, appelée action, qui doit être minimale pour représenter la réalité.

## b Le Lagrangien

Comment écrire le Lagrangien d'un système ? Considérons pour commencer une particule libre. D'après l'équation fondamentale de la dynamique<sup>14</sup>, on doit avoir

$$m\ddot{q} = \frac{d}{dt}(m\dot{q}) = 0. \quad (20)$$

12. Remarquons que le Lagrangien est défini à une fonction près, dépendant seulement du temps, que l'on peut toujours écrire comme une dérivée totale,  $\frac{dg}{dt}$ , où  $g(q, t)$  doit être indépendante de  $\dot{q}$  pour que le Lagrangien ne dépende pas de  $\ddot{q}$ . La contribution à l'action est donc une constante,  $g(t_2) - g(t_1)$ , qui ne modifie pas l'extremum obtenu. On appelle cette propriété l'invariance de jauge.

13. Il s'agit en général d'un minimum, d'où le nom de principe de *moindre* action, mais dans certains cas l'extremum est un maximum.

14. Une méthode alternative est de raisonner à partir des symétries du système (*Mécanique*, L. Landau et E. Lifchitz (Mir, Moscou, 1982)). Par symétrie, le Lagrangien d'une particule libre ne peut dépendre explicitement de sa position  $q$  (invariance par translation d'espace), du temps  $t$  (invariance par translation du temps) et de la direction de sa vitesse (isotropie de l'espace). C'est donc une fonction de la norme de la vitesse uniquement (qui peut a priori varier au cours du temps). A une dimension on a donc  $L = f(\dot{q}^2)$ . Le principe de relativité de Galilée impose ensuite la forme du Lagrangien.

Le Lagrangien d'une particule libre est indépendant de la position  $q$ , car l'espace est homogène. L'équation d'Euler-Lagrange impose donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = 0.$$

En comparant avec l'équation fondamentale de la dynamique (20), on peut écrire

$$\frac{\partial L(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} + C,$$

où  $C$  est une constante. Soit, en intégrant :

$$L(\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + C\dot{q} + D,$$

où  $D$  est une constante (rappelons que le Lagrangien de la particule libre doit être indépendant de  $q$ ). L'espace étant isotrope, le Lagrangien ne peut dépendre que de la norme de la vitesse  $\dot{q}^2$  (et non pas de  $\dot{q}$ ), donc (à une constante près)<sup>15</sup> :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2.$$

Dans le cas où le système est soumis à une force conservative<sup>16</sup>, il est raisonnable d'écrire le Lagrangien sous la forme

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + f(q),$$

où  $f$  est une fonction qui ne dépend que de la position. Retrouver l'équation fondamentale de la dynamique à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange impose  $f(q) = -U(q)$ , où  $U$  est l'énergie potentielle d'interaction. Soit :

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q). \quad (21)$$

Ainsi, dans le cas où  $U = U(q)$  l'énergie potentielle ne dépend que de la coordonnée  $q$ , l'équation d'Euler-Lagrange implique

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q}.$$

D'une façon générale, on écrira le Lagrangien comme

$$\boxed{L = T - U},$$

où  $T$  est l'énergie cinétique et  $U$  l'énergie potentielle.

Dans le cas d'un système constitué de  $N$  particules dans un espace à trois dimensions, on introduira les *coordonnées généralisées*  $q_i$ , où  $i = 1, 2, \dots, 3N$  et les vitesses correspondantes  $\dot{q}_i$ . En coordonnées cartésiennes on a donc  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = y_1$ ,  $q_3 = z_1$ ,  $q_4 = x_2$ ,

15. On peut également écrire ce Lagrangien sous la forme :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{dq}{dt},$$

où  $g(q, t) = Cq + Dt$ . L'ajout de cette dérivée totale par rapport au temps ne modifie pas les propriétés physiques du système (voir la note 12).

16. L'utilisation exclusive de forces conservatives en mécanique analytique peut sembler être un handicap, mais la dissipation de l'énergie n'intervient que de façon effective pour des systèmes macroscopiques. Sur le plan fondamental, pour des systèmes microscopiques étudiés dans le cadre de la physique quantique, cette restriction ne pose pas de problème. Il est néanmoins possible de prendre en compte des frottements modélisés par  $f = -\mu\dot{q}$ , en utilisant la notion de force généralisée.

$q_5 = y_2, \dots$  où  $(x_j, y_j, z_j)$  sont les coordonnées spatiales de la  $j^{\text{eme}}$  particule<sup>17</sup>. Mais selon les symétries du système, les coordonnées généralisées peuvent aussi être des angles (coordonnées sphériques ou polaires) comme on le voit dans les deux exemple ci-dessous.

Finalement, le Lagrangien du système s'écrit (en coordonnées cartésiennes) :

$$L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - U(q_1, q_2, \dots, q_{3N}).$$

On a alors  $3N$  équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, 3N.$$

### Exemple 1 : La particule libre (en coordonnées polaires)

Il n'est bien sûr pas naturel d'étudier un mouvement rectiligne uniforme en coordonnées polaires, mais cet exemple montre bien que le traitement d'un problème de mécanique à l'aide de coordonnées généralisées est indépendant du système de coordonnées choisi.

On a vu que le Lagrangien d'une particule libre s'écrit  $L = \frac{1}{2}mv^2$ , où  $v$  est la vitesse de la particule. Soit en coordonnées polaires :

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2).$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour les coordonnées  $q_1 = r$  et  $q_2 = \theta$  impliquent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

A l'aide d'un changement de variables, il est possible de montrer que la trajectoire est une droite (en coordonnées polaires) et que le vecteur vitesse est constant (la deuxième équation montre la conservation du moment cinétique).

### Exemple 2 : Le pendule

Considérons par exemple un pendule de longueur  $l$  décrit par l'angle  $\theta$  (une dimension). Son Lagrangien est ( $U(\theta) = -mgl \cos \theta$ , où  $\theta$  est l'angle avec la verticale) :

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta,$$

et l'équation d'Euler-Lagrange implique :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta}.$$

---

17. Une contrainte sur les coordonnées réduit le nombre de degrés de liberté. Par exemple, une particule qui se déplace à la surface d'une sphère n'a que deux degrés de liberté. Compte tenu de la symétrie, on choisira les angles  $q_1 = \theta$  et  $q_2 = \phi$  plutôt que les coordonnées cartésiennes. En général s'il y a  $m$  contraintes, il y a  $3N - m$  degrés de liberté (c'est-à-dire de coordonnées indépendantes qui fixent la position du système).

On retrouve l'équation du mouvement du pendule  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ . On voit que contrairement à la résolution du problème par la mécanique newtonienne, la tension du fil n'intervient pas explicitement (la contrainte est prise en compte simplement avec  $r = l$ ) et il n'y a pas d'équations vectorielles à projeter, mais seulement des grandeurs scalaires.

### 3 Le formalisme hamiltonien

#### a Les équations de Hamilton

Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps ( $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ) :

$$\sum_i^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (22)$$

est une constante du mouvement d'après la formule de Beltrami<sup>18</sup>.

Dans le cas d'une force conservative (à une dimension), on voit que :

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q)$$

est une constante du mouvement, c'est-à-dire une variable dynamique (qui dépend des coordonnées généralisées) qui ne varie pas au cours du mouvement. On reconnaît bien sûr l'énergie du système<sup>19</sup>. C'est donc parce que le Lagrangien ne dépend pas *explicitement* du temps que l'énergie est conservée au cours du mouvement. Une *loi d'invariance* (ici par rapport à une translation dans le temps) implique donc une *loi de conservation* (ici de l'énergie). Nous y reviendrons.

De plus, ce résultat suggère l'utilisation d'une autre fonction que le Lagrangien pour déduire les équations du mouvement. On définit le *moment conjugué* (ou *impulsion généralisée*)  $p_i$  associé à la coordonnée  $q_i$  par

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (23)$$

En général le moment conjugué est l'impulsion  $p_i = m\dot{q}_i$  (cas des  $N$  particules ponctuelles), mais lorsque la coordonnée généralisée  $q_i$  est un angle, son moment conjugué est un moment cinétique. Ainsi, dans le cas du pendule de longueur  $l$  décrit par l'angle  $\theta$ . Le moment conjugué de  $\theta$  est  $p_\theta = ml^2\dot{\theta}$ , c'est-à-dire son moment cinétique. Nous verrons en

18. Pour le montrer à nouveau dans le cadre de la mécanique analytique :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i^{3N} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \\ &= \sum_i^{3N} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{d}{dt} (\dot{q}_i) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \end{aligned}$$

Le Lagrangien n'est donc pas une constante du mouvement en général.

19. On retrouve également l'énergie mécanique dans le cas d'une particule chargée dans un champ électromagnétique comme nous le verrons en exercice.

exercice le cas particulier d'une particule chargée dans un champ électromagnétique, pour lequel le moment conjugué n'est pas égal à la quantité de mouvement de la particule.

Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement de la variable  $q_i$  on dit que cette variable est *cyclique* ( $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ ) et d'après les équations d'Euler-Lagrange son moment conjugué est une constante du mouvement ( $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = cte$ ) : A nouveau, une propriété d'*invariance* (ici par rapport à une translation dans l'espace) implique la *loi de conservation* d'une grandeur physique associée (ici l'impulsion). Nous avons déjà rencontré le cas d'une particule libre : le Lagrangien ne dépend pas de la position et l'impulsion  $p = m\dot{q}$  est conservée. Dans le cas d'un mouvement à force centrale (en coordonnées polaires à 2 d) le Lagrangien est par symétrie indépendant de l'angle  $\theta$  :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \frac{A}{r}.$$

L'impulsion généralisée  $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ , c'est-à-dire le moment cinétique, est donc conservée.

A partir de l'expression (22), définissons une nouvelle fonction appelée *Hamiltonien*<sup>20</sup> (1834) et notée  $H$  :

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}) \equiv \left( \sum_{i=1}^{3N} \dot{q}_i p_i \right) - L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}) = T + U. \quad (24)$$

Le Hamiltonien se confond avec l'énergie du système dans le cas de forces conservatives (et si  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ) et dans le cas de la force de Lorentz comme nous le verrons en exercice. On passe donc du Lagrangien au Hamiltonien par une transformation de Legendre<sup>21</sup>.

Reste à trouver les équations du mouvement à partir de cette nouvelle fonction. Pour cela différencions  $H$  et utilisons l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{3N} [\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right)}_{\substack{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p}_i \\ p_i}}] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^{3N} [\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i] - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

On voit que les variables naturelles du Hamiltonien sont les coordonnées  $q_i$  et leurs moments conjugués  $p_i$ . On en déduit les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (25)$$

20. Sir William Rowan Hamilton, (1805-1865) mathématicien et physicien irlandais, unifie les formalismes de l'optique et de la mécanique, premier jalon de la mécanique quantique.

21. C'est la transformation que l'on utilise en Thermodynamique pour changer de potentiel, selon les variables que l'on souhaite utiliser.

Comme les  $3N$  équations du second ordre d'Euler-Lagrange, les  $6N$  équations du premier ordre de Hamilton permettent d'exprimer les équations du mouvement<sup>22</sup>. Elles ont également l'avantage d'être symétriques (au signe près) en  $q_i$  et  $p_i$ . Par ailleurs,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Ainsi, le Hamiltonien d'un système de  $N$  particules soumises à des forces conservatives s'écrit :

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + U(q_1, q_2, \dots, q_{3N}).$$

Les équations de Hamilton impliquent pour  $i = 1, 2, \dots, 3N$  :

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i,$$

où  $F_i$  est la composante de la force associée à la coordonnée  $q_i$ . En pratique, on écrit le Lagrangien du système en fonction des  $q_i$  et des  $\dot{q}_i$ , on calcule les moments conjugués  $p_i$ , on en déduit le Hamiltonien en fonction des  $q_i$  et des  $p_i$ , et on résout les équations de Hamilton.

Remarquons que le formalisme de Hamilton est indépendant de celui de Lagrange. En effet, on peut définir l'action directement à l'aide du Hamiltonien, la condition de stationnarité impose alors les équations de Hamilton. En définissant l'action comme

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q_i, p_i\}) \right) dt,$$

on a

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i) - \delta H \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \dot{q}_i \delta p_i + p_i \frac{d\delta q_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \underbrace{\left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)}_0 \delta p_i - \underbrace{\left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_0 \delta q_i \right) dt + \underbrace{\sum_i [p_i \delta q_i]_{t_1}^{t_2}}_0 = 0, \end{aligned}$$

où l'on a intégré par parties le terme en  $p_i \frac{d\delta q_i}{dt}$  et le terme entre crochets est nul, car  $\delta q_i = 0$  en  $t_1$  et en  $t_2$ . Pour que l'action soit stationnaire ( $\delta S = 0$ ), les variables  $q_i$  et  $p_i$  étant indépendantes, on retrouve les équations de Hamilton.

Reprenons l'exemple du pendule de longueur  $l$  décrit par l'angle  $\theta$  (une dimension). Son Hamiltonien est :

$$H(\theta, p_\theta) = p_\theta \dot{\theta} - L(\theta, \dot{\theta}) = ml^2 \dot{\theta}^2 - \left( \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta \right) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta.$$

<sup>22</sup>. Mais il est en général plus simple de résoudre (analytiquement ou numériquement) des équations différentielles du premier que du deuxième ordre.

Les équations de Hamilton impliquent :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

et

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta$$

et on retrouve l'équation du mouvement.

## b L'espace des phases

Dans le formalisme de Hamilton, on travaille avec les coordonnées généralisées et les impulsions généralisées, les premières étant indépendantes des secondes. La dynamique d'un système est alors décrite dans *l'espace des phases* : l'espace à  $2Nd$  dimensions (pour  $N$  particules qui évoluent dans un espace à  $d$  dimensions) dont les coordonnées sont les  $Nd$  coordonnées généralisées  $q_i$  et les  $Nd$  moments conjugués  $p_i$ . On peut noter la position du système,  $\mathbf{X}(t) = \{q_i, p_i\}$ , dans l'espace des phases. L'évolution de la position déterminée par les équations de Hamilton décrit un *système dynamique*. Le *portrait de phase* est alors la représentation de la dynamique du système dans l'espace des phases pour une énergie donnée  $E$  (voir la figure 7). Remarquons que puisque la trajectoire dans l'espace des phases est déterminée par les équations de Hamilton et les conditions initiales, deux trajectoires ne peuvent pas se couper.

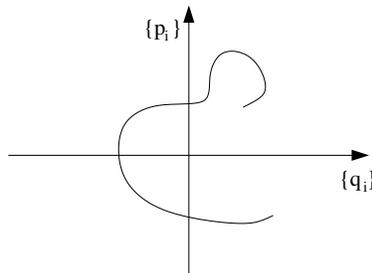


FIGURE 7 – La trajectoire d'un système dans l'espace des phases à  $2Nd$  dimensions.

Dans le cas du pendule simple, l'espace des phases a deux dimensions :  $q = \theta$  et  $p = p_\theta$ . Et le portrait de phase est donné par :

$$p_\theta = \pm \sqrt{2ml^2(E + mgl \cos \theta)}.$$

On distingue deux cas selon la valeur de l'énergie (si  $E < -mgl$ , il n'y a pas de mouvement possible) :

- si  $-mgl < E < mgl$  : le mouvement n'est possible que pour des angles compris dans un certain intervalle qui augmente avec l'énergie (libration ou oscillations libres).
- si  $mgl < E$  : le mouvement est possible quelle que soit la valeur de l'angle (rotation).

## c Les crochets de Poisson

Considérons une grandeur physique  $f$  dépendant des  $3N$  coordonnées  $q_i$  et des  $3N$  moments conjugués  $p_i$  (pour  $N$  particules évoluant dans un espace à trois dimensions).

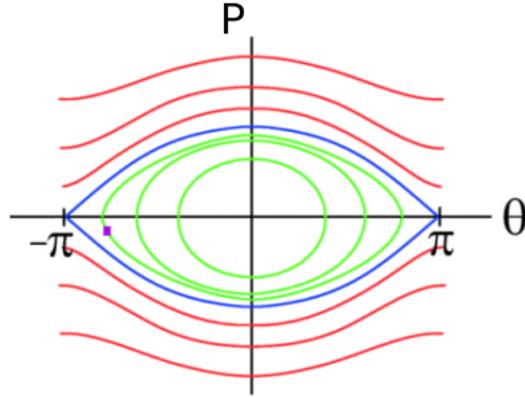


FIGURE 8 – Le portrait de phase du pendule simple. Les trajectoires ouvertes (rotation pour  $E > mgl$ ) et fermées (oscillations pour  $-mgl < E < mgl$ ) sont respectivement en rouge et en vert.

Sa dérivée totale par rapport au temps est donnée par

$$\frac{df}{dt}(\{q_i, p_i\}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j \right).$$

D'après les équations de Hamilton,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \quad (26)$$

où l'on a introduit les crochets de Poisson (1809) de  $f$  avec  $H$ . En général, les crochets de Poisson de deux fonctions  $f$  et  $g$  s'écrivent :

$$\{f, g\} \equiv \sum_{j=1}^{3N} \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right).$$

On voit que  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ . Grâce à cette propriété d'antisymétrie des crochets de Poisson, les équations de Hamilton peuvent s'écrire de façon symétrique :

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, 3N.$$

Les crochets de Poisson permettent donc de déterminer directement la dynamique d'une grandeur  $f$  et d'associer des propriétés de symétrie et de conservation. Ainsi, d'après l'équation (26), l'évolution d'une grandeur physique  $f$  qui ne dépend pas explicitement du temps est donnée par l'équation

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \quad (27)$$

C'est donc le Hamiltonien qui contrôle l'évolution du système. En particulier, la grandeur  $f$  est une constante du mouvement<sup>23</sup> si  $\{f, H\} = 0$ .

23. On peut démontrer l'identité de Jacobi, propre à une algèbre de Lie :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0,$$

sur laquelle repose le théorème de Poisson : si  $f$  et  $g$  sont deux constantes du mouvement ( $\{f, H\} = 0$  et  $\{g, H\} = 0$ ) alors  $\{f, g\}$  l'est aussi.

Pour ouvrir une porte sur la mécanique quantique, les crochets de Poisson sont à l'origine du *commutateur* entre deux opérateurs. Ainsi, les crochets de Poisson

$$\{q, p\} = 1,$$

annonce la relation fondatrice de la mécanique quantique<sup>24</sup> :

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar,$$

où  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  est la constante de Planck. Cette analogie entre mécanique classique et mécanique quantique est mise en évidence par Paul Dirac en 1926.

## 4 Conclusion

La dynamique d'un système peut être étudiée à l'aide de différentes approches qui donnent les mêmes équations du mouvement. Considérons le cas général d'un système constitué de  $N$  particules évoluant dans un espace à trois dimensions. L'approche newtonienne repose sur le concept de force et sur la résolution de  $N$  équations vectorielles différentielles du 2eme ordre (et de  $6N$  conditions initiales). Le formalisme lagrangien s'inscrit dans le cadre plus large du principe variationnel. Les  $3N$  équations d'Euler-Lagrange sont également des équations différentielles du deuxième ordre, mais elles s'expriment en fonction de coordonnées généralisées  $q_i$  et de vitesses généralisées  $\dot{q}_i$ . L'approche hamiltonienne, bien qu'elle soit indépendante de l'approche lagrangienne<sup>25</sup>, repose sur le même principe de moindre action et sur la résolution de  $6N$  équations différentielles du premier ordre qui s'expriment simplement à l'aide des crochets de Poisson.

Un premier avantage des approches variationnelles, Lagrangienne et Hamiltonienne, est qu'elles permettent non seulement de tenir compte des contraintes simplement (tension du fil, réaction du support, liaisons...), mais également de travailler avec des équations dont la forme est indépendante du choix du système de coordonnées.

Au-delà de ces aspects techniques, la simplicité d'un principe d'économie offre un cadre unificateur qui permet de reformuler la mécanique classique (relativiste) et de construire de nouvelles théories : De la mécanique quantique réinterprétée à l'aide d'un principe variationnel par Richard Feynman en 1942 en terme d'intégrales de chemin, jusqu'aux théories classique et quantique des champs qui permettent de travailler avec des objets caractérisés par un nombre infini de degrés de liberté et d'étudier des phénomènes aussi divers que la physique des particules et les transitions de phase.

---

24. L'équation d'évolution (27) est équivalente à l'équation d'Ehrenfest en mécanique quantique. On consultera avec profit *Mécanique quantique, 1. Fondements et premières applications*, C. Aslangul (de Boeck, Bruxelles, 2007).

25. En général il est plus facile d'écrire un Lagrangien qu'un Hamiltonien à l'aide des symétries du système étudié. Quitte à utiliser ensuite le formalisme Hamiltonien. Il n'est pas toujours possible de déduire le moment conjugué du Lagrangien et donc d'écrire le Hamiltonien d'un système (par exemple dans le cas de l'électrodynamique classique).

## 5 Exercices

### a L'oscillateur harmonique

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique (classique) à une dimension s'écrit

$$U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

- 1) Écrire le Lagrangien de l'oscillateur harmonique et en déduire l'équation du mouvement.
- 2) Écrire le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique et retrouver l'équation du mouvement.
- 3) Montrer à l'aide des équations de Hamilton que le Lagrangien

$$L = \frac{m}{2}e^{\alpha t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2),$$

décrit le mouvement d'un oscillateur amorti.

### Réponse :

- 1) Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Et d'après l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

donc

$$-m\omega^2 q = m\ddot{q}.$$

- 2) Le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Les équations de Hamilton donnent

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -m\omega^2 q.$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0.$$

- 3) Le moment conjugué s'écrit  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}e^{\alpha t}$  donc

$$H = \frac{p^2}{2m}e^{-\alpha t} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 e^{\alpha t}.$$

Les équations de Hamilton donnent

$$\dot{q} = \frac{p}{m}e^{-\alpha t} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -m\omega^2 q e^{\alpha t}.$$

On en déduit l'équation du mouvement :

$$\ddot{q} + \omega^2 q + \alpha \dot{q} = 0.$$

## b La bille et le cerceau

Une bille glisse sans frottement le long d'un cerceau de rayon  $R$  animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à vitesse angulaire  $\omega$  constante. La position de la bille sur le cerceau est déterminée par un seul degré de liberté, l'angle  $\theta$  avec la verticale. La position du cerceau est elle décrite par l'angle  $\phi$  (voir la figure 9).

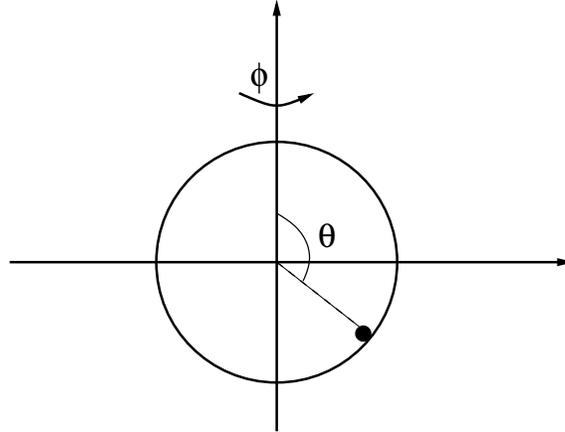


FIGURE 9 – La bille sur le cerceau en rotation.

- 1) Écrire le Lagrangien de ce système et en déduire l'équation du mouvement.
- 2) Écrire le Hamiltonien du système et en déduire à nouveau l'équation du mouvement.
- 3) Montrer que la bille est soumise à un potentiel effectif  $V(\theta)$ , que l'on tracera en fonction de  $\theta$ . On pose  $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ .
- 4) Quel est le comportement de la bille pour des vitesses de rotation lente ( $\omega < \omega_0$ ) ?
- 5) Même question dans le cas de la rotation rapide ( $\omega > \omega_0$ ).

### Réponse :

1) En coordonnées sphériques, la position de la bille est donc déterminée par  $R$ ,  $\theta(t)$  et  $\phi(t)$ . Sa vitesse est donc  $R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + R\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$ , avec  $\dot{\phi} = \omega$ . Son énergie potentielle est  $U(\theta) = mgR\cos\theta$ . On en déduit le Lagrangien du système :

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR\cos\theta.$$

On en déduit à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}},$$

soit

$$mR^2\omega^2 \sin\theta \cos\theta + mgR \sin\theta = \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\theta}) = mR^2\ddot{\theta},$$

donc

$$R\omega^2 \sin\theta \cos\theta + g \sin\theta = R\ddot{\theta}.$$

A l'aide de l'équation fondamentale de la dynamique projetée sur  $\vec{e}_\theta$  pour éliminer la réaction du cerceau sur la bille et en tenant compte de la force centrifuge de norme  $m\omega^2 R \sin \theta$  on aurait bien :

$$mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta + (m\omega^2 R \sin \theta) \cos \theta.$$

2) Le moment conjugué de  $\theta$  s'écrit :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta},$$

donc

$$H = \dot{\theta} p_\theta - L = \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}^2 - \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta.$$

D'après les équations de Hamilton :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

et

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = mR^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta.$$

On retrouve bien sûr l'équation du mouvement.

3) D'après le Hamiltonien :

$$V(\theta) = \frac{1}{2} mR^2 (2\omega_0^2 \cos \theta - \omega^2 \sin^2 \theta).$$

La fonction est symétrique par rapport à  $\pi$  ( $V(\pi - \theta) = V(\pi + \theta)$ ). Et

$$\frac{dV}{d\theta} = -mR^2 \sin \theta (\omega_0^2 + \omega^2 \cos \theta).$$

Entre 0 et  $\pi$ , la dérivée est négative si  $\omega_0^2 + \omega^2 \cos \theta > 0$ , donc si

$$\cos(\theta) > -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

4) Dans le cas d'une rotation lente ( $\omega < \omega_0$ ), cette condition est remplie quelle que soit la valeur de  $\theta$ . La dérivée est donc négative pour tout  $\theta$  et s'annule en 0 (équilibre instable) et en  $\pi$  (équilibre stable), en bas du cerceau. Au voisinage de ce point d'équilibre, la bille a un mouvement harmonique avec la pulsation  $\omega_l = \omega \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1}$ . En effet :

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -mR^2 (\omega_0^2 \cos \theta + \omega^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))$$

et

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_\pi = \frac{1}{2} mR^2 \omega_l^2.$$

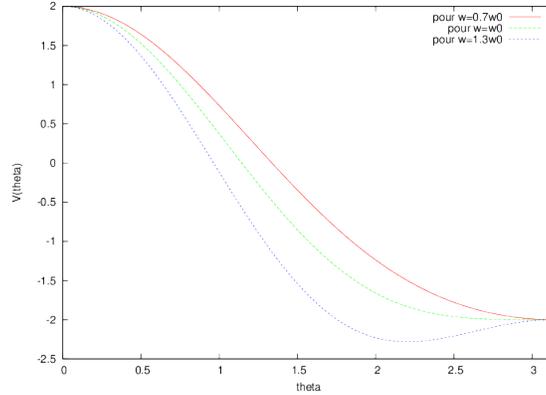


FIGURE 10 – Le potentiel  $V(\theta)$  entre  $0$  et  $\pi$ .

5) Dans le cas d'une rotation rapide ( $\omega > \omega_0$ ), cette condition est remplie si  $\theta < \theta_s$  tel que  $\cos(\theta_s) = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ . L'angle  $\theta_s$  est donc un point d'équilibre (stable) et  $0$  et  $\pi$  deviennent des points d'équilibre instables. En ce point, l'énergie potentielle vaut

$$V(\theta_s) = -\frac{1}{2}mR^2\omega^2\left(1 + \frac{\omega_0^4}{\omega^4}\right).$$

La bille a un mouvement oscillant autour de l'angle  $\theta_s$  avec la pulsation  $\omega_r = \omega\sqrt{1 - \frac{\omega_0^4}{\omega^4}}$ . Quand  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\theta_s \rightarrow \pi/2$ .

### c L'atome hydrogéoïde

On considère l'électron d'un atome hydrogéoïde<sup>26</sup> subissant l'effet du potentiel central :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{C}{r}. \quad (28)$$

- 1) Donner l'expression du Lagrangien de ce système en coordonnées sphériques et en déduire les équations du mouvement.
- 2) En déduire l'existence de quantités conservées. Interpréter.
- 3) Écrire le Hamiltonien de ce système et les équations de Hamilton.

### Réponse :

1) On a  $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{C}{r}$  dont on note qu'il est invariant par rotation. En coordonnées sphériques on a :  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$  et

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{u}_\phi$$

d'où :

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right) + \frac{C}{r}. \quad (29)$$

<sup>26</sup>. Un atome hydrogéoïde est un atome auquel on a arraché tous ses électrons sauf un. Il se comporte donc comme un atome d'hydrogène avec un noyau de charge  $Z > 1$ .

D'après l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (30)$$

on a, pour les coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (m\dot{r}) = m \left( r\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{C}{r^2} \\ \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \\ \frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

2) On déduit immédiatement des équations précédentes que la quantité  $mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$  est conservée. La conservation de cette grandeur est liée au fait que le Lagrangien est indépendant de la variable angulaire  $\phi$ . Elle traduit donc l'invariance par rotation du système autour de l'axe  $Oz$ . Vérifions que la quantité conservée est la projection du moment angulaire sur l'axe  $Oz$ .

On a  $\mathbf{J} = \mathbf{r} \wedge m\dot{\mathbf{r}}$  et  $J_z = \mathbf{J} \cdot \mathbf{u}_z$  où  $\mathbf{u}_z$  est donné par :  $\mathbf{u}_z = \cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta$  d'où :  $J_z = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$ .

L'invariance complète par rotation du système implique que les autres composantes  $J_x$  et  $J_y$  sont aussi conservées. C'est la dissymétrie du système de coordonnées qui privilégie l'axe  $Oz$  et, par conséquent, la composante  $J_z$  du moment cinétique. Mais comme le choix de l'axe  $Oz$  est arbitraire la conservation de  $J_i$  vaut pour tout  $i = x, y$  ou  $z$ .

3) Calculons d'abord les moments conjugués :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \end{aligned}$$

En coordonnées sphériques, le moment conjugué est donc différent de l'impulsion  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ . Le Hamiltonien du système s'écrit donc

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \left( \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{C}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{C}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{C}{r}. \end{aligned}$$

Les équations de Hamilton sont :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3 \sin^2 \theta} - \frac{C}{r^2} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad \text{et} \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0.\end{aligned}$$

En utilisant les expressions des moments conjugués, on retrouve bien les équations du mouvement obtenues à l'aide du formalisme lagrangien.

#### d La particule chargée dans un champ électromagnétique

On considère le Lagrangien d'une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  plongée dans un champ électromagnétique ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) décrit par les potentiels scalaire  $\phi(\mathbf{r}, t)$  et vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  :

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t).$$

1) Déterminer l'équation du mouvement de la particule et retrouver l'expression de la force de Lorentz. On rappelle que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont liés aux potentiels scalaire et vecteur par

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}.$$

2) Donner l'expression du Hamiltonien de la particule et en déduire les équations de Hamilton.

**Réponse :**

1) On a :

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + q\left(\dot{x}A_x(\mathbf{r}, t) + \dot{y}A_y(\mathbf{r}, t) + \dot{z}A_z(\mathbf{r}, t)\right) - q\phi(\mathbf{r}, t),\end{aligned}$$

où l'on note que  $\mathbf{A}$  et  $\phi$  font intervenir, via leurs arguments, la position de la particule. On a donc pour la composante  $x$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + qA_x \\ \text{et} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= q\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - q\frac{\partial \phi}{\partial x} = q\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - q\frac{\partial \phi}{\partial x}.\end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + q\frac{dA_x}{dt} = m\ddot{x} + q\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right).$$

L'équation du mouvement de la particule est alors donnée par (équation d'Euler-Lagrange) :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -q \frac{dA_x}{dt} + q \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - q \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= -q \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right) + q \left( \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - q \frac{\partial \phi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q \left( \underbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{E_x} \right) \\ &+ q \left( \dot{y} \underbrace{\left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)}_{B_z} - \dot{z} \underbrace{\left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)}_{B_y} \right), \end{aligned}$$

car

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

et

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$m\ddot{x} = q E_x + q \underbrace{(\dot{y} B_z - \dot{z} B_y)}_{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_x}.$$

On retrouve donc l'expression de la force de Lorentz et de la deuxième loi de Newton projetée sur l'axe  $Ox$ .

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).$$

Remarquons que les champs électromagnétiques sont invariants par les transformations de jauge

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi(\mathbf{r}, t),$$

où  $\chi(\mathbf{r}, t)$  est une fonction quelconque. Sous cette transformation le Lagrangien devient

$$L' = L + q \left( \mathbf{v} \cdot \nabla \chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = L + q \frac{d\chi}{dt}.$$

Le terme ajouté au Lagrangien  $L$  étant une dérivée totale par rapport au temps, la transformation de jauge n'affecte pas le mouvement de la particule.

2) Le moment conjugué  $p_x$  est donné par

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x,$$

d'où :

$$\dot{x} = \frac{1}{m}(p_x - qA_x),$$

donc

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}).$$

On remarque que le moment conjugué est ici différent de l'impulsion  $p_x = m\dot{x}$ . Le Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L(\mathbf{r}, \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) - \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 - \frac{q}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} + q\phi \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi. \end{aligned}$$

Les équations de Hamilton sont données par (pour la composante selon l'axe  $Ox$ ) :

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{et} \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$$

soit

$$\dot{p}_x = -\left( -\frac{q}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + q \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad \text{et} \quad \dot{x} = \frac{1}{m} (p_x - qA_x).$$

En dérivant la deuxième équation par rapport au temps on retrouve l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \dot{p}_x - q \frac{dA_x}{dt} \\ &= \frac{q}{m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - q \frac{\partial \phi}{\partial x} - q \frac{dA_x}{dt} \\ &= q\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - q \frac{\partial \phi}{\partial x} - q \frac{dA_x}{dt}. \end{aligned}$$

### e Le théorème du viriel

Une particule de masse  $m$  se déplace dans un potentiel  $V(\mathbf{r})$  à trois dimensions. On suppose dans la suite que la particule est dans un état lié d'énergie  $E$ .

1) Donner l'expression du Hamiltonien de la particule, calculer le crochet de Poisson  $\{A, H\}$ , où

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$$

et en déduire l'équation donnant l'évolution de  $A$ .

2) Dans le cas d'un mouvement périodique, la moyenne temporelle  $\langle f \rangle$  d'une grandeur physique  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  s'écrit

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) dt$$

où  $T$  est la période. Démontrer le théorème du viriel :

$$2\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle.$$

Pour un potentiel central de la forme  $V(r) = C r^n$ , quelle est la relation entre l'énergie totale  $E$ , la moyenne de l'énergie cinétique et la moyenne de l'énergie potentielle ?

3) En général, le mouvement peut être confiné sans être périodique. Comment généraliser le théorème du viriel ?

**Réponse :**

1) Le Hamiltonien est

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}).$$

On a donc

$$\{A, H\} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Or  $A = \sum_{j=1}^3 q_j p_j$ , donc

$$\{A, H\} = \sum_{i=1}^3 \left( p_i \cdot \frac{p_i}{m} - q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = \frac{p^2}{m} - \mathbf{r} \cdot \nabla V.$$

Et

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} = \frac{p^2}{m} - \mathbf{r} \cdot \nabla V.$$

2) Prenons la moyenne de  $\frac{dA}{dt}$ ,

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \langle \{A, H\} \rangle = \frac{A(T) - A(0)}{T} = 0,$$

car le mouvement est périodique. D'où le résultat demandé. Pour un potentiel central :

$$\mathbf{r} \cdot \nabla V = Cnr^{n-1} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = Cnr^n = nV(r),$$

donc

$$2\langle E_c \rangle = n\langle V \rangle.$$

Et puisque  $E = E_c + V$ , on a

$$E = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \langle V \rangle = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \langle E_c \rangle.$$

Par exemple :

— Pour  $n = 2$  (oscillateur harmonique) :  $E = 2\langle V \rangle = 2\langle E_c \rangle$ .

— Pour  $n = -1$  (potentiel newtonien) :  $E = \frac{1}{2}\langle V \rangle = -\langle E_c \rangle$ .

Une application en astrophysique : Considérons un amas d'étoiles dont on mesure les vitesses et les positions. Les énergies cinétique et potentielle de cet amas sont environ

$$E_c \sim \frac{1}{2} M v^2 \quad \text{et} \quad V \sim -G \frac{M^2}{2R}$$

où  $M$  est la masse totale de l'amas,  $R$  est la distance moyenne entre deux étoiles et le facteur  $1/2$  évite le double comptage. Puisque  $\langle V \rangle = -2\langle E_c \rangle$ , on peut estimer l'ordre de grandeur de la masse de l'amas :

$$M \sim \frac{2Rv^2}{G}.$$

Il est par ailleurs possible d'estimer la masse  $M$  en déduisant la masse de chaque étoile visible à partir de sa luminosité. En 1933, Fritz Zwicky compara la masse obtenue à partir du théorème du viriel,  $M_v$  et celle estimée à partir de la luminosité  $M_l$  et trouva

typiquement  $M_v/M_l \sim 100$  dans les amas de galaxies. Cette découverte suggère l'existence d'une matière noire non observée directement.

3) Dans le cas d'une orbite confinée (non périodique) la valeur moyenne est donnée par

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) dt.$$

Ainsi

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{A(T) - A(0)}{T} \rightarrow 0,$$

puisque  $A(t)$  est finie pour tout  $t$ . Le théorème du viriel reste donc valable dans ce cas.