

## Méthodes mathématiques pour physiciens 1

*(LP206)*



# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Retour sur la convergence</b>	<b>1</b>
1.1	Limite d'une fonction . . . . .	1
1.1.1	Définition . . . . .	1
1.1.2	Formes indéterminées . . . . .	4
1.2	Suites . . . . .	8
1.2.1	Définition . . . . .	8
1.2.2	Limite d'une suite . . . . .	9
1.2.3	Suites de fonctions . . . . .	11
1.3	Intégrales . . . . .	13
1.3.1	Rappels élémentaires . . . . .	13
1.3.2	Intervalle d'intégration fini : singularités intégrables . . . . .	16
1.3.3	Intervalle d'intégration infini : conditions d'intégrabilité . . . . .	18
1.3.4	Exemples où l'intégrale de la limite n'est pas la limite de l'intégrale . . . . .	20
1.4	Séries . . . . .	21
1.4.1	Convergence d'une série . . . . .	21
1.4.2	Séries de fonctions . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Notions élémentaires sur les équations différentielles</b>	<b>35</b>
2.1	Définitions . . . . .	35
2.2	Pertinence des équations différentielles en Physique . . . . .	36
2.3	Importance des conditions auxiliaires (conditions initiales, conditions aux limites) . . . . .	38
2.4	Classification des équations différentielles . . . . .	43
2.5	Équations linéaires . . . . .	43
2.5.1	Équations linéaires homogènes . . . . .	44

2.5.2	Équations linéaires inhomogènes . . . . .	48
2.6	Équations non-linéaires . . . . .	48
2.7	Quelques équations remarquables . . . . .	50
2.7.1	Équations à variables séparées . . . . .	50
2.7.2	Équation de Bernoulli . . . . .	50
2.7.3	Équation de Riccati . . . . .	51
2.8	Exemples . . . . .	51
2.8.1	Exemple 1 : le problème proie - prédateur . . . . .	51
2.8.2	Exemple 2 : le parachute . . . . .	51
2.8.3	Exemple 3 : le pendule simple . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Applications des séries de Fourier</b>	<b>55</b>
3.1	Représentation d'une fonction périodique . . . . .	55
3.1.1	Présentation . . . . .	55
3.1.2	Développement en série d'exponentielles complexes. Calcul des coefficients . . . . .	56
3.1.3	Exemples . . . . .	61
3.1.4	Phénomène de Gibbs . . . . .	65
3.2	Équations différentielles linéaires avec une source périodique . . . . .	67
3.2.1	Définition et rappels . . . . .	67
3.2.2	Découplage des fréquences . . . . .	68
3.2.3	Exemples . . . . .	69
3.3	Analyse d'un signal périodique avec un appareil de bande passante donnée . . . . .	71
3.4	Diffusion cohérente par un réseau fini . . . . .	73
3.5	Diffusion cohérente par un réseau infini . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Dynamique des systèmes linéaires</b>	<b>81</b>
4.1	Définition d'un système linéaire. Prototype : l'oscillateur harmonique . . . . .	81
4.2	Introduction de l'amortissement . . . . .	86
4.2.1	Frottement fluide . . . . .	86
4.2.2	Notion de relaxation. Oubli des conditions initiales . . . . .	89
4.3	Susceptibilité $\chi$ . . . . .	91
4.4	Absorption d'énergie : rôle de $\Im \chi$ . . . . .	95

4.5	Oscillateurs couplés . . . . .	97
4.5.1	Cas de deux oscillateurs . . . . .	97
4.5.2	Notion de mode propre. Généralisation à $N$ oscillateurs . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Introduction à la dynamique des systèmes non-linéaires</b>	<b>101</b>
5.1	Richesse et spécificités des systèmes non-linéaires . . . . .	101
5.1.1	Introduction . . . . .	101
5.1.2	Stabilité . . . . .	103
5.1.3	Notion de bifurcation . . . . .	103
5.1.4	Brisure de symétrie . . . . .	105
5.2	Singularités spontanées d'une équation différentielle non-linéaire . . . . .	106
5.3	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	107
5.4	Portrait de phase . . . . .	110
5.4.1	Présentation sur l'exemple simple de l'équation (5.5) . . . . .	110
5.4.2	Le pendule simple . . . . .	111
5.5	Systèmes à deux variables . . . . .	114
5.5.1	Le modèle proie - prédateur (Lotka - Volterra) . . . . .	114
5.5.2	La réaction oscillante de Belousov-Zhabotinskii . . . . .	116
5.6	Variables discrètes. Applications récursives (itérations) . . . . .	119
5.6.1	Variables discrètes <i>vs</i> variables continues . . . . .	119
5.6.2	Points fixes. Stabilité . . . . .	122
5.6.3	Exemples d'applications itératives . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Équations de conservation et de bilan</b>	<b>133</b>
6.1	Conservation d'une grandeur physique . . . . .	133
6.1.1	Conservation dans le temps : exemple des constantes du mouvement mécanique . . . . .	134
6.1.2	Conservation et symétrie . . . . .	136
6.2	Expression de la conservation d'une grandeur . . . . .	137
6.2.1	Notion de densité . . . . .	137
6.2.2	Expression locale. Notion de bilan. Vecteur courant . . . . .	139
6.2.3	Équation constitutive. Équations de la diffusion et de la chaleur . . . . .	143

6.3	Exemple de bilan : chaîne radioactive . . . . .	147
6.4	Évolution probabiliste d'un système : équation-maîtresse . . . . .	150
6.4.1	Dérivation de l'équation-maîtresse . . . . .	150
6.4.2	Exemples . . . . .	152

# Chapitre 1

## Retour sur la convergence

*Le but de ce chapitre est de rappeler les notions usuelles de convergence pour les suites, séries et intégrales*

### 1.1 Limite d'une fonction

#### 1.1.1 Définition

La notion première de limite se réfère à la situation où une quantité prend des valeurs de plus en plus proches d'une certaine valeur *fixe*, suivant une recette bien définie. Par exemple, les nombres décimaux  $x_n$  du genre  $x_1 = 1,1$ ,  $x_2 = 1,11$ ,  $x_3 = 1,111$ , etc. se rapprochent de plus en plus de  $\frac{1}{9}$  quand le nombre de décimales augmente. *Passer à la limite* consiste ici à mettre un nombre de décimales *plus grand* que tout nombre prescrit à l'avance ; l'infini qui s'introduit ici est le nombre d'éléments dans l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels, noté usuellement  $\infty$  sans distinction, mais que l'on peut noter  $\infty_{\mathbb{N}}$  s'il y a risque d'ambiguïté. L'opération de limite se notera ici :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{9} . \quad (1.1)$$

Soit maintenant une fonction  $f$  à valeurs réelles,  $x \rightarrow f(x)$ . On dit que  $f(x)$  a une limite en un point donné  $x_0$  s'il existe un nombre  $l$  tel que quand  $x$  tend vers  $x_0$ ,  $f(x)$  tend vers  $l$ . Autrement dit, ayant construit (éventuellement mentalement) une suite de nombres  $x_n$  dont la limite est précisément  $x_0$ , on dit que la fonction  $f$  a une limite en  $x_0$  ssi  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . Ceci signifie que, s'étant donné d'avance un nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe un autre nombre  $\delta$  (dépendant du  $\varepsilon$  choisi) tel que si l'écart entre la valeur  $x$  de la variable et  $x_0$  est plus petit que  $\delta$ , alors l'écart entre  $f(x)$  et  $l$  est, lui, plus petit que  $\varepsilon$ . En langage convenu, ceci s'écrit :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon} \quad (1.2)$$

et on note :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l . \quad (1.3)$$

Autrement dit, la valeur  $f(x)$  de la fonction est aussi proche que l'on veut du nombre  $l$  à condition que  $x$  soit très près de  $x_0$ .

Cela étant précisé, on peut définir la *continuité* d'une fonction. Une fonction  $f(x)$  est continue en un point  $x_0$  ssi elle a une limite en  $x_0$  et si cette limite vaut  $f(x_0)$  :

$$f(x) \text{ est continue en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) , \quad (1.4)$$

soit :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon} \quad (1.5)$$

Dans l'exemple donné ci-dessus, toute fonction  $f(x)$  continue en  $\frac{1}{9}$  a pour limite  $f(\frac{1}{9})$ . Un point où une fonction est continue appartient forcément à son domaine de définition, puisqu'il faut être en mesure de calculer  $f(x_0)$ , c'est-à-dire d'effectuer toutes les opérations apparaissant dans la définition de  $f$  ; alors la limite est de fait  $f(x_0)$ . Soit par exemple la fonction  $x \rightarrow f(x) = e^x \sin x$  ; sa valeur en  $x = \frac{\pi}{4}$  s'obtient immédiatement en remplaçant partout  $x$  par  $\frac{\pi}{4}$  dans l'expression de  $f(x)$ , et on trouve  $e^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1,551$ .

De la même façon, on peut définir la limite d'une fonction  $f(x)$  à l'infini, en effectuant le changement de variable  $X = \frac{1}{x}$ . En posant  $\phi(X) = f(x = \frac{1}{X})$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{X \rightarrow 0_{\pm}} \phi(X) . \quad (1.6)$$

Cette définition étant posée, notons toutefois qu'il n'est pas toujours nécessaire en pratique d'effectuer le changement de variable pour obtenir la réponse à la question posée. Par exemple, soit à trouver  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  avec :

$$f(x) = e^{-\frac{x^2+1}{2x^2+1}} ; \quad (1.7)$$

en posant  $X = \frac{1}{x}$ , on a :

$$f(x) = e^{-\frac{X^{-2}+1}{2X^{-2}+1}} = e^{-\frac{1+X^2}{2+X^2}} \equiv \phi(X) , \quad (1.8)$$

d'où  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0_{\pm}} e^{-\frac{1+X^2}{2+X^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ . Ce résultat peut aussi s'obtenir directement avec  $f(x)$  en notant que quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{x^2+1}{2x^2+1} \sim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e^{-1/2}$ .

Pour une fonction non continue en un point  $x_0$  (fonction discontinue), il est nécessaire de distinguer la limite à gauche et la limite à droite, quand elles existent :

- limite à droite :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - l_+| < \varepsilon \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_+$  ,
- limite à gauche :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $0 < x_0 - x < \delta \implies |f(x) - l_-| < \varepsilon \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_-$  ,

qui se distinguent par le fait que  $x$  va vers  $x_0$  soit par valeurs supérieures, soit par valeurs inférieures. Pour une fonction continue à valeurs réelles, les limites à gauche et à droite  $l_{\pm}$  sont les mêmes (la fonction n'a pas de saut,  $l_- = l_+ = l$ ).

La notion de la limite d'une fonction en un point  $x_0$ , telle qu'elle est définie en (1.2), n'exige pas que  $x_0$  appartienne au domaine de définition de  $f$ . Soit par exemple, la fonction  $\tanh \frac{1}{x}$ , qui n'est pas définie en  $x = 0$ , mais qui possède des limites à gauche et à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \tanh \frac{1}{x} = -1 , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \tanh \frac{1}{x} = +1 . \quad (1.9)$$

De la même façon, soit à trouver la limite de la fonction  $\frac{1}{x} \ln(1+x)$  en  $x = 0$  ; ici, le numérateur vaut zéro en ce point, et il en va de même pour le dénominateur : on ne peut donc rien dire pour l'instant, puisque la division par zéro est une opération qui n'est pas définie. C'est l'un des cas où on parle de *forme indéterminée*, et où d'autres moyens doivent être mis en œuvre pour en savoir plus (voir sous-section 1.1.2). En pratique, on se place dans le voisinage de  $x = 0$  mais à  $x \neq 0$  et on élucide le comportement du numérateur et du dénominateur ; la valeur de la limite dépend de la façon dont numérateur et dénominateur tendent chacun vers zéro : si le dénominateur s'annule plus vite<sup>1</sup> que le numérateur, la limite est infinie ; dans le cas contraire, la limite est nulle. Si numérateur et dénominateur se comportent de la même façon, la limite est un nombre fini.

<sup>1</sup>Exemple :  $x^3$  s'annule plus vite que  $x^2$  quand  $x \rightarrow 0$  : pour  $x = 0.01$ ,  $0.01^3 = 10^{-6}$  est plus petit que  $0.01^2 = 10^{-4}$ .



En définitive, cela a un sens de se demander qu'elle est la limite (si elle existe) d'une fonction  $f(x)$  en un point  $x_0$  n'appartenant pas à l'intervalle de définition. Si la limite existe, et vaut  $l$ , il est naturel de compléter la définition initiale en posant  $f(x_0) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} l$ . Ainsi, pour  $f(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{\sin x}{x}$ , dont l'intervalle de définition est  $\mathbb{R}^*$ , il est très naturel de poser  $f(0) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} 1$  ; au total, la définition complète de la fonction s'écrit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} . \quad (1.10)$$

Cela fait, la fonction est définie partout, non plus seulement sur  $\mathbb{R}^*$  ; l'usage est dire que l'on a prolongé par continuité  $f(x)$  en  $x = 0$ .

Il existe évidemment des cas où *visiblement* la limite d'une fonction en un point tout simplement n'existe pas. Soit par exemple  $x \rightarrow f(x) = \cos \frac{1}{x}$  ; quand  $x$  devient de plus en plus petit, la fonction, quoique bornée entre  $\pm 1$ , oscille de plus en plus vite, puisque la distance entre deux zéros consécutifs est  $\frac{2}{\pi} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})(k+\frac{3}{2})}$  : clairement,  $f$  n'a pas de limite en  $x = 0$ . En pareil cas, il ne s'agit aucunement d'une "forme indéterminée" : on peut dire d'avance que la limite n'existe pas – il est donc inutile de la chercher.

Enfin, il se révèle indispensable d'étendre la notion de limite au cas où la quantité d'intérêt devient de plus en plus grande en valeur absolue. Par exemple, soit les nombres de la forme  $x_1 = 0,123 + \frac{1}{0,1}$ ,  $x_2 = 0,123 + \frac{1}{0,01}$ ,  $x_3 = 0,123 + \frac{1}{0,001}$ , ... Ces nombres valent respectivement 10,123, 100,123, 1000,123 et il est clair que si  $n$  est plus grand qu'un certain  $N$ , alors tous les  $x_n$  seront plus grands que  $10^N$  : en pareil cas, on dit que les  $x_n$  tendent vers  $+\infty$  (c'est ici l'infini  $\infty_{\mathbb{Q}}$  des rationnels  $\mathbb{Q}$ , égal à  $\infty_{\mathbb{N}}$ ), ou *divergent*.

De la même façon, on dit qu'une fonction  $f(x)$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers  $x_0$  si  $|f(x)|$  est plus grand que tout nombre donné à l'avance quand  $x$  se rapproche de  $x_0$ . Une fois élucidé le signe de  $f$ , on pourra dire si la limite est  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty ; \quad (1.11)$$

ceci constitue d'ailleurs un cas où les limites à gauche et à droite sont différentes, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ .

Citons des exemples typiques où la notion de limite intervient en Physique :

1. la vitesse d'un point matériel est définie comme le rapport entre la distance parcourue et le temps nécessaire pour la parcourir ; en symboles :

$$V_{t_2 t_1} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \frac{x_{t_2} - x_{t_1}}{t_2 - t_1} ; \quad (1.12)$$

il s'agit plus précisément de la vitesse *moyenne* entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ . On peut aussi s'intéresser à la vitesse dite instantanée,  $v_t$ , définie comme :

$$v_t \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t} ; \quad (1.13)$$

en Mécanique classique, la vitesse existe toujours et est un ingrédient essentiel de la trajectoire suivie par le point matériel (elle en donne la tangente).

2. Les propriétés magnétiques d'un système (solide, liquide, ...) s'étudient en examinant la réaction de ce système à un champ magnétique de module  $\mathcal{B}$ . En particulier, l'aimantation  $\mathcal{M}$  est (en général) d'autant plus grande que  $\mathcal{B}$  est grand. La relation la plus simple qui vient à l'esprit est une simple proportionnalité ; on écrit alors  $\mathcal{M} = \chi \mathcal{B}$  où  $\chi$  est par définition la susceptibilité du système – qui peut aussi être posée comme :

$$\chi \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lim_{\mathcal{B} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{B}} . \quad (1.14)$$

Pour un système paramagnétique, la limite existe, ce qui signifie physiquement que la susceptibilité est finie. En revanche, pour un système ferromagnétique (fer, nickel, cobalt), la susceptibilité est infinie en dessous d'une certaine température appelée température de Curie (qui vaut environ 1000 K pour le fer).

3. La Mécanique statistique étudie les systèmes formés d'un très grand nombre  $N$  de "particules" (atomes, molécules, ...),  $N$  étant de l'ordre du nombre d'Avogadro. C'est l'énormité de ce nombre qui assure l'extraordinaire "simplicité" de la physique de tels systèmes<sup>2</sup> : pour un gaz parfait ordinaire, la simple donnée de *trois* paramètres (pression, volume, température) permet une description exhaustive des propriétés physiques d'équilibre. Ce nombre  $N$  est gigantesque, mais fini : dans un acte de foi, le Physicien passe à la limite thermodynamique en examinant la limite  $N \rightarrow \infty$  des grandeurs qu'il a réussi à calculer (en général approximativement, ou, presque toujours, plus ou moins implicitement) à  $N$  fini<sup>3</sup>.
4. La théorie relativiste est requise pour des objets dont la vitesse typique  $v$  n'est pas petite par rapport à la vitesse de la lumière,  $c$ . La limite non-relativiste s'obtient en faisant formellement tendre vers zéro le rapport  $\frac{v}{c}$  (un vrai nombre !).
5. La Mécanique quantique est la théorie capable de décrire les phénomènes à l'échelle atomique ; une constante fondamentale est la constante de Planck,  $h \simeq 6.64 \times 10^{-34}$ , qui a une dimension physique (énergie×temps, ou coordonnée×quantité de mouvement, c'est une *action*). On dit habituellement que la Mécanique classique (i.e. non quantique) s'obtient en prenant la limite  $h \rightarrow 0$  ; cette affirmation rapide n'a pas grand sens : en réalité, il faut comparer ce qui est comparable et construire, avec  $h$  une grandeur physique, par exemple une énergie  $h\nu$  où  $\nu$  est une fréquence caractéristique du problème, et la comparer avec une autre énergie apparaissant dans le même problème,  $E_{\text{car}}$ . La limite classique s'exprime proprement en faisant tendre vers zéro le nombre  $\frac{h\nu}{E_{\text{car}}}$  ; le plus souvent, cette limite est *singulière*.

D'une façon générale, en Physique, le zéro et l'infini n'existent pas au sens strict : par exemple, prendre la limite d'une longueur nulle signifie simplement que la longueur en question est beaucoup plus petite que toute longueur accessible expérimentalement, ou plus petite que toute autre longueur intrinsèquement déjà définie dans le problème étudié. De même, prendre la limite d'un temps infini signifie seulement que l'on se place à des temps gigantesques devant toute échelle de temps naturelle du problème. Autre exemple : la dimension linéaire du récipient contenant un gaz est "infiniment" grande devant toutes les autres longueurs propres du problème (libre parcours moyen, distance moyenne entre atomes, etc.). Le zéro et l'infini signifient seulement "beaucoup plus petit" ou "beaucoup plus grand" que toute autre grandeur du même type caractéristique du problème posé.

### 1.1.2 Formes indéterminées

Traditionnellement, on parle de *formes indéterminées* à propos de quantités se présentant sous l'une des formes suivantes :

$$\infty - \infty ; \quad \frac{0}{0} ; \quad \frac{\infty}{\infty} ; \quad 1^\infty ; \quad \infty^0 ; \quad 0^0 \dots \quad (1.15)$$

C'est par exemple le cas, respectivement, pour :

$$x^3 - 2x^2 ; \quad \frac{e^{-x}}{\sinh \frac{1}{x}} ; \quad \frac{\cosh x}{x^4} ; \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x ; \quad (\ln x)^{\frac{1}{x}} ; \quad \left(\ln \frac{x}{x+1}\right)^{\coth x - 1} \quad (1.16)$$

quand  $x \rightarrow +\infty$ . Le plus souvent, un peu de savoir-faire permet de trouver rapidement la réponse cherchée. Ainsi, dans le premier exemple ci-dessus, on voit immédiatement que la limite est  $+\infty$ , car  $x^3$  croît beaucoup plus vite que  $x^2$  ; plus précisément, le rapport  $\frac{x^3}{x^2} = x$  diverge ; une façon équivalente est de dire que le rapport  $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$  tend vers zéro quand  $x$  augmente indéfiniment. On peut aussi écrire les choses de façon un peu plus technique :

$$x^3 - 2x^2 = x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right) \simeq x^3, \quad x \rightarrow +\infty . \quad (1.17)$$

Pour le troisième exemple de (1.16), la limite est  $+\infty$  car l'exponentielle croît plus vite que toute puissance finie de  $x$ .

Il existe plusieurs méthodes pour lever les formes indéterminées ; les plus usuelles sont :

<sup>2</sup>C'est aussi l'énormité du nombre d'Avogadro qui assure les succès spectaculaires de la Mécanique statistique. Sur ce terrain, le Physicien est autrement plus à l'aise que l'enquêteur d'un institut de sondage avec son échantillon de quelque 1000 individus...

<sup>3</sup>Plus précisément, et pour les systèmes les plus simples, la limite thermodynamique se prend en faisant tendre vers l'infini le nombre  $N$  et (par exemple) le volume  $V$  du système, le rapport  $\frac{N}{V}$  étant maintenu constant (c'est la densité  $\rho$ ).

## 1. Utilisation d'un développement limité

Rappelons ce qu'est un développement limité. Soit  $x \rightarrow f(x)$  une fonction définie sur un intervalle  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in \mathcal{D}$ . On dit que  $f(x)$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en  $x_0$  s'il existe un entier  $n \geq 0$  et  $n + 1$  nombres  $c_1, c_2, \dots$  tels que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n]}{(x - x_0)^n} = 0 . \quad (1.18)$$

Autrement dit, il existe une fonction  $\varepsilon(x)$  telle que :

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \varepsilon(x)(x - x_0)^n , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 . \quad (1.19)$$

En particulier, on a :

$$c_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) , \quad c_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0} ; \quad (1.20)$$

si la fonction est dérivable en  $x_0$ ,  $c_1 = f'(x_0)$ . Pour une fonction  $p$ -fois dérivable en  $x_0$ , il existe un développement d'ordre  $p$  et  $c_q = \frac{1}{q!} f^{(q)}(x_0)$  ( $0 \leq q \leq p$ ). En particulier, pour deux fonctions  $f$  et  $g$  nulles en  $x_0$  et dérivables en ce point, on a :

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0) , \quad g(x) = g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_2(x)(x - x_0) , \quad (1.21)$$

de sorte que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ .

En définitive, les  $n + 1$  premiers termes constituent une approximation polynômiale de la fonction  $f$  dans le voisinage de  $x_0$ , ce que l'on écrit sommairement :

$$f(x) \simeq c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n \quad (1.22)$$

et que l'on appelle *partie principale* du développement limité.

Remplacer une fonction par son développement limité conduit à des opérations algébriques simples permettant précisément d'élucider le comportement de cette fonction au voisinage du point d'intérêt.

■ Avant de donner des exemples d'application, rappelons quelques développements limités fondamentaux dans le voisinage de  $x_0 = 0$  :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \varepsilon(x)x^n , \quad (1.23)$$

et plus généralement :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(n-1)]}{n!} x^n + \varepsilon(x)x^n , \quad (1.24)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \varepsilon(x)x^n . \quad (1.25)$$

Ce dernier développement permet de construire ceux de  $\cos x$  et de  $\sin x$  en partant des formules d'Euler ( $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ,  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ), et aussi ceux de  $\cosh x$  et de  $\sinh x$  par les relations bien connues<sup>4</sup> ( $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \dots$ ). On en déduit aussi :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)x^3 , \quad \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)x^3 . \quad (1.26)$$

L'intégration terme à terme du développement (1.23), choisissant la primitive qui s'annule en  $x = 0$ , permet d'écrire :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \varepsilon_1(x)x^n , \quad (1.27)$$

<sup>4</sup>Toutes ces formules sont liées les unes aux autres. Par exemple, on peut écrire  $\sinh ix = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$ , ce qui montre que  $\sinh ix = i \sin x$ , etc.

Les développements limités se prêtent aux opérations de routine : addition, multiplication, division. En outre, il est toujours licite d'intégrer un développement limité terme à terme ; en revanche, la dérivation doit être justifiée au cas par cas : si l'on sait que la fonction  $\varepsilon(x)$  tend vers zéro quand  $x \rightarrow x_0$ , rien n'est dit à propos de sa dérivée ; par exemple, si  $\varepsilon(x) \propto \sqrt{x-x_0}$ ,  $\varepsilon'(x) \propto \frac{1}{\sqrt{x-x_0}}$ , qui ne tend pas vers zéro. La dérivation n'est licite que si l'on sait par ailleurs que  $\varepsilon'(x)$  tend également vers zéro. ■

Donnons maintenant quelques exemples montrant comment les développements limités permettent de lever des formes indéterminées. Soit à trouver  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ . D'après (1.25) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \quad (1.28)$$

où le symbole<sup>5</sup>  $\mathcal{O}(x^3)$  signifie que le premier terme négligé varie comme  $x^3$ . Il en résulte que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right) = 1 \quad (1.29)$$

On observe d'ailleurs que dans ce cas, il n'était pas nécessaire de pousser le développement de  $e^x$  aussi loin : il eut été suffisant de partir de  $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ .

De la même façon, en sachant que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5), \quad \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5), \quad (1.30)$$

on peut écrire :

$$\frac{\sin x}{\tanh x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)} = \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \left(1 + \frac{x^2}{3}\right) + \mathcal{O}(x^4) = 1 + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4) \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tanh x} = 1 \quad (1.31)$$

Rappelons enfin que la limite  $x \rightarrow +\infty$  peut toujours s'analyser en posant  $X = \frac{1}{x}$  et en considérant le bon développement limité près de  $X = 0$

2. Utilisation d'une quantité plus simple permettant la comparaison et pour laquelle le résultat saute aux yeux. Soit par exemple la fonction compliquée  $x \rightarrow f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{x \coth\left(\frac{x^4 \ln x}{1+e^{-x}}\right)}$  dont on veut la limite quand  $x \rightarrow +\infty$ . Il suffit de remarquer que la coth est positive et supérieure ou égale à 1 dès que  $x > 1$  (alors  $\ln x > 0$  et l'argument de la coth est positif), et que l'exponentielle est une fonction croissante, pour avoir tout de suite :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty \quad (1.32)$$

3. Encadrement par deux bornes ayant la même limite<sup>6</sup>. Si une fonction  $f(x)$  est encadrée par deux fonctions  $g$  et  $h$ , c'est-à-dire si  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

Par exemple, la limite de  $\frac{\sin x}{x}$  quand  $x$  tend vers zéro peut s'obtenir géométriquement en raisonnant avec le cercle trigonométrique (de rayon unité), et en encadrant la surface du secteur circulaire<sup>7</sup> OPM par les surfaces de deux triangles judicieusement choisis, les triangles OPM et OPQ (voir fig. 1.1) ; l'aire de OPM est  $\frac{1}{2}(1)^2 \sin x$ , celle de OPQ est  $\frac{1}{2}(1)(1 \times \tan x)$ . D'où :

$$|x| < \frac{\pi}{2} : \frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x \iff 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (1.33)$$

<sup>5</sup>D'une façon générale, le symbole  $\mathcal{O}(f(x))$  désigne une quantité qui, divisée par  $f(x)$ , tend vers une constante (finie) quand  $x \rightarrow 0$ .

<sup>6</sup>C'est le Théorème des gendarmes.

<sup>7</sup>L'aire d'un secteur circulaire de rayon  $R$  et sous-tendu par l'angle  $\theta$  est égale à  $\frac{1}{2}R^2\theta$ , celle d'un triangle isocèle d'angle au sommet  $\theta$  et de côté  $R$  est  $\frac{1}{2}R^2 \sin \theta$  ; ici,  $R = 1$  et  $\theta \equiv x$ .

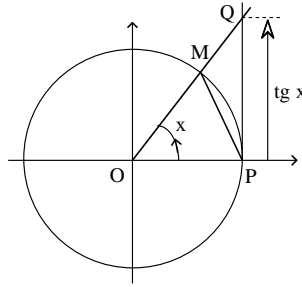


Figure 1.1: Figure montrant les inégalités  $\sin x < x < \tan x$  quand  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

Quand  $x \rightarrow 0$ , la quantité d'intérêt est bornée inférieurement et supérieurement par deux quantités qui ont la même limite, égale à 1, d'où le résultat cherché :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \quad (1.34)$$

Comme autre exemple, citons un résultat très utile en Physique (et ailleurs !) :

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x} \quad (1.35)$$

qui, injectant naïvement les limites, est de la forme  $1^\infty$ . (1.35) peut se démontrer en trouvant le bon encadrement, après avoir tout d'abord remarqué que :

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^{N \ln\left(1 + \frac{x}{N}\right)}. \quad (1.36)$$

Maintenant, en traçant les graphes, on voit que  $\ln(1 + X) < X$ ,  $\forall X > -1$ . Par ailleurs, on a aussi  $f(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \ln(1 + X) - \left(X - \frac{X^2}{2}\right) \geq 0$ ,  $\forall X > -1$ , comme on le démontre en étudiant les variations de la fonction  $f(X)$ . Au total, on a :

$$\forall x > -N : \quad \frac{x}{N} - \frac{x^2}{2N^2} < \ln\left(1 + \frac{x}{N}\right) < \frac{x}{N}. \quad (1.37)$$

Comme la fonction  $e^{NX}$ ,  $N > 0$ , est une fonction croissante, le même encadrement vaut en prenant les exponentielles dans (1.37) :

$$\forall x > -N : \quad e^{N\left(\frac{x}{N} - \frac{x^2}{2N^2}\right)} < e^{N \ln\left(1 + \frac{x}{N}\right)} < e^{N \frac{x}{N}}, \quad (1.38)$$

soit :

$$\forall x > -N : \quad e^x e^{-\frac{x^2}{2N}} < e^{N \ln\left(1 + \frac{x}{N}\right)} < e^x. \quad (1.39)$$

La limite  $N \rightarrow +\infty$  des deux bornes est la même, soit  $e^x$ , d'où (1.35) – un résultat qui est parfois pris comme *définition* du nombre  $e$  :

$$\boxed{e \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662\,497\,757\,247\,093\,700\,\dots} \quad (1.40)$$

4. Un autre résultat important est :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0} \quad (1.41)$$

qui peut se démontrer comme suit. Une définition du logarithme est :

$$\ln x \stackrel{\text{déf}}{=} \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \forall x > 0 ; \quad (1.42)$$

par ailleurs,  $\forall \beta > 0$  et  $0 \leq t < 1$ , on a  $t^{\beta+1} < t$ , d'où :

$$|\ln x| < \left| \int_1^x \frac{1}{t^{\beta+1}} dt \right| = \left| \frac{1}{-\beta} (x^{-\beta} - 1) \right| = \frac{1}{\beta} \left| 1 - \frac{1}{x^\beta} \right|. \quad (1.43)$$

Maintenant, quelque soit  $\alpha > 0$ , on peut trouver  $\beta$  tel que  $0 < \beta < \alpha$  permettant d'écrire :

$$x^\alpha |\ln x| < \frac{x^\alpha}{\beta} \left| 1 - \frac{1}{x^\beta} \right| = \frac{1}{\beta} |x^\alpha - x^{\alpha-\beta}|; \quad (1.44)$$

quand  $x \rightarrow 0$ , le second membre tend vers zéro ; le premier membre, positif par définition, tend donc vers zéro, d'où le résultat ci-dessus.

En changeant  $x$  en  $\frac{1}{x}$  et utilisant  $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$ , on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0} \quad (1.45)$$

Dans les deux cas, on pourra retenir l'image que la fonction logarithme est plutôt  *paresseuse*  : quand il diverge (à l'origine ou à l'infini), le logarithme le fait  *infiniment lentement* .

## 1.2 Suites

### 1.2.1 Définition

On appelle *suite* un ensemble de nombres notés  $x_n$ , construits suivant une règle bien définie exprimée par les opérations élémentaires de l'algèbre ; on se restreint ici au cas où  $x_n \in \mathbb{R} \forall n$ . Une première façon de faire est tout simplement de donner l'expression algébrique de  $x_n$ , par exemple :

$$x_n = \frac{1}{n+2}, \quad x'_n = \sin n^2, \quad x''_n = \frac{a^n}{n!}, \quad x'''_n = \ln n \quad (n \in \mathbb{N}^*). \quad (1.46)$$

À chaque fois, l'expression au second membre permet de calculer n'importe quel élément de la suite en question.

Un autre procédé pour définir une suite consiste à se donner une relation de récurrence entre des termes, souvent consécutifs, par exemple :

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (1.47)$$

où  $a$  est une constante paramétrisant la suite des  $x_n$ . Visiblement, les  $x_n$  ne sont ici complètement déterminés que si l'on se donne l'un d'entre eux, usuellement on fixe le premier,  $x_1$  ; ceci fait, tous les autres  $x_{n \geq 2}$  se trouvent de proche en proche à partir de la relation de récurrence. Un autre exemple est :

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n x_{n-1}} \quad (1.48)$$

et il faudra ici se donner *deux* termes consécutifs – le plus souvent on fixera les deux premiers termes,  $x_1$  et  $x_2$ . D'une façon générale, une telle suite (souvent dite *suite récursive*, ou encore *récurrence*) est donnée par une relation du genre :

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-p}) \quad (1.49)$$

et sera complètement déterminée si l'on connaît les  $p$  premiers  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Un célèbre exemple de récurrence d'ordre 2 est la suite de Fibonacci :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (1.50)$$

qui, assez curieusement, apparaît très souvent dans la Nature (spirales des coquillages) et fournit aussi, sur un plan plus théorique, des modèles simples pour la compréhension de certains matériaux exotiques (quasi-cristaux). La suite (1.50) est complètement déterminée si on se donne en plus les deux premiers nombres  $F_1$  et

$F_2$  : avec  $F_1 = F_2 = 1$ , la suite est 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... et c'est cette séquence précise qui est usuellement désignée comme *la suite de Fibonacci*<sup>8</sup>. Il existe bien d'autres façons de définir une suite : il peut aussi s'agir des solutions d'une équation paramétrée par un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , par exemple  $x^2 - 2x + \frac{1}{n} = 0$  ; dans ce cas, les deux solutions sont réelles quel que soit  $n$  et ont pour limite 0 et 2.

Les suites apparaissent aussi naturellement dans la résolution numérique par itération d'une équation selon un algorithme donné (méthode de Newton pour trouver les zéros d'une équation par exemple, intégration numérique de proche en proche d'une équation différentielle par Runge - Kutta, diagonalisation numérique d'une matrice, ...).

### 1.2.2 Limite d'une suite

Une suite étant donnée, la question la plus importante est de savoir ce que fait  $x_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En d'autres termes, on se pose la question : la suite converge-t-elle et, si oui, quelle est sa limite ? Une telle question est visiblement cruciale lors de la résolution numérique itérative d'une équation : il est essentiel de savoir d'avance si les résultats successifs fournis par l'ordinateur ont le bon goût de *converger* (et si possible vers la solution du problème !)

Plus formellement, la suite converge et sa limite est le nombre  $l$  ssi :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n > N, |x_n - l| < \varepsilon} \quad (1.51)$$

en d'autres termes, l'existence de la limite assure que  $x_n$  est arbitrairement proche de  $l$  à condition que  $n$  soit assez grand. Dans le cas contraire, on dit que la suite ne converge pas (ou est divergente, mais le mot divergent évoque plutôt une croissance à l'infini en module).

Très souvent, on répond pragmatiquement aux deux questions à la fois en raisonnant directement avec l'expression de  $x_n$ , quand on est capable de la trouver, ou quand la suite est d'emblée définie de la première façon ci-dessus. Ainsi, au vu des seconds membres dans (1.46), on peut affirmer que les suites  $x_n$  et  $x_n''$  ont pour limite zéro, alors que la suite  $x_n'$  n'a pas de limite (ses termes oscillent sans cesse entre  $\pm 1$ ), cependant que  $x_n'''$  diverge. Ces deux comportements peuvent d'ailleurs être présents simultanément (par exemple :  $x_n = e^n \cos n\frac{\pi}{3}$ ).

Dans le cas où la suite est donnée par une récurrence, la situation est *a priori* différente – sauf bien sûr si on est capable finalement de trouver l'expression explicite de  $x_n$ , auquel cas on est ramené à la situation précédente. Par exemple, étant donné la récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{\lambda}{n} x_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x_1 = 1, \quad (1.52)$$

on voit que  $x_{n \geq 2} = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ , d'où la limite 0 quelle que soit la valeur du paramètre  $\lambda$  (la factorielle croît plus vite que toute puissance<sup>9</sup>).

À défaut de savoir écrire l'expression explicite du terme général  $x_n$ , trouver la limite de la suite peut, mais pas toujours, se révéler difficile, et parfois relever d'une analyse très subtile : toutes les situations se présentent. Un cas assez facile est la suite issue de celle de Fibonacci (1.50) en formant les rapports  $f_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$  ( $n \geq 1$ ), qui satisfont la récurrence (non-linéaire)  $f_{n+1} = 1 + \frac{1}{f_n}$ , la limite  $f_\infty$ , si elle existe (et on peut montrer que c'est le cas<sup>10</sup>) est manifestement positive, et satisfait alors l'équation  $f_\infty = 1 + \frac{1}{f_\infty}$  ; c'est donc la racine positive de l'équation du second degré  $f_\infty^2 - f_\infty - 1 = 0$ , très précisément l'illustre nombre d'or  $\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \simeq 1.618$ .

En revanche, l'examen des limites des récurrences (1.47) et (1.48) – qui sont elles aussi non-linéaires – est un vaste problème en soi : selon la valeur de  $a$ , les  $x_n$  de (1.47) présentent des comportements très étranges<sup>11</sup>.

<sup>8</sup>Les nombres  $F_n$  ont des propriétés remarquables. Voir par exemple <http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber>.

<sup>9</sup>Utiliser la formule de Stirling :  $n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

<sup>10</sup>Plus généralement, pour la suite commençant avec  $F_1 = F_2 = 1$ , on peut montrer que  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau_+^n - \tau_-^n)$ , où les deux nombres  $\tau_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$  sont les racines de  $x^2 - x - 1 = 0$ .

<sup>11</sup>La récurrence (1.47) est le prototype de l'un des scénarios de l'apparition du chaos déterministe, appelé *cascade de Feigenbaum*, voir ch.5.

Pour une itération du genre  $x_{n+1} = f(x_n)$ , la limite, si elle existe, satisfait nécessairement l'équation  $x = f(x)$  ; une telle équation peut avoir *plusieurs* solutions, appelées généralement *points fixes* (souvent notées  $x^*$ ), qui peuvent être stables ou instables. On reviendra en détail sur ces notions dans le ch.5 consacré aux systèmes non-linéaires.

Par extension, si les nombres  $x_n$  tendent vers  $+\infty$ , on convient de dire que la suite a pour limite  $+\infty$  ; c'est le cas par exemple pour  $x_n'''$  dans (1.46) – ou pour  $x_n = e^n$ , une suite qui diverge violemment !

On a souvent besoin de quelques résultats évidents, rappelés maintenant :

1. une suite monotone croissante ( $x_{n+1} \geq x_n$ ) et bornée supérieurement (majorée) – au moins à partir d'un certain rang  $n_0$ , i.e.  $\exists X, x_n \leq X, \forall n \geq n_0$  – est convergente et a une limite  $l \leq X$
2. une suite  $x_n$  encadrée par deux suites  $x'_n$  et  $x''_n$  ( $x'_n \leq x_n \leq x''_n$ ) convergeant chacune vers la même limite  $l$  a aussi pour limite  $l$
3. soit  $x'_n$  une suite convergeant vers  $l$ . Si<sup>12</sup>  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n - x'_n}{x'_n} \right| = 0$ , alors la limite de  $x_n$  existe et est égale à  $l$
4. la limite d'une somme en nombre *fini* de termes ayant chacun une limite est égale à la somme des limites. Il en résulte que :

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_{pn} = l_p, \forall p = 1, 2, \dots, N \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^N x_{pn} = \sum_{p=1}^N l_p. \quad (1.53)$$

L'inverse est faux : étant donné deux suites chacune divergente, la suite formée avec la somme des deux termes généraux peut être convergente. Par exemple, soit les deux suites de nombres  $x_n = n + \frac{2}{\sqrt{n}}$  et  $x'_n = -n + \frac{3}{n^{1/3}}$  ; aucune de ces deux suites n'a de limite (plus précisément, les  $x_n$  tendent vers  $+\infty$ , les  $x'_n$  vers  $-\infty$ ). En revanche, la suite  $X_n = x_n + x'_n$  a une limite, qui est nulle, parce que les deux suites dont on additionne les nombres deux à deux vont également vite vers l'infini : par l'addition, les deux termes divergents se compensent et  $X_n$  tend vers zéro.

À l'inverse, avec  $x''_n = \sqrt{n}$ , la suite  $X''_n = x_n - x''_n = n + \frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$  tend vers  $+\infty$ , car  $n$  croît beaucoup plus vite que  $\sqrt{n}$  : les deux termes les plus divergents ne sont pas de même nature et ne se compensent pas.

5. la limite d'un produit en nombre *fini* de termes ayant chacun une limite est égale au produit des limites :

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_{pn} = l_p, \forall p = 1, 2, \dots, N \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{p=1}^N x_{pn} = \prod_{p=1}^N l_p. \quad (1.54)$$

En revanche, la limite d'un quotient exige une analyse plus approfondie si l'on obtient une forme indéterminée. Les deux suites  $x_n = \ln n$  et  $x'_n = n^\alpha + 1$  ( $\alpha > 0$ ) sont divergentes, mais la suite  $\frac{x_n}{x'_n}$  est convergente (elle tend vers zéro) alors que  $\frac{x'_n}{x_n}$  diverge.

- Il est parfois utile de prouver la convergence d'une suite sans s'imposer de trouver ce qu'est précisément cette limite. Il existe un critère, dit *critère de Cauchy*, qui énonce des propriétés de convergence liées à la *proximité* des éléments de la suite les uns par rapport aux autres. Très précisément, une suite  $x_n$  est dite *de Cauchy* si, par définition :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n > m \geq N, |x_n - x_m| \leq \varepsilon} \quad (1.55)$$

De toute évidence, une suite convergente satisfait le critère de Cauchy : par exemple, si la suite est croissante, il suffit de prendre  $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $|x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}$  pour que le critère de Cauchy soit satisfait ; les autres cas se traitent de la même façon.

<sup>12</sup>On dit alors que  $x_n$  est *asymptotiquement égale* à  $x'_n$ , et réciproquement.



Clairement, c'est la *réci-proque* du critère de Cauchy qui est intéressante, ce qui conduit à la notion d'*espace complet* : un espace est dit *complet* ssi toute suite de Cauchy y est convergente. Comme on peut montrer que  $\mathbb{R}$  est complet<sup>13</sup>, pour une suite réelle définie dans  $\mathbb{R}$  il y a équivalence entre convergence et satisfaction du critère de Cauchy. ■

### 1.2.3 Suites de fonctions

Dans le droit-fil de ce qui précède, on introduit tout naturellement la notion de suite de *fonctions* : c'est un ensemble de fonctions  $f_n(x)$  d'une certaine variable  $x$ , définie chacune sur un intervalle  $\mathcal{D}_n$ , et paramétrées par l'entier  $n$ . Ou encore : c'est une suite dont chaque élément est une certaine fonction<sup>14</sup> (de  $x$ ). Par exemple :

$$f_n(x) = e^{-nx} \quad , \quad g_n(x) = \tanh nx \quad , \quad h_n(x) = \frac{n}{n+x} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad . \quad (1.56)$$

Les  $f_n$  ont toutes le même intervalle de définition ( $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}$ ) ; il en va de même pour les  $g_n$ . En revanche, pour les  $h_n$   $\mathcal{D}_n = \mathbb{R} \setminus \{-n\}$  ; globalement, la suite est donc seulement définie pour  $x \in \mathcal{D} = \bigcap_n \mathcal{D}_n \equiv \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ .

La notion de suite de fonctions joue un rôle capital puisqu'elle est un intermédiaire obligé permettant de définir des objets mathématiques que l'on peut qualifier d'exotiques, comme les *fonctions généralisées* (aussi appelées *distributions*), quand ils ne sont pas franchement stupéfiants pour l'intuition élémentaire : un exemple célèbre est la fonction de Cantor  $\mathcal{C}(x)$ , qui est nulle si  $x \leq 0$ , égale à 1 si  $x \geq 1$ , continue et non décroissante entre 0 et 1 mais dont la dérivée est pourtant nulle presque partout<sup>15</sup> dans  $[0, 1]$ ...

À nouveau se pose le problème de la convergence, c'est-à-dire de la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Ici, en raison de la présence de la variable  $x$ , les choses sont plus subtiles, et il convient de distinguer plusieurs sortes de convergence :

#### Convergence simple

On dit que la suite  $f_n(x)$  converge *simplement* vers  $f(x)$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$  quelque soit  $x$  donné (on dit aussi que les  $f_n$  convergent vers  $f$  en tout point) :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x, \exists N(\varepsilon, x) \text{ tel que } \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad . \quad (1.57)$$

Le point important est que l'entier  $N$  qui dépend naturellement de  $\varepsilon$ , dépend aussi en général de la valeur  $x$  de la variable. Autrement dit,  $\varepsilon$  étant choisi et ayant trouvé un  $N$  convenable pour certaines valeurs de  $x$ , la condition peut être violée pour d'autres valeurs de  $x$  exigeant un  $N' \neq N$ .

Par exemple, soit la suite  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ . Il est clair que cette suite converge vers la fonction  $f(x) = 0$  si  $x \in [0, 1[$ ,  $f(1) = 0$  : cet exemple montre que la continuité n'est pas forcément préservée par passage à la limite (chaque  $f_n(x)$  est continue, mais la limite  $f(x)$  ne l'est pas). Il est donc utile d'introduire également une autre forme de convergence qui préserve la continuité éventuellement présente pour chaque élément de la suite.

<sup>13</sup>Ce n'est pas le cas de  $\mathbb{Q}$ , ensemble des nombres rationnels. La suite  $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$  est une suite dont tous les termes sont rationnels (chaque terme est une somme finie de nombres rationnels), mais la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , qui existe, est égale à  $\frac{\pi^2}{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Autre exemple : la suite des approximations décimales de  $\sqrt{2}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{Q}$ , qui ne possède pas de limite dans  $\mathbb{Q}$ .

<sup>14</sup>Par opposition, les suites considérées précédemment sont parfois dites *suites numériques* (on retrouvera la même distinction pour les séries).

<sup>15</sup>On a vraiment envie de se dire : *Comment est-ce possible ?*

## Convergence uniforme

La convergence uniforme est une propriété de convergence beaucoup plus forte que la précédente. On dit qu'il y a convergence uniforme<sup>16</sup> si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  indépendant de  $x$  (c'est-à-dire pris n'importe où dans<sup>17</sup>  $\mathcal{D}$ ) tel que  $\forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall n > N, \forall x \in \mathcal{D}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon} \quad (1.58)$$

L'indépendance de  $N$  vis-à-vis de  $x$  a une conséquence importante : quand une suite de fonctions continues converge uniformément, la limite  $f(x)$  est une fonction continue, un fait qui montre la "force" de ce type de convergence, et qui peut se voir géométriquement. Par définition,  $\varepsilon$  étant choisi, la convergence uniforme entraîne que les graphes de toutes les fonctions (continues)  $f_{n > N}(x)$  sont dans une bande de largeur constante  $2\varepsilon$  (indépendante de  $x \in \mathcal{D}$ ) autour du graphe de la fonction  $f(x)$ . Quand  $\varepsilon$  est rendu aussi petit que l'on veut, la bande se pince et devient de plus en plus étroite. Il est alors évident que la limite de  $f_n(x)$  est une fonction continue<sup>18</sup>. Ceci permet de réaliser que la condition de convergence uniforme sur un intervalle  $\mathcal{D}$  est équivalente à dire que  $\text{Max}_{x \in \mathcal{D}} |f_n(x) - f(x)|$  tend vers zéro si  $n \rightarrow +\infty$ . Pour mieux saisir la différence entre convergence simple et la convergence uniforme, considérons deux exemples typiques. Soit d'abord la suite  $f_n(x) = n^{\frac{1}{2}} x^n (1-x)$ ,  $x \in [0, 1]$  ; chacune de ces fonctions a un maximum en  $x_m = \frac{n}{n+1}$ , qui dépend de  $n$  et tend vers 1 si  $n \rightarrow +\infty$ . Le maximum  $f_n(x_m)$  vaut  $n^{-\frac{3}{2}} (\frac{n}{n+1})^n$  et tend donc vers zéro dans la même limite. La conclusion est que la suite  $f_n$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ . Prenons maintenant la suite  $g_n(x) = nx^n(1-x)$ ,  $x \in [0, 1]$ . Les mêmes arguments montrent que cette fois le maximum (survenant toujours en  $x_m$ ) ne s'aplatit pas (la valeur de  $g_n(x_m)$  tend vers 1 si  $n \rightarrow +\infty$ ) : il n'y a donc pas convergence uniforme vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ , la limite étant la fonction discontinue nulle  $\forall x \in [0, 1[$  et égale à 1 en  $x = 1$ .

Notons que la proposition (1.58) (ou ses formulations équivalentes) ne contraint que les fonctions  $f_n$ , pas leurs dérivées. Une fonction peut être confinée sans que sa dérivée le soit : quand  $n$  augmente  $f_n(x)$  peut osciller de plus en plus vite tout en prenant des valeurs de plus en plus petites (c'est le cas de  $\frac{1}{x^2+n^2} \cos nx$ ) ; l'oscillation rapide est le symptôme d'une dérivée prenant de très grandes valeurs.

Par exemple, soit la suite  $f_n(x) = e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chacune de ces fonctions est continue et à dérivées continues ; la convergence vers  $e^{-|x|}$  est uniforme  $\forall x \in \mathbb{R}$ , une fonction qui est certes continue mais dont les dérivées ne le sont pas. Ceci vient du fait que la suite des dérivées a pour terme général :

$$f'_n(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} e^{-\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}, \quad (1.59)$$

dont la limite est  $f'(x) = -\frac{x}{|x|} e^{-|x|}$ , telle que  $f(0\pm) = \mp 1$ . Cette suite converge *simplement* vers  $-\text{sgn} x e^{-|x|}$  ; le défaut de convergence uniforme de la suite des dérivées  $f'_n(x)$ , d'où la limite discontinue, se voit explicitement en formant la différence  $f' - f'_n$  :

$$f'(x) - f'_n(x) = -\frac{x}{|x|} e^{-|x|} \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} e^{|x| - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \right); \quad (1.60)$$

l'écart a une majoration sensée quelque soit  $x$  différent de zéro ( $|f'(x) - f'_n(x)| < \frac{1}{2n^2 x_0^2}$ ,  $\forall x > x_0 > 0$ ), mais pas pour  $x = 0$  : il n'y a pas de majoration indépendante de  $x \in \mathbb{R}$ , donc pas de convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ .

Un autre exemple ; soit la suite de fonctions définie comme suit sur l'intervalle fermé  $[0, 1]$  :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}. \quad (1.61)$$

<sup>16</sup>Bien noter le point important : la relation suivante est vraie *et quel que soit  $x$  dans  $\mathcal{D}$* . La notion de convergence uniforme est donc tributaire de la définition préalable de l'intervalle en  $x$  où ce type de convergence a lieu.

<sup>17</sup>en notant toujours  $\mathcal{D}$  l'intersection de tous les intervalles de définition  $\mathcal{D}_n$ .

<sup>18</sup>Noter que ceci ne dit rien sur la dérivée de la limite  $f(x)$ , voir juste après.

Le graphe de  $f_n(x)$  est un triangle isocèle de base les points d'abscisses 0 et  $\frac{2}{n}$ , dont le sommet est en  $(\frac{1}{n}, 1)$ , suivi du segment  $[\frac{2}{n}, 1]$  de l'axe des  $x$ . Il y a bien convergence simple vers la fonction nulle, mais la différence entre  $f_n$  et la fonction nulle vaut 0 si  $x \in [\frac{2}{n}, 1]$ , et vaut un nombre entre 0 et 1 si  $x \in [0, \frac{2}{n}]$ . Au total, cette différence n'est pas aussi petite que l'on veut, indépendamment de  $x$  pris n'importe où dans l'intervalle de définition : il n'y a donc pas convergence uniforme dans  $[0, 1]$ .

Pour les exemples donnés en (1.56), on a :

$$f_\infty(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} . \quad (1.62)$$

Dans ce cas, on ose à peine parler de fonction pour  $f_\infty(x)$ ... Dans les autres cas :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 1 \quad \forall x . \quad (1.63)$$

Ainsi, gardant  $x$  dans tout  $\mathbb{R}$ , la convergence est simple pour les  $g_n(x)$ , uniforme pour les  $h_n(x)$ . Bien sûr, si on se restreint à  $x \in ]0, +\infty[$ , les  $f_n$  (resp.  $g_n$ ) tendent uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$  (resp vers la fonction égale à 1  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ).

On retiendra :

$$\boxed{\text{convergence uniforme} \implies \text{convergence simple}} \quad (1.64)$$

en notant bien que la réciproque est fautive.

### Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

On peut définir bien d'autres sortes de convergence, reposant chacune sur la notion de *distance*. La distance intuitive utilisée précédemment pour jauger la convergence d'une suite est celle qui vient en premier à l'esprit : c'est simplement la valeur absolue de l'écart entre  $x_n$  et sa limite  $l$ , ou entre  $f_n(x)$  et  $f(x)$ .

En fait, la notion de distance a une portée plus générale, définie conceptuellement par un ensemble de propriétés (c'est un nombre positif, elle satisfait l'inégalité triangulaire, etc.). S'en tenant à cette définition, il est possible de définir différentes distances ; par exemple sur un espace de fonctions  $f_k$ , on peut définir :

$$d_1(f_i, f_j) = \int_{\mathcal{D}} |f_i(x) - f_j(x)| dx , \quad d_2(f_i, f_j) = \int_{\mathcal{D}} |f_i(x) - f_j(x)|^2 dx . \quad (1.65)$$

Tous les  $d_r$  ainsi définis satisfont les relations de définition d'une distance. Dès lors, on définit la convergence en moyenne de  $f_n(x)$  vers  $f(x)$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n < N, d_1(f_n, f) < \varepsilon \quad (1.66)$$

et la convergence en moyenne quadratique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n < N, d_2(f_n, f) < \varepsilon . \quad (1.67)$$

## 1.3 Intégrales

### 1.3.1 Rappels élémentaires

Dans toute la suite, il sera exclusivement question de l'intégrale de Riemann, dont la définition est schématiquement la suivante.

Soit  $x \rightarrow f(x)$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Soit un découpage quelconque de cet intervalle par des points ordonnés d'abscisses  $x_i$  ( $x_{i-1} < x_i$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ ), et soit des points  $\xi_i$  situés dans chacun des intervalles ainsi délimités ( $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ ). Formons alors la somme  $S_N$  :

$$S_N = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \equiv \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \Delta x_i . \quad (1.68)$$

Bien évidemment,  $S_N$  dépend à la fois du nombre d'intervalles, de leur définition précise et du choix des  $\xi_i$ . Le point essentiel est que, si pour des découpages *arbitraires* et pour un nombre de plus en plus grand d'intervalles<sup>19</sup>  $[x_{i-1}, x_i]$  la somme  $S_N$  a une limite, on dit que la fonction  $f$  est intégrable sur le segment  $[a, b]$ . Une autre façon de prendre la limite est de faire tendre vers zéro le plus grand des  $\Delta x_i$ . On note alors :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty, \max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \equiv I , \quad (1.69)$$

$I$  est précisément l'intégrale de Riemann de  $f$  sur le segment  $[a, b]$ . On parle aussi d'intégrale *définie*, pour rappeler l'existence des deux bornes  $a$  et  $b$ , par opposition au symbole  $F(x) = \int f(x) dx$ , qui désigne une primitive de  $f$ , définie à une constante additive près  $C$  :

$$F(x) = \int f(x) dx + C \iff \frac{dF}{dx} = f(x) \quad (1.70)$$

La relation fondamentale est :

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1.71)$$

La constante arbitraire toujours incluse dans la primitive  $F(x)$  s'élimine d'elle-même quand on fait la différence  $F(b) - F(a)$  : le nombre  $I$ , quand il existe, ne dépend pas de la constante additive arbitraire. Noter un point trivial mais important en pratique : le nom donné à la variable d'intégration ( $x$  ci-dessus) est sans aucune espèce d'importance, et on parle traditionnellement de *variable muette* :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\text{toto}) d(\text{toto}) = \int_a^b f(\text{bidule}) d(\text{bidule}) = \dots \quad (1.72)$$

La question de savoir à quelle(s) condition(s) la limite  $I$  existe est une théorie en soi. On peut montrer notamment que  $I$  existe si la fonction est continue : toute fonction continue sur un intervalle fini  $[a, b]$  est intégrable au sens de Riemann<sup>20</sup>.

Géométriquement, ceci est quasi-évident : la somme finie (1.68) est visiblement une approximation de l'aire sous le graphe de  $f(x)$  par une succession de rectangles juxtaposés dont les côtés supérieurs approximent  $f(x)$  par un escalier aux petites marches. Plus le nombre de rectangles augmente, meilleure est l'approximation ; à la limite d'un nombre infini de rectangles, on obtient un nombre unique, précisément l'aire située entre le graphe de  $f(x)$  et l'axe des abscisses, comptée entre les deux abscisses  $a$  et  $b$ . Noter qu'il s'agit de l'aire *algébrique*, négative si  $f(x) < 0$ , positive dans le cas contraire. Pour cette raison, l'intégrale  $\int_0^{2\pi} \sin x dx$  est nulle,  $\int_a^b e^{-x} dx$  ne l'est pas.

Comme exemple trivial, soit la fonction  $f(x) = x$ , dont le graphe est la première bissectrice. Le calcul de toute intégrale définie est immédiat, sachant que la primitive de  $x$  est<sup>21</sup>  $\frac{x^2}{2} + C$  ( $C =$  constante quelconque) ; par exemple :

$$\int_0^b x dx = \left[ \frac{x^2}{2} + C \right]_{x=b} - \left[ \frac{x^2}{2} + C \right]_{x=0} = \frac{b^2}{2} . \quad (1.73)$$

<sup>19</sup>Puisque l'intervalle  $[a, b]$  est fixe, augmenter le nombre d'intervalles entraîne que ceux-ci sont de plus en plus petits. Il faut néanmoins supposer en plus que le plus grand d'entre eux tend vers zéro.

<sup>20</sup>Plus généralement, toute fonction continue par morceaux est intégrable au sens de Riemann.

<sup>21</sup>La primitive de  $x^\alpha$  est  $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ .

C'est bien l'aire du triangle délimité par le segment  $[0, b]$  de l'axe des  $x$  et la portion de première bissectrice (c'est la moitié de l'aire du carré de côté  $b$ ).

L'intégrale (définie ou non) possède un certain nombre de propriétés, notamment c'est une opération *linéaire* ; ceci veut dire que  $\lambda$  et  $\mu$  étant deux constantes quelconques, on a :

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx . \quad (1.74)$$

On dispose également d'une relation de Chasles ; si toutes les intégrales existent, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx , \quad (1.75)$$

quel que soit le nombre  $c$  (situé entre  $a$  et  $b$  ou non).

Visiblement, l'intégrale définie ( $a < b$ ) d'une fonction positive est un nombre positif. Ceci permet d'établir l'inégalité dite de Schwartz :

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} \times \sqrt{\int_a^b [g(x)]^2 dx} . \quad (1.76)$$

Ce résultat s'obtient en partant du fait que  $\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx \geq 0 \forall \lambda$  ( $a < b$ ). Il s'agit d'un trinôme du second degré en  $\lambda$ , dont le coefficient du terme en  $\lambda^2$  est positif. Il suffit alors d'écrire que le discriminant est négatif pour obtenir l'inégalité (1.76).

En outre, si  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$  (avec  $a < b$ ), alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ . Enfin, il est parfois utile de recourir à la formule de la moyenne ; soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur l'intervalle  $[a, b]$ , où  $g$  a un signe donné. Alors :

$$\boxed{\exists c \in [a, b] \text{ tel que } \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx} \quad (\text{formule de la moyenne}) \quad (1.77)$$

Les techniques de calcul d'une intégrale sont très variées : connaissance immédiate d'une primitive, changement de variable d'intégration, intégration par parties, relations fonctionnelles ou de récurrence,...

En pratique (notamment en Physique), toujours en restant dans le cadre de l'intégrale de Riemann, on est souvent conduit vers des généralisations de la définition élémentaire précédente. Les plus importantes correspondent aux situations suivantes :

- la fonction n'est pas continue, et possède des singularités (discontinuités, divergences, ...) dans l'intervalle d'intégration
- l'une des bornes  $a$  ou  $b$  est infinie, ou les deux le sont

Dans ces deux cas, l'usage est de parler d'intégrales *impropres*. Ces points sont discutés séparément ci-dessous.

Enfin, la fonction à intégrer dépend parfois d'un certain paramètre  $\lambda$ ,  $f(x; \lambda)$ , de sorte que  $I$  devient une fonction de ce paramètre  $I(\lambda)$ . Une question fréquente est de savoir si, quand  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  (avec  $f(x; \lambda)$  continue en  $\lambda_0$ ), la limite de l'intégrale est l'intégrale de la limite, soit  $I(\lambda \rightarrow \lambda_0) \stackrel{?}{=} \int_a^b f(x; \lambda_0) dx$ .

### 1.3.2 Intervalle d'intégration fini : singularités intégrables

Le cas le plus important en pratique est celui où la fonction à intégrer tend vers l'infini quand  $x$  tend vers un certain  $x_0$  fini situé dans l'intervalle d'intégration. Il est évident que l'on ne perd pas de généralité en supposant que  $x_0 = 0$ , cas auquel on peut toujours se ramener en effectuant le changement de variable  $X = x - x_0$  et en raisonnant avec la variable  $X$ . La question est de savoir si, malgré la singularité, l'intégrale est un nombre *fini* ou si, au contraire, elle est divergente. Il n'est pas nécessaire de savoir calculer l'intégrale explicitement pour répondre à cette question, heureusement. La question est de savoir si, une fois la bonne limite à prendre étant précisée, l'intégrale converge ou non. Une intégrale  $\int_{\mathcal{D}} f(x) dx$  sera dite absolument convergente si  $\int_{\mathcal{D}} |f(x)| dx$  converge. Si  $\int_{\mathcal{D}} f(x) dx$  converge alors que  $\int_{\mathcal{D}} |f(x)| dx$  ne converge pas, l'intégrale est dite<sup>22</sup> *semi-convergente*.

Afin de rester au niveau concret, traitons les cas les plus fréquents, en commençant par considérer la situation où la divergence de  $f(x)$  se produit en l'une des bornes d'intégration :

$$\int_0^b f(x) dx = ??? \quad |f(x)| \rightarrow \infty \quad \text{si } x \rightarrow 0 . \quad (1.78)$$

#### 1. Divergence algébrique

On entend par là que près de  $x = 0$ , la fonction à intégrer se comporte comme  $x^{-\alpha}$  où  $\alpha$  est un exposant positif :

$$f(x) \simeq x^{-\alpha} , \quad x \simeq 0 . \quad (1.79)$$

Le signe  $\simeq$  signifie que la fonction est à *peu près* égale à  $x^{-\alpha}$ , le "peu" pouvant être très grand, et même divergent dans la limite  $x \rightarrow 0$ . En termes plus précis, on pourrait tout à fait avoir :

$$f(x) = x^{-\alpha} + Cx^{-\beta} \quad (0 < \beta < \alpha) , \quad (1.80)$$

l'important étant que  $\beta$  est plus petit que  $\alpha$  (si  $\beta < 0$ , aucun problème !). En définitive dire que la fonction se comporte comme  $x^{-\alpha}$ , c'est supposer que :

$$f(x) = x^{-\alpha}[1 + \eta(x)] , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0 ; \quad (1.81)$$

avec (1.80),  $\eta(x) = Cx^{\alpha-\beta}$ , qui tend bien vers zéro quand  $\alpha > \beta$ .

Sans s'encombrer de détails inessentiels, le raisonnement repose sur la simple considération de la fonction élémentaire  $x^{-\alpha}$ , dont une primitive est  $\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$ . Soit donc à déterminer ce que vaut l'intégrale  $\int_0^b f(x) dx$ , étant entendu que la seule difficulté se situe à l'origine. On décompose en deux parties :

$$\int_0^b f(x) dx = \int_0^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx . \quad (1.82)$$

$x_1$  est choisi de sorte que l'approximation (1.79) soit correcte ; la deuxième intégrale vaut ce qu'elle vaut, et ne pose pas de problème. Pour la première, on écrit :

$$\int_0^{x_1} f(x) dx \simeq \int_0^{x_1} x^{-\alpha} dx = \left[ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_0^{x_1} . \quad (1.83)$$

La borne supérieure donne  $\frac{1}{1-\alpha}x_1^{1-\alpha}$ , qui est une quantité finie. En revanche, la borne inférieure (nulle !) donne zéro si  $\alpha < 1$ , l'infini si  $\alpha > 1$ . Visiblement, la divergence de  $f(x)$  est d'autant plus violente que  $\alpha$  est grand, et on trouve finalement un résultat qualitatif intuitivement évident : les divergences trop sévères ne sont pas intégrables.

Par exemple, la fonction  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  diverge à l'origine, mais est intégrable car elle diverge *lentement* :

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{1}{2}} \right]_0^b = 2\sqrt{b} . \quad (1.84)$$

<sup>22</sup>On emploie la même terminologie pour les séries, voir plus loin.

Il en va de même pour  $\int_0^b \frac{\tanh x}{x^{5/4}} dx$ , puisque la fonction à intégrer se comporte comme  $x^{-\frac{1}{4}}$ , qui diverge encore plus lentement que  $x^{-\frac{1}{2}}$  (qui est intégrable). En revanche, les fonctions  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{1}{x^3}$ , ... ne sont pas intégrables à l'origine, car elles divergent trop vite.

Le cas particulier  $\alpha = 1$  se traite par référence à la fonction logarithmique :

$$\int_0^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^b = \ln b - \ln 0 = +\infty . \quad (1.85)$$

En définitive, une divergence algébrique est intégrable si  $\alpha < 1$ , et donne l'infini si  $\alpha \geq 1$ .

## 2. Divergence logarithmique

Supposons que  $f(x) \simeq \ln x$  près de l'origine ; c'est une fonction qui tend vers  $-\infty$  si  $x$  tend vers  $0+$ . À nouveau, il suffit de raisonner avec la primitive connue :

$$\int \ln x dx = x \ln x - x . \quad (1.86)$$

Il en résulte que :

$$\int_0^b f(x) dx \simeq \int_0^b \ln x dx = [x \ln x - x]_0^b . \quad (1.87)$$

Sachant que  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$ , on trouve immédiatement :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_0^b \ln x dx = b \ln b - b , \quad (1.88)$$

de sorte que l'intégrale est finie. La divergence logarithmique est une divergence ultra-douce, et peut d'ailleurs être considérée comme une divergence algébrique  $x^{-\alpha}$  avec  $\alpha = 0+$ .

Examinons maintenant le cas où la fonction à intégrer présente une singularité à l'intérieur de l'intervalle d'intégration, en un point que l'on peut toujours considérer comme  $x = 0$ . Avec  $a < 0 < b$ , il s'agit donc d'analyser le cas :

$$\int_a^b f(x) dx = ??? , \quad |f(x)| \rightarrow \infty \text{ si } x \rightarrow 0 \quad (a < 0 < b) . \quad (1.89)$$

On généralise alors l'intégrale en la décomposant en deux parties<sup>23</sup> "régulières" ( $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon' > 0$ ) :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[ \int_a^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon'}^b f(x) dx \right] ; \quad (1.90)$$

il est essentiel de noter que les deux limites sur  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  doivent être prises *indépendamment* l'une de l'autre. Avec cette définition, la fonction  $\frac{1}{x}$  n'est pas intégrable à l'origine, mais  $|x^{-\frac{1}{3}}|$  l'est.

Par exemple, soit l'intégrale :

$$\int_0^b \frac{\sin \pi x}{x - \alpha} dx \quad (\alpha, b \text{ positifs}) . \quad (1.91)$$

Cette intégrale est bien définie si  $b < \alpha$ , ne l'est pas si  $\alpha < b$ , sauf si  $\alpha$  est un entier (pourquoi ?).

Il est toutefois très utile en Physique de définir des procédés permettant de donner un sens à certaines intégrales divergentes au sens ci-dessus, et on parle alors de *régularisation*. Un cas très important pour la Physique est celui où la fonction a une divergence du genre  $\frac{1}{x-x_0}$ , cas pour lequel on introduit la *partie principale de Cauchy*, notée  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ , ou encore  $f \frac{1}{x} dx$  (comme le *forte* en écriture musicale). Clairement, on peut toujours définir cette régularisation en prenant  $x_0 = 0$  ; dans ces conditions :

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} \equiv \int \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[ \int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx \right] \quad (a < 0 < b) . \quad (1.92)$$

<sup>23</sup>Tant que  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont *finis*, chaque intégrale est finie.

Autrement dit, on supprime *symétriquement* le point de difficulté en faisant le choix particulier  $\varepsilon' = \varepsilon$  dans (1.90). L'efficacité de la régularisation est évidente géométriquement : ce faisant, on retire deux contributions divergentes de signes opposés qui se compensent exactement quel que soit  $\varepsilon$  fini ; analytiquement, faisant le changement de variable  $x = -x'$  dans la première intégrale<sup>24</sup> :

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx = \int_{-a}^{\varepsilon} \frac{1}{(-x')} (-dx') + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx = [\ln \varepsilon - \ln(-a)] + [\ln b - \ln \varepsilon] ; \quad (1.93)$$

les deux  $\ln \varepsilon$  s'annihilent mutuellement quel que soit  $\varepsilon$  fini, de sorte que l'on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln b - \ln(-a)] = \ln b - \ln(-a) . \quad (1.94)$$

Il s'agit bien d'une *régularisation*, puisque sans cette définition particulière,  $\frac{1}{x}$  n'est pas intégrable au sens défini en (1.90).

Un tel procédé peut paraître artificiel à première vue ; en réalité, c'est un principe physique (par exemple le Principe de causalité) qui exige de s'y prendre de la sorte. Cette affirmation exprime une règle générale : le plus souvent, en Physique, quand un infini surgit, c'est à la suite d'une radicalisation excessive de la formalisation d'un problème. L'analyse plus fine alors nécessaire repose sur un préalable retour amont, fondé sur l'invocation des grands principes. Ceci permet en général de soigner les pathologies, et de choisir la bonne régularisation, pertinente pour le problème physique analysé.

### 1.3.3 Intervalle d'intégration infini : conditions d'intégrabilité

Le même type de question se pose pour les intégrales du type :

$$I_{\infty} = \int_a^{+\infty} f(x) dx , \quad I_{-\infty} = \int_{-\infty}^a f(x) dx , \quad (1.95)$$

que l'on rencontre très souvent en Physique – avec toujours en tête ce que l'infini signifie pour le Physicien. Dans les deux cas, l'idée est d'analyser le comportement de  $f(x)$  à l'infini, et de le comparer avec des fonctions simples dont une primitive est connue<sup>25</sup>.

Les écritures (1.95) doivent d'ailleurs être précisées. En ce qui concerne l'intégrale  $I_{\infty}$ , on la définit comme :

$$I_{\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{X \rightarrow +\infty} I_X , \quad I_X \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^X f(x) dx \quad (1.97)$$

Supposons que  $f(x) \simeq x^{-\alpha}$  quand  $x$  est très grand ; la primitive de cette fonction simple est  $\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$  ; il en résulte que  $I_X$  se comporte comme  $X^{1-\alpha}$  à l'infini : l'intégrale diverge si  $1 - \alpha > 0$ , soit si  $\alpha < 1$ . Si  $\alpha = 1$ , la primitive est  $\ln x$ , qui diverge également. En définitive, une fonction se comportant comme  $x^{-\alpha}$  n'est intégrable que si  $\alpha > 1$ . Ainsi, la fonction  $\frac{1}{1+x^2}$  est intégrable puisque l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  est convergente (et vaut  $\frac{\pi}{2}$ ),  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha+x^2} dx$  aussi ( $\forall \alpha$ ), alors que  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$  diverge<sup>26</sup>. De la même façon,  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{1+x^2} dx$  est convergente : près de  $x = 0$ , il n'y a pas de souci puisque l'intégrand tend vers zéro plus vite que toute puissance positive de  $x$  ; à l'infini, il est borné par  $\frac{1}{1+x^2}$ , qui est intégrable.

On retiendra l'idée intuitive : avec un intervalle d'intégration infini, il faut que la décroissance à zéro soit assez rapide<sup>27</sup> :  $\int_{a>0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  diverge car  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  va vers zéro trop lentement. Ceci est en quelque sorte l'affirmation

<sup>24</sup>Se souvenir que  $a$  est négatif :  $a < 0 < b$ .

<sup>25</sup>Si on le souhaite, on peut toujours se ramener au problème précédent en effectuant le changement de variable  $x = \frac{1}{X}$ . En posant  $f(x) = g(X)$ , on a :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{a}} g(X) \frac{dX}{X^2} , \quad (1.96)$$

et la question revient à élucider le comportement dans voisinage de l'origine en  $X$  selon les méthodes exposées dans la sous-section 1.3.2.

<sup>26</sup>Noter à nouveau qu'il est inutile de *calculer* l'intégrale pour le savoir ! Ici, toutefois, on peut confirmer le résultat en notant que  $\int_0^X \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(1+X^2)$ .

<sup>27</sup>Se souvenir par exemple de  $\int_1^X \frac{1}{x} dx = \ln X \dots$



duale de ce qui a été dit à propos d'une divergence en  $x = 0$  – où la fonction ne doit pas diverger trop vite pour que l'intégrale soit convergente. On retiendra aussi :

L'affirmation “la fonction à intégrer tend vers zéro, donc l'intégrale converge” est une ânerie

Dans le cas où  $f(x)$  a un signe constant (au moins à partir d'un certain  $x_0$ ), on peut énoncer une condition *nécessaire* de convergence : l'intégrale ne peut être convergente que si la limite de  $f(x)$  à l'infini est nulle<sup>28</sup>. D'un autre côté, si  $f(x)$  a un signe variable (quand la fonction oscille de part et d'autre de zéro), la condition  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  n'est pas nécessaire pour qu'il y ait convergence. Par exemple, l'intégrale (dite de Fresnel)  $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$  existe et est finie<sup>29</sup>, alors que  $\cos x^2$  n'a pas de limite du tout quand  $x \rightarrow +\infty$ . Intuitivement, l'intégrale est finie car la fonction oscille de plus en plus vite : les contributions successives à l'intégrale sont alternativement positives et négatives, oscillent également très vite et, au total, leur somme donne un nombre fini.

Quand la fonction n'a pas un comportement en monôme à l'infini ou quand on ne sait pas faire facilement un développement limité dans la variable  $\frac{1}{x}$ , une technique consiste à chercher des majorations avec des fonctions plus simples : une intégrale croissante en  $X$  et majorée par une intégrale convergente est convergente (ainsi,  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$  converge) ; une intégrale minorée par une intégrale divergente est divergente ( $\int_0^{+\infty} \frac{\coth x}{1+x} dx$  diverge).

En ce qui concerne  $I_{\infty\infty}$ , la définition précise est :

$$I_{\infty\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{X \rightarrow +\infty} \lim_{X' \rightarrow \infty} \int_{-X}^{X'} f(x) dx \equiv I_{XX'} \quad (1.98)$$

où, à nouveau, les deux limites doivent être prises indépendamment l'une de l'autre. Les mêmes arguments que ci-dessus montrent alors que  $\frac{1}{1+x^2}$  est intégrable puisque la limite de  $I_{XX'}$  existe (et vaut  $\pi$ ). Au contraire,  $\frac{x}{1+x^2}$  n'est pas intégrable au sens ci dessus, car l'intégrale  $I_{XX'}$  se comporte comme  $\frac{1}{2}(\ln X' - \ln X)$ , qui n'a pas de limite quand les limites sur  $X$  et  $X'$  sont prises *indépendamment*. En revanche, tout comme pour la partie principale de Cauchy, il est parfois possible de trouver un argument physique permettant de régulariser l'intégrale en adoptant la définition suivante :

$$(I_{\infty\infty})_{\text{rég}} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X f(x) dx \quad (1.99)$$

Avec cette régularisation,  $\frac{x}{1+x^2}$  devient intégrable, puisque de toute évidence l'intégrale  $\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X \frac{x}{1+x^2} dx$  est finie – elle est même nulle, puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique autour de l'origine, quel que soit  $X$  fini. De la même façon l'intégrale  $\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X \frac{x}{1+x+x^2} dx$  (qui n'est pas nulle) est finie. En revanche,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2(1+x^2)}{1+x^4} dx$  n'est pas régularisable de cette façon, tout comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \tanh x}{1+x^2} dx$ , puisque les termes divergents sont de même signe.

Une dernière définition : on dit qu'une fonction est absolument intégrable si elle est intégrable en module, c'est-à-dire si  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  existe. Comme le module de l'intégrale est inférieur ou égal à l'intégrale du module :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad (1.100)$$

<sup>28</sup>On retrouvera par la suite une condition nécessaire analogue pour le terme général  $u_n$  d'une série à termes positifs afin que celle-ci converge.

<sup>29</sup>On sait d'ailleurs la calculer, elle vaut  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . Sans se soucier de sa valeur, on peut montrer la convergence comme suit. Partant de  $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ , on fait le changement de variable  $x^2 = X$ , puis une intégration par parties, ce qui fait apparaître l'intégrale  $\int_0^{+\infty} X^{-3/2} \sin X dX$ . L'intégrand est en  $X^{-1/2}$  à l'origine, donc sommable. À l'infini, l'intégrand est borné en module par  $X^{-3/2}$ , qui est sommable.

une fonction absolument intégrable est intégrable (mais la réciproque est fautive) :

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad \implies \quad \left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| < +\infty; \quad (1.101)$$

Ainsi,  $\frac{\sin x}{x}$  est intégrable<sup>30</sup>, mais pas absolument intégrable : ce sont les oscillations du sinus autour de zéro qui permettent à l'intégrale d'être convergente (très lentement, certes, faire l'expérience numériquement). Une telle intégrale est parfois dite *semi-convergente*.

### 1.3.4 Exemples où l'intégrale de la limite n'est pas la limite de l'intégrale

Il arrive très souvent en Physique que la fonction à intégrer dépende d'un paramètre  $\lambda$ ,  $f(x; \lambda)$ . L'intégrale (supposée non-impropre pour ne pas accumuler les difficultés)  $\int_a^b f(x; \lambda) dx$  est donc<sup>31</sup> *a priori* aussi une fonction de  $\lambda$ . Une question très naturelle est la suivante : si le paramètre  $\lambda$  tend vers une certaine valeur  $\lambda_0$ , l'intégrale est-elle égale à l'intégrale de la fonction<sup>32</sup>  $f(x; \lambda_0)$  ? En d'autres termes, l'égalité suivante :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_a^b f(x; \lambda) dx = \int_a^b f(x; \lambda_0) dx \quad (1.102)$$

est-elle vraie ? Ou encore : à quelle(s) condition(s) la limite de l'intégrale est-elle l'intégrale de la limite ? La réponse dépend à nouveau de la nature de la convergence de  $f(x; \lambda)$  vers sa limite : si la convergence est uniforme, alors la réponse est oui.

Il est facile de construire des exemples où l'égalité (1.102) est fautive. Soit par exemple la gaussienne  $G_\sigma(x)$  :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1.103)$$

dont on peut montrer<sup>33</sup> que l'intégrale entre  $\pm\infty$  vaut 1, quelle que soit la valeur du paramètre  $\sigma$ , qui mesure la finesse du graphe ; plus  $\sigma$  est petit, plus la courbe est fine et pointue, mais dans tous les cas l'aire sous le graphe est égale à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(x) dx = 1 \quad \forall \sigma > 0 \quad (1.104)$$

En vertu de ceci, on a :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(x) dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0} 1 = 1; \quad (1.105)$$

au contraire, la limite  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} G_\sigma(x)$  est la fonction nulle partout sauf en  $x = 0$ , où elle vaut  $+\infty$ . Il est bien clair que l'intégrale ordinaire de cette fonction n'est pas vraiment définie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\sigma \rightarrow 0} G_\sigma(x) dx = ??? \dots \quad (1.106)$$

On verra par la suite comment ces considérations permettent de définir la "fonction" de Dirac  $\delta(x)$ , la gaussienne ci-dessus n'en étant que l'un des très nombreux précurseurs.

<sup>30</sup>On peut montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

<sup>31</sup>Dire que si l'intégrand dépend d'un paramètre, alors l'intégrale est une fonction de ce paramètre est une affirmation de bon sens. Toutefois, il n'en va pas toujours ainsi : l'intégrale peut fort bien avoir une valeur indépendante du paramètre (c'est le cas de certaines intégrales dans le plan complexe des fonctions dites *analytiques*, voir cours de L3).

Par exemple  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x+z_0}$  vaut  $+i\pi$  quel que soit le complexe  $z_0$ , pourvu que sa partie imaginaire est négative : tant que  $z_0$  se promène dans le demi-plan inférieur, la valeur de l'intégrale ne dépend pas de l'endroit où se trouve  $z_0$  ; si  $z_0$  est dans le demi-plan supérieur, la même intégrale vaut  $-i\pi$ . Au total, l'intégrale dépend bien effectivement de  $z_0$ , mais seulement par morceaux : il en va de même de l'intégrale (dite de Dirichlet)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , qui vaut  $+1$  si  $\lambda > 0$ , et  $-1$  si  $\lambda < 0$ . On peut également construire des exemples où l'intégrale ne dépend pas du tout du paramètre qui pourtant figure explicitement dans l'intégrand...

<sup>32</sup>On suppose bien sûr  $f(x; \lambda)$  continue en  $\lambda_0$ .

<sup>33</sup>par exemple par une intégration dans le plan en coordonnées polaires.

## 1.4 Séries

Étant donné une suite  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on définit sa somme partielle  $S_N$  comme la somme de ses  $N$  premiers termes :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} u_n, \quad (1.107)$$

ou<sup>34</sup> :

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n, \quad (1.108)$$

si on décide de numérotter les termes à partir de 1. Une question importante est d'élucider ce que fait la suite  $S_N$  quand  $N \rightarrow +\infty$  : par définition, on dit que c'est étudier les propriétés de convergence de la série de terme général  $u_n$ .

Une série est dite *alternée* si ses termes sont alternativement positifs et négatifs, soit si  $u_n u_{n+1} < 0 \forall n$ . Elle est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si  $u_{n+1} > u_n$  (resp.  $u_{n+1} < u_n$ ).

### 1.4.1 Convergence d'une série

Considérons donc la suite des sommes partielles d'une série de terme général  $u_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  :

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots \quad (1.109)$$

Si la limite de cette suite existe, est finie et vaut  $S$ , on l'appelle somme de la série des  $u_n$  :

$$\exists S, S \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \iff S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \quad (1.110)$$

En pareil cas, on dit que la série des  $u_n$  est *convergente*. Lorsque la limite n'existe pas, ou qu'elle est infinie, la série est dite non-convergente. Lorsque la limite est infinie, on dit souvent que la série est *divergente*. Il est parfois commode d'introduire le *reste* de la série : le reste de rang  $N$ ,  $R_N$ , est la somme :

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n; \quad (1.111)$$

clairement, une série est convergente ssi tout reste  $R_N$  est fini. Il est important de noter que pour une série à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang), la suite des sommes partielles est une suite *croissante*.

L'exemple le plus simple d'une série est sans doute la somme infinie d'une progression géométrique, laquelle est d'ailleurs l'une des séries de référence (tout comme les séries de Riemann et de Bertrand, voir ci-dessous). Soit  $u_n = q^n$  où  $q$  est un nombre (réel ou complexe d'ailleurs) et  $n \in \mathbb{N}$ . La somme partielle  $S_N$  est, si  $q \neq 1$  :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad (1.112)$$

bien évidemment, si  $q = 1$ , on a trivialement<sup>35</sup>  $S_N = N$ . La limite de la suite  $S_N$  s'obtient alors immédiatement : si  $|q| < 1$ , alors  $S_{N \gg 1} \simeq \frac{1}{1-q}$  ; si  $|q| > 1$ ,  $S_{N \gg 1} \simeq \frac{-q^N}{1-q}$ , qui tend vers l'infini, en oscillant d'ailleurs entre des valeurs positives et négatives si  $q < 0$ . En résumé :

$$S \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{si } |q| < 1 \\ ??? & \text{si } |q| \geq 1 \end{cases}. \quad (1.113)$$

<sup>34</sup>On choisira une convention ou une autre selon le contexte, et juste pour la commodité.

<sup>35</sup>C'est aussi, heureusement, la limite  $\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^N}{1 - q}$

On a déjà observé que si  $q = 1$ ,  $S = +\infty$  puisque  $S_N = N$  ; pour  $q = -1$ ,  $S_N = 0$  si  $N$  est pair et  $S_N = 1$  si  $N$  est impair : la somme de la série oscille entre ces deux valeurs, et n'a donc toujours pas de limite<sup>36</sup>. En définitive, la série géométrique est convergente si  $|q| < 1$ , divergente si  $|q| \geq 1$ .

Clairement, si  $u_n$  et  $v_n$  définissent deux séries toutes deux convergentes, la série somme formée avec  $u_n + v_n$  est aussi convergente (il en va de même si l'on additionne un nombre fini de séries convergentes).

Dans toute série, modifier l'ordre d'un nombre fini de termes  $u_n$  ne change pas la nature de la série, convergente ou divergente puisque, ce faisant, on ne "perturbe" qu'un nombre fini de quantités finies.

Il est facile d'énoncer une condition nécessaire de convergence : pour qu'une série converge, il faut que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . En effet,  $u_n = S_N - S_{N-1}$  est la différence entre les deux sommes partielles  $S_N$  et  $S_{N-1}$  ; par définition de la convergence d'une série (la suite des sommes partielles a une limite), il faut bien que  $\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N - S_{N-1}| = 0$ . Cette condition n'est pas suffisante, comme on le verra par la suite en citant les exemples de la série harmonique (qui diverge) et de la série harmonique alternée (qui converge, mais avec une lenteur désespérante). En tout cas, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , il est sûr que la série diverge :

$$\left[ \text{la série converge} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \right], \quad \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \implies \text{la série diverge} \right] \quad (1.114)$$

Se souvenir que quand on empile une infinité d'infiniment petits, tout peut arriver : leur somme peut être finie ou infinie ; à l'inverse, quand on additionne en nombre infini des quantités ayant une limite finie (non-nulle), la limite ne peut pas exister, et est infinie si toutes les quantités ont le même signe.

L'affirmation " $u_n$  tend vers zéro, donc la série converge" est également une ânerie

## Règles usuelles permettant d'élucider la convergence d'une série

On connaît des règles qui permettent de trancher (pas toujours complètement) la question de la convergence d'une série.

### 1. Majoration, minoration

Il est évident que si une série a tous ses termes positifs et que chacun d'entre eux est majoré par le terme général d'une série convergente, alors la première série est aussi convergente (la suite des sommes partielles  $S_N$  est une suite croissante bornée). De même dans l'autre sens : si tous les termes (positifs) d'une série sont minorés par ceux (également positifs) d'une série divergente, alors la première série est également divergente.

### 2. Règle de d'Alembert

Si dans une série à termes positifs le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  a une limite  $k$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors

- si  $k < 1$ , la série converge,
- si  $k > 1$ , la série diverge.

La démonstration est élémentaire et procède par comparaison avec la série géométrique. Schématiquement, l'argument est le suivant. Si un nombre  $k < 1$  existe, on peut trouver un autre nombre  $q$  situé entre  $k$  et 1 ( $k < q < 1$ ). Par définition de la limite, et puisque  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers  $k$ ,  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - k \right|$  est, à partir d'un certain rang, plus petit que tout nombre positif choisi à l'avance, en particulier le nombre positif  $q - k$  :

$$\forall n \geq N, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - k \right| < q - k ; \quad (1.115)$$

Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - k > 0$ , on a  $0 < k < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q < 1$ , si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - k < 0$ , alors  $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < k < q < 1$  ; ainsi, quel que soit le signe de la différence  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - k$ , le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  (positif par hypothèse) est plus petit que  $q$ ,

<sup>36</sup>Quand  $q$  est complexe, l'oscillation se fait selon une certaine phase variable  $\alpha$ .

lui-même inférieur à 1 ; puisque tous les  $u_n$  sont positifs, on a  $u_{n+1} < qu_n$ ,  $u_{n+2} < qu_{n+1} < q^2u_n$ , etc. Au total, le reste de la série,  $R_N = \sum_{n \geq N} u_n$ , est borné supérieurement par  $u_N(1 + q + q^2 + \dots)$ , une série qui converge puisque  $q < 1$ . C'est avec la règle de d'Alembert que l'on peut démontrer la convergence<sup>37</sup>  $\forall a \in \mathbb{R}_+$  de la série  $u_n = \frac{a^n}{n!}$ .

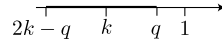


Figure 1.2: Illustration du fondement de la règle de d'Alembert quand  $k < 1$ . Si, à partir d'un certain rang, le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est dans le segment en gras, il est borné supérieurement par  $q < 1$  : le reste est borné supérieurement par une série convergente, la série converge.

À l'inverse, si  $k > 1$ , le même type d'argument montre que les sommes partielles sont cette fois bornées inférieurement par une série divergente, et la série diverge.

D'un autre côté, cette règle ne dit rien sur le cas où  $k = 1$ , qui doit faire l'objet d'une étude particulière au cas par cas : selon les séries, on peut avoir convergence ou divergence. Par exemple, pour  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ . On peut néanmoins conclure que la série est convergente en observant que l'on a l'identité  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  : dans la somme partielle  $S_N$ , presque tous les termes se compensent deux à deux et il reste seulement  $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$ , qui tend vers 1. Au contraire, pour la série harmonique  $u_n = \frac{1}{n}$ , on a aussi  $k = 1$ , mais la série diverge<sup>38</sup>.

### 3. Règle de Cauchy

Si dans une série à termes positifs la quantité  $\sqrt[n]{u_n}$  a une limite  $k$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors

- si  $k < 1$ , la série converge,
- si  $k > 1$ , la série diverge.

À nouveau, la démonstration repose sur la comparaison avec la série géométrique. En suivant le même argument que pour la règle de d'Alembert, on voit qu'il existe un nombre  $q$ ,  $0 < k < q < 1$ , tel que, à partir d'un certain rang  $N$ , on a  $\sqrt[n]{u_n} < q$  quel que soit le signe de  $\sqrt[n]{u_n} - k$ , d'où  $u_n < q^n$ ,  $\forall n \geq N$  : le reste  $R_N$  est majoré par une série géométrique convergente, donc la série converge. Ainsi on montre que la série  $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$  est convergente puisque  $\sqrt[n]{u_n}$  tend vers  $\frac{1}{2}$ .

Comme auparavant, le cas  $k = 1$  est spécial et doit être considéré comme tel à chaque fois ; à nouveau il peut y avoir convergence ou divergence, selon la nature précise de la série. Pour  $u_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n$ , la règle de Cauchy ne permet pas de conclure (cette série est toutefois divergente).

### 4. Comparaison avec une intégrale<sup>39</sup>

Pour une série à termes positifs non croissants ( $u_n \geq u_{n+1} \forall n$ ), un dessin montre immédiatement la proximité entre la fonction ponctuelle  $f_n = u_n$  et sa prolongée  $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} u_{n \rightarrow x}$ , ce qui signifie que  $f(x)$  a pour expression celle de  $u_n$  où on remplace  $n$  par  $x$ . Par exemple, si  $u_n = \cosh n^{-\frac{1}{3}} e^{-\ln(\arctan \sqrt{n^2+n^{-1}})}$ ,  $f$  est la fonction  $f(x) = \cosh x^{-\frac{1}{3}} e^{-\ln(\arctan \sqrt{x^2+x^{-1}})}$  ;  $u_n$  étant non croissant et positif,  $f(x)$  l'est tout autant. Sur la fig. 1.3, on voit géométriquement que :

$$u_2 + u_3 + \dots + u_N < \int_1^N f(x) dx < u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1} ; \quad (1.117)$$

Soit maintenant l'intégrale  $I = \int_1^{+\infty} f(x) dx$  (se souvenir que  $f(x)$  est une fonction positive non croissante) ; alors :

<sup>37</sup>Cette série converge en fait  $\forall a \in \mathbb{C}$ .

<sup>38</sup>Voir (1.118). On peut dire qu'il s'en faut d'un rien que la série harmonique converge : il suffit de retrancher  $\ln N$  (c'est-à-dire pas grand'chose) à la somme harmonique  $S_N$  pour que la limite soit finie ; elle est égale à un certain nombre, appelé *constante d'Euler*, noté  $\gamma$ . On peut en effet montrer que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \ln N\right) \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\,159\,335\,939 \dots \quad (1.116)$$

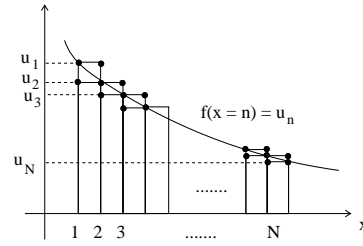


Figure 1.3: Illustration des inégalités (1.117)).

- si  $I < +\infty$ , la série converge,
- si  $I = \infty$ , la série diverge.

C'est ainsi que l'on peut démontrer que la série harmonique diverge, puisque :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx \quad (1.118)$$

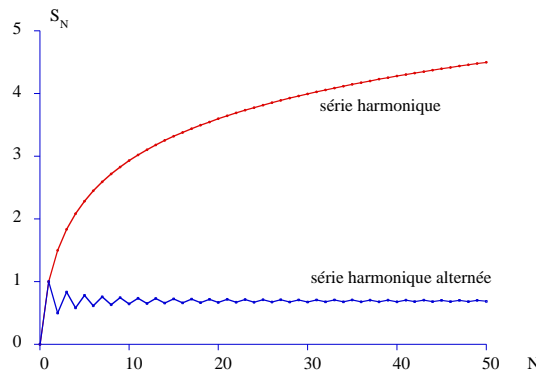


Figure 1.4: Variations en fonction de  $N$  de somme  $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$  pour la série harmonique  $u_n = \frac{1}{n}$ , qui est divergente, et pour la série harmonique alternée,  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , qui est convergente (et a pour limite  $\ln 2 \simeq 0.693$ ).

L'intégrale vaut  $\ln(N+1)$  et tend vers l'infini si  $N \rightarrow +\infty$  : la série harmonique est donc divergente. Plus généralement, compte tenu de ce que l'on a vu pour les intégrales du genre  $\int_{a>0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ , la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  converge si  $\alpha > 1$ , diverge dans les autres cas. Évidemment, la convergence est d'autant plus rapide que l'exposant  $\alpha$  est grand.

##### 5. Comparaison avec des séries de référence

Les plus connues sont :

- les séries de Riemann  $R_\alpha$ , de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$ , qui convergent  $\forall \alpha > 1$ ,
- les séries de Bertrand  $B_\alpha$ , de terme général  $\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ , qui convergent  $\forall \alpha > 1$ .

Le  $\ln N$  n'est pas grand'chose :  $10^{23}$  est un nombre gigantesque, mais  $\ln 10^{23} \simeq 53 \dots$  La série harmonique diverge "infiniment" lentement.

<sup>39</sup>Aussi appelé test intégral de Cauchy (ou de McLaurin).

Ces résultats se démontrent à chaque fois par comparaison avec la bonne intégrale<sup>40</sup>. À ce propos, rappelons que pour deux séries à termes positifs  $u_n$  et  $v_n$  telles que  $u_n \leq v_n$  :

- (a) si  $v_n$  converge,  $u_n$  converge aussi, puisque la suite des sommes partielles des  $u_n$  est une suite croissante bornée par la suite des sommes partielles des  $v_n$ , laquelle a une limite ;
- (b) si  $u_n$  diverge,  $v_n$  diverge aussi.

6. *Théorème (ou règle) de Leibniz pour les séries alternées*<sup>41</sup>

Soit une série alternée telle que le module  $|u_n|$  est une quantité décroissante (au moins à partir d'un certain rang) et tend vers zéro ; alors :

- la série est convergente ;
- si  $u_1 > 0$ , c'est-à-dire si :

$$S_N = u_1 - |u_2| + u_3 - |u_4| + \dots + (-1)^{N-1}|u_N| , \quad (1.119)$$

la série converge et sa somme  $S$  (positive) est inférieure ou égale au premier terme :

$$0 < S \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} S_N < u_1 . \quad (1.120)$$

L'inégalité  $S < u_1$  s'obtient en notant que la somme partielle  $S_{2N}$  s'écrit :

$$S_{2N} = u_1 - (|u_2| - u_3) - (|u_4| - u_5) - \dots - (|u_{2N-2}| - u_{2N-1}) - |u_{2N}| ; \quad (1.121)$$

chacun des termes entre parenthèses est positif, d'où l'inégalité (1.120). D'ailleurs, ceci montre aussi que l'erreur commise en remplaçant  $S$  par  $S_N$  est en module bornée par le premier terme négligé : le reste  $R_N$  de la série est lui-même une série alternée, bornée par son premier terme, soit  $u_{N+1}$ . La convergence se prouve géométriquement en regardant ce que font les sommes partielles paires et impaires (elles alternent en signe et décroissent en module, voir fig.1.5). Analytiquement, on a :  $S_{2N+2} - S_{2N} = u_{2N+2} + u_{2N+1} > 0$  puisque  $|u_{2N+2}| < u_{2N+1}$  ; la suite des sommes partielles paires est donc une suite positive croissante bornée : elle est convergente.

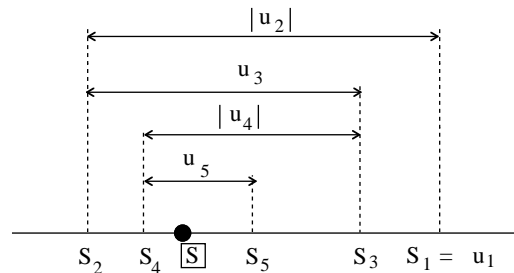


Figure 1.5: Illustration géométrique de la règle de Leibniz, représentant les premières sommes partielles,  $S_1 = u_1$ ,  $S_2 = u_1 - |u_2|$ ,  $S_3 = u_1 - |u_2| + u_3$ , etc., et la convergence de la somme vers  $S$ .

<sup>40</sup>Pour les séries de Bertrand, on introduit l'intégrale  $\int_1^N \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx$  qui vaut  $(1 - \alpha)^{-1}(\ln N)^{1-\alpha}$  et tend vers zéro dans la limite  $N \rightarrow +\infty$  ssi  $\alpha > 1$ .

<sup>41</sup>appelé aussi Lemme d'Abel, mais on connaît plusieurs lemmes dus à Abel. Par exemple, on appelle aussi Lemme d'Abel le résultat suivant. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle vérifiant les conditions :

- (a)  $\exists M$  tel que  $\forall x \geq a, |\int_a^x f(x') dx'| \leq M$  ;
- (b) la fonction  $g$  est décroissante et est telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

Alors, l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(x')g(x') dx'$  est convergente.

Par exemple, la série harmonique alternée,  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ,  $n \geq 1$  converge puisque les  $u_n$  sont tous décroissants en module et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  (voir fig.1.4). Par ailleurs :

$$|S - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| < \frac{1}{N+1} ; \quad (1.122)$$

pour avoir  $S$  avec une erreur de  $10^{-3}$ , il faut donc calculer 1000 termes : cette série converge (elle vaut  $\ln 2$ ), mais très lentement<sup>42</sup>. Autre exemple :  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  ; la règle de Leibniz dit que cette série converge : en dépit de la décroissance très lente de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , l'alternance des signes sauve la mise – mais la convergence est encore plus lente : il faut un million de termes pour avoir la somme<sup>43</sup> avec une erreur de  $10^{-3}$ .

À l'inverse, la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$  converge (c'est  $e^{-x}$ ) très vite : comme  $7! = 5040$ ,  $S_6$  donne  $S$  avec un écart inférieur à  $\frac{1}{5040} \simeq 2 \times 10^{-4}$ . De la même façon, comme  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$ , la somme partielle  $S_N$  donne  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  avec une erreur inférieure à  $\frac{1}{(2N+1)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2N+1}$ .

◆ *Remarque*

Il convient de noter que prouver la convergence d'une série est une chose, trouver effectivement ce que vaut cette somme est une tout autre affaire, et exige parfois quelques acrobaties, voire un vrai tour de force. Pour la curiosité, citons quelques résultats.

On peut montrer par des techniques assez standards (voir cours de L3) que<sup>44</sup> :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} \coth \pi x - \frac{1}{2x^2} . \quad (1.123)$$

Il est un peu laborieux de montrer que<sup>45</sup> :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} \left( \frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) = \pi . \quad (1.124)$$

Nettement moins facile à établir est le résultat<sup>46</sup> :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{5}) , \quad (1.125)$$

où les  $F_m$  sont les nombres de Fibonacci définis dans la sous-section 1.2.1. Une autre égalité<sup>47</sup> pas évidente

<sup>42</sup>Si l'on veut calculer  $\ln 2$  numériquement comme la suite d'une série (tronquée !), mieux vaut s'y prendre autrement. Il est facile de montrer que la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n}$  vaut aussi  $\ln 2$  (établir ce résultat). Le reste  $R_N$  de cette dernière série est  $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n} < \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N N}$  : la somme de 10 termes donne une précision meilleure que  $\frac{1}{10 \times 1024} \dots$

La raison profonde de l'accélération de la convergence tient au fait que cette série est le développement du  $\ln$  centré en un point en plein dans le disque de convergence ( $x = \frac{1}{2}$ ), alors que la série alternée est un développement de Taylor centré en un point situé sur le disque de convergence.

<sup>43</sup>La somme vaut  $(1 - \sqrt{2})\zeta(\frac{1}{2})$ , où  $\zeta(x)$  est la fonction de Riemann dont la définition, valide  $\forall x, \Re x > 1$ , est  $\zeta(x) \stackrel{\text{d'ef}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ . On sait étendre cette fonction et lui donner un sens pour presque toutes les valeurs (complexes) de  $x$ . En particulier, on peut montrer que  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$  ; est-ce à dire que  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$  ?

<sup>44</sup>Pouvez-vous utiliser (1.123) pour montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (qui est donc la valeur de  $\zeta(2)$ ) ?

<sup>45</sup>faire cet exercice après avoir étudié les séries entières, en remarquant que chaque terme est de la forme  $\frac{1}{16^n} \frac{x^{8n+n_0}}{8n+n_0}$ , où on fait  $x = 1$ . Par dérivation en  $x$ , on obtient essentiellement des séries géométriques, qui se resomment à vue. Il reste ensuite à faire des intégrations de fractions rationnelles, toujours possibles après décomposition en éléments simples (penser à caler convenablement la constante additive d'intégration) ; il suffit de faire  $x = 1$  dans le résultat final pour obtenir (1.124). On doit pouvoir aussi s'en sortir avec les séries de Fourier...

<sup>46</sup>R. Honsberger, *Mathematical Gems III*, p. 135, (The Mathematical Association of America, New York, 1985).

<sup>47</sup>due à Gosper. Voir aussi par exemple : [www.math.tu-berlin.de/mueller/HowToAdd.pdf](http://www.math.tu-berlin.de/mueller/HowToAdd.pdf)



du tout<sup>48</sup> :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\sqrt{(n\pi)^2 - 9}\right) = -\frac{\pi^2}{12e^3} = -0.040\,948\,222 \dots \quad (1.127)$$

◆

### Convergence absolue, semi-convergence

Pour une série dont les termes ont un signe quelconque, il est utile d'introduire la notion de convergence absolue : une série  $u_n$  est *absolument convergente* si la série des modules  $|u_n|$  est convergente. Comme le module d'une somme est inférieur ou égal à la somme des modules :

$$\left| \sum_{n=1}^N u_n \right| \leq \sum_{n=1}^N |u_n|, \quad (1.128)$$

si une série est absolument convergente, elle est convergente :

$$\boxed{\text{convergence absolue} \implies \text{convergence}} \quad (1.129)$$

Soit par exemple la série de terme général  $u_n = \frac{\sin nx}{n^2}$  ; on a  $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$  et comme cette dernière série est convergente (par exemple, comparer à l'intégrale  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2}$ ), la série des modules est convergente : la série  $u_n = \frac{\sin nx}{n^2}$  est absolument convergente, donc *a fortiori* convergente. Pour les mêmes raisons, la série de terme général  $u_n = q^n \cos n\alpha$  est absolument convergente  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall q < 1$ , puisqu'elle est bornée en module par la série géométrique de raison  $q$ .

La relation logique (1.129) exprime le fait que la convergence absolue est une condition *suffisante* de convergence, qui n'est nullement *nécessaire* : il existe des séries qui convergent, mais dont la série des modules diverge : la série harmonique alternée converge mais ne converge pas absolument puisque la série harmonique (qui est sa série des modules) diverge. En pareil cas, si on veut préciser les choses, on dit que la série est *semi-convergente* (ou parfois *conditionnellement convergente*).

La différence est forte entre convergence absolue et semi-convergence. Pour une série absolument convergente, on peut modifier *ad libitum* l'ordre des termes, ou regrouper les termes, sans altérer la propriété de convergence absolue, et donc sans incidence sur la somme  $S$ . Au contraire, pour une série semi-convergente, on peut, en modifiant l'ordre ou le regroupement des termes, obtenir n'importe quel nombre fixé d'avance, selon un théorème dû à Riemann. Par exemple, revenons à la série harmonique alternée,  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , qui converge (la somme tend vers  $\ln 2$ ) mais pas absolument. On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \ln 2 ; \quad (1.130)$$

la même série peut être réécrite comme :

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n(2n-1)}. \quad (1.131)$$

La série à droite est visiblement convergente, et vaut<sup>49</sup>  $\frac{1}{2} \ln 2$  : ce regroupement (particulier) des termes a divisé la somme par 2 ! De façon plus spectaculaire : si on regroupe tous les termes pairs (négatifs), on obtient la

<sup>48</sup>Si on donne la série commençant par :

$$0, 4, 0, 9, 4, 8, 2, 2, 2, 4, 2, 3, 4, 0, 0, 5, 6, 3, 5, 2, 1, 9, 4, 1, 8, 0, 4, 6, 3, 3, 8, 0, 7, 2, 4, 2, 0, 9, 3, 7, 2, 7, 2, 9, \dots \quad (1.126)$$

qui est capable de trouver qu'il s'agit des premières décimales de  $\frac{\pi^2}{12e^3}$  ???

<sup>49</sup>Un bon exercice, après avoir étudié la section suivante sur les séries entières (introduire  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(2n-1)}$ , considérer  $S'(x)$  et y reconnaître le développement de  $x^{-1/2} \ln(1+x^{1/2})$ , etc.)

série harmonique, à un facteur  $-\frac{1}{2}$  près, qui diverge ; la série des termes impairs diverge aussi. Autre exemple de série semi-convergente : la série logarithmique satisfaisant<sup>50</sup> :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 . \quad (1.132)$$

On retiendra que regrouper les termes d'une façon ou d'une autre modifie radicalement la valeur de la somme d'une série semi-convergente.

## 1.4.2 Séries de fonctions

L'étape suivante consiste à introduire des séries dont le terme général est une fonction d'une certaine variable (supposée réelle)  $x$ , soit  $u_n(x)$ . Les sommes partielles  $S_N(x)$  sont alors elles-mêmes des fonctions<sup>51</sup> de cette variable  $x$  :

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x) . \quad (1.133)$$

Le terme général  $u_n(x)$  est souvent écrit comme  $c_n f_n(x)$  où  $c_n$  est un coefficient indépendant de  $x$ . Dans ces notations, la somme de la série est :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n f_n(x) . \quad (1.134)$$

Avec  $f_n(x) = \cos nx$  ou  $\sin nx$ , on obtient une série de Fourier (voir ch. 3) ; si  $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ , c'est une série de Lambert. Les séries de Kapteyn impliquent des fonctions spéciales (dites de Bessel) et jouent un rôle important dans l'analyse en terme de périodes, ou de fréquences (analyse harmonique) du problème de Képler (deux corps en interaction gravitationnelle, deux charges électriques en interaction de Coulomb). Le cas  $f_n(x) = x^n$  (série dite *entière*) est très important et est l'objet de la sous-section 1.4.2. Enfin, signalons que la plupart des résultats énoncés ci-dessous se généralisent au cas où la variable  $x$  prend des valeurs complexes (indépendamment du fait que les coefficients  $c_n$  peuvent être eux-mêmes complexes).

### Convergence simple et uniforme d'une série de fonctions

La convergence, simple ou uniforme, de la suite des fonctions  $S_N(x)$  vers la somme  $S(x)$  relève des mêmes définitions que précédemment. On dira ainsi qu'une série est simplement ou uniformément convergente respectivement selon que la suite  $S_N(x)$  des sommes partielles converge simplement ou uniformément respectivement vers sa limite  $S(x)$ . Ainsi par exemple, toutes les sommes partielles étant définies sur  $[a, b]$ , il y a convergence uniforme si, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  indépendant de  $x \in [a, b]$  tel que  $|S(x) - S_N(x)| < \varepsilon$ . Tout comme pour les suites de fonctions, une autre façon d'exprimer la même propriété est de dire que la valeur maximum de l'écart  $|S(x) - S_N(x)|$  sur  $[a, b]$  tend vers zéro quand  $N \rightarrow +\infty$ .

Soit par exemple la série de terme général :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos nx \quad (n \in \mathbb{N}^*) . \quad (1.135)$$

La somme partielle  $S_N(x)$  satisfait :

$$|S_N(x)| = \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \cos nx \right| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} |\cos nx| = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} ; \quad (1.136)$$

<sup>50</sup> $\gamma$  désigne toujours la constante d'Euler (voir (1.116)).

<sup>51</sup>Souvent, on appelle série *numérique* une série du genre précédent, pour la démarquer d'une série de fonctions.

la suite des modules des sommes partielles est bornée, et strictement croissante ( $|S_{N+1}| \leq |S_N| + \frac{1}{(N+1)^2}$ ). À la limite,  $|S_\infty|$  est bornée par la série convergente<sup>52</sup>  $S_{\text{maj}} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ . Pour tout  $\varepsilon$  fixé, on sait ainsi trouver un  $N(\varepsilon)$  indépendant de  $x$  tel l'écart entre  $|S_N|$  et  $S_{\text{maj}}$  soit plus petit que  $\varepsilon$ , quel que soit  $x$  ( $x$  est absent de la majoration) : la série de terme général (1.135) est donc *uniformément convergente*.

Pour établir la convergence uniforme, on a majoré la série de fonctions par une série numérique<sup>53</sup>. On dit qu'une série de fonctions est *majorable* s'il existe une série numérique convergente à termes positifs  $v_n$  telle que  $|u_n(x)| \leq v_n$ , quel que soit  $x$  étant dans un certain intervalle fermé. Toute série majorable est donc uniformément convergente, mais la réciproque est fautive : il existe des séries de fonctions uniformément convergentes mais qui ne sont pas majorables<sup>54</sup>. En pratique, la majoration (quand elle est aisée) est la façon la plus simple et la plus commode pour prouver la convergence uniforme, mais elle est évidemment vouée à l'échec pour les séries conditionnellement convergentes.

### Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

La convergence uniforme d'une série de fonctions a des conséquences importantes ; en particulier :

1. si les  $u_n(x)$  sont des fonctions continues, la somme  $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$  de la série est une fonction continue.
2. L'intégrale de la somme  $S(x)$  de la série est égale à la série formée avec les intégrales des  $u_n(x)$ . Plus précisément :

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^\infty u_n(x) dx = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b u_n(x) dx . \quad (1.137)$$

La puissance de ce résultat réside dans la commutation<sup>55</sup> des deux opérations : sommation *infinie* et intégration :

$$\boxed{\int_a^b dx \sum_{n=0}^\infty = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b dx} \quad (1.138)$$

L'opération de droite est dite *intégration terme à terme*.

3. Si la série des dérivées est aussi uniformément convergente<sup>56</sup>, sa somme est la dérivée de  $S(x)$ , soit  $S'(x)$  :

$$\sum_{n=0}^N u'_n(x) \text{ uniformément convergente} \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N u'_n(x) = S'(x) . \quad (1.139)$$

C'est ce que l'on désigne par *dérivée terme à terme* une série. Symboliquement, on peut alors écrire<sup>57</sup> :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^\infty = \sum_{n=0}^\infty \frac{d}{dx}} \quad (1.141)$$

<sup>52</sup>qui vaut  $\frac{\pi^2}{6}$ , voir note 44.

<sup>53</sup>Un tel test s'appelle aussi *test de Weierstrass*.

<sup>54</sup>Par exemple  $u_n(x) = (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}$  est uniformément convergente sur  $[0, 1]$  (la somme vaut  $\ln(1+x)$ , qui est continue sur  $[0, 1]$ ), mais n'est pas absolument convergente sur  $[0, 1]$  (en  $x = 1$ , c'est la série harmonique alternée, qui est semi-convergente).

<sup>55</sup>Quand l'ordre de deux opérations  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  est sans importance (on dit alors que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  *commutent*), ceci se traduit formellement par l'égalité  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ . L'usage donne un nom à la combinaison  $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ , c'est le *commutateur* de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  et on le note  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ . Quand les opérations commutent, leur commutateur est nul ; ici, on peut ainsi écrire  $[\int_a^b dx, \sum_{n=0}^\infty] = 0$ .

La Mécanique quantique repose fondamentalement sur la non-commutation de certaines grandeurs physiques (exemple position et vitesse), d'où les fameuses "relations d'incertitude" de Heisenberg (une terminologie pas forcément judicieuse)

<sup>56</sup>Pour une série entière (voir ci-dessous), cette hypothèse n'est pas nécessaire.

<sup>57</sup>et à nouveau écrire que le commutateur est nul :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^\infty = \sum_{n=0}^\infty \frac{d}{dx} \iff \left[ \frac{d}{dx}, \sum_{n=0}^\infty \right] = 0 . \quad (1.140)$$

On remarquera que pour la dérivation, les conditions sont nettement plus contraignantes : le résultat (1.139) n'est vrai que si l'on sait d'avance que la série des dérivées est elle-même uniformément convergente. D'une façon générale, la dérivation est une opération plus "dangereuse" que l'intégration, et exige ici une propriété supplémentaire (la convergence uniforme de la série des dérivées). Pour se souvenir de ce fait très général, en élargissant un peu le contexte, il suffit de penser à la fonction échelon-unité  $Y(x)$  ; sa primitive est une fonction continue, nulle si  $x \leq 0$ , égale à  $x$  si  $x \geq 0$  : l'intégrale d'une fonction ayant un saut fini est une fonction continue. Au contraire, la dérivée de  $Y(x)$  est une fonction nulle partout, c'est sûr, mais on ne peut rien dire en  $x = 0$ . De fait,  $Y'(x)$  peut être définie comme une certaine limite (c'est l'illustissime "fonction" de Dirac,  $\delta(x)$ ). L'intégration "arrange les choses", la dérivation peut les aggraver...

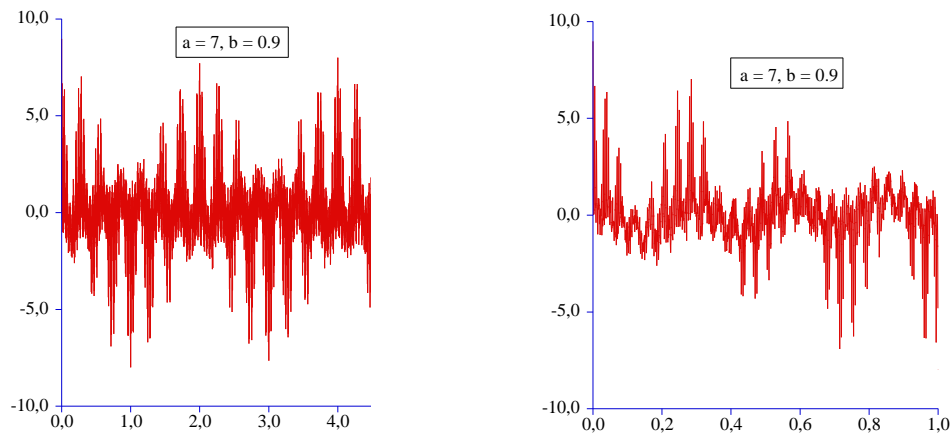


Figure 1.6: Représentation graphique d'une approximation de la fonction de Weierstrass  $\mathcal{W}(x)$  définie en (1.142), la série (1.142) étant tronquée à un nombre fini de termes (50). On note en outre qu'un *zoom* sur un intervalle  $([0, 1],$  par exemple) produit un graphe ayant *grosso modo* la même allure (voir à droite).

À titre de curiosité, citons la fonction  $\mathcal{W}(x)$  définie comme la somme de la série majorable de terme général  $b^n \cos(a^n \pi x)$ , absolument convergente si  $|b| < 1$  :

$$\mathcal{W}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x) . \quad (1.142)$$

$\mathcal{W}$  est une sorte de monstre<sup>58</sup> : partout continue (la série est uniformément convergente), cette fonction n'est nulle part dérivable si  $a$  est impair, si  $0 < b < 1$  et si  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2} \simeq 5.71$  (Weierstrass, 1872)... Par la suite, Hardy (1916) a montré que cette propriété est vraie pour  $0 < b < 1$ ,  $ab \geq 1$  et  $a > 1$ , pas forcément entier impair.

## Séries entières

Certaines séries de fonctions jouent un rôle prédominant, les séries entières, tant sur le plan fondamental que dans les applications. Une série entière est une série formée avec les fonctions monômes  $x^n$ , soit  $u_n(x) = c_n x^n$ , où  $c_n$  est un coefficient réel ou complexe ne dépendant que de  $n$  ; la forme générale est donc :

$$S(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (1.143)$$

<sup>58</sup>Elle est connue sous le nom de *fonction de Weierstrass*. Voir par exemple : <http://planetmath.org/encyclopedia/WeierstrassFunction.html>

en quelque sorte, une série entière est un “polynôme de degré infini”. Le prototype de la série entière est le développement de Taylor (infini) d’une fonction infiniment dérivable<sup>59</sup> dans le voisinage d’un certain point. Par exemple<sup>60</sup>, en se souvenant que  $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$ , le développement de Taylor (infini) de l’exponentielle centré en  $x = 0$  ( $e^{x=0} = 1$ ) est :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \left( \frac{d^n e^x}{dx^n} \right)_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n . \quad (1.144)$$

Ce développement converge uniformément quel que soit  $x$  de module fini, comme on le verra ci-dessous (ceci reste vrai si  $x \in \mathbb{C}$ ). Avec les formules d’Euler (réelles,  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ,  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \dots$ ) ou complexes,  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ,  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \dots$ ), on en déduit immédiatement les développements en série entière :

$$\sin x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)!} x^{2p+1} \quad \cos x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \quad (1.145)$$

$$\sinh x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} x^{2p+1} \quad \cosh x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p} \quad (1.146)$$

Ces développements convergent eux aussi pour tout  $x$  de module fini. De la même façon, on a<sup>61</sup> :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (1.147)$$

mais la convergence n’est uniforme que si  $|x| < 1$  (et aussi si  $x = 1$ , voir note 54), une propriété qui vient du fait que  $x = -1$  est un point singulier de la fonction  $\ln(1+x)$ , ou du fait que la dérivée,  $\frac{1}{1+x}$ , a un développement en série entière qui diverge si  $|x| \geq 1$ .

Les quelques exemples ci-dessus montrent qu’une série entière ne converge que si  $|x|$  satisfait une certaine inégalité,  $|x| < \infty$  pour (1.144),  $|x| < 1$  pour (1.147). Les propriétés de convergence d’une série entière reposent fondamentalement sur le théorème d’Abel qui s’énonce comme suit : soit une série entière telle que (1.143) (où  $x$  peut d’ailleurs être complexe). Si elle converge pour une certaine valeur  $x_0 > 0$ , elle converge *absolument*  $\forall x$  tel que  $|x| < |x_0|$  ; inversement, si elle diverge pour un certain  $x'_0$ , alors elle diverge pour tous les  $x$  tels que  $|x| > |x'_0|$ .

La démonstration repose sur la comparaison avec les séries géométriques dont le terme général est essentiellement  $\frac{|x|}{|x_0|}$  et  $\frac{|x|}{|x'_0|}$ . Il en résulte immédiatement que le domaine de convergence d’une série entière est symétrique autour de l’origine, et caractérisé par un nombre positif  $R$  appelé *rayon*<sup>62</sup> *de convergence*. Par définition de  $R$ , une série entière converge absolument  $\forall |x| < R$ , ce qui entraîne automatiquement (la majoration étant indépendante de  $x$  tel que  $|x| < R$ ) que la convergence est aussi *uniforme*. Les séries entières sont donc des objets remarquables, possédant de nombreuses propriétés (voir la suite)

Pour trouver  $R$ , il suffit d’appliquer l’une des règles énoncées plus haut à propos des séries numériques (pour chaque  $x$  fixé,  $S(x)$  est de fait la somme d’une série numérique), par exemple celle de d’Alembert. Soit la série entière  $S(x)$  de terme général  $c_n x^n$  ; le rapport de deux termes consécutifs est :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} x . \quad (1.148)$$

<sup>59</sup>aussi appelée *fonction analytique*

<sup>60</sup>Par comparaison avec le développement limité (1.25), on voit que la fonction  $\varepsilon(x)$  qui figure dans ce dernier admet elle-même un développement en série entière.

<sup>61</sup>Rappelons que ce développement se retient sans peine en se souvenant qu’il n’est que l’intégration terme à terme de la série géométrique  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ , et correspond précisément à la primitive valant 0 en  $x = 0$  ( $\ln(1+0) = 0$ ).

<sup>62</sup>On sait prolonger les définitions au domaine des complexes,  $R$  étant alors le rayon du disque dans  $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$  à l’intérieur duquel doit se trouver  $z \in \mathbb{C}$  pour que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$  converge. Cette généralisation est rendue possible puisque tout repose sur la série géométrique, dont l’extension à  $\mathbb{C}$  est un jeu d’enfant.

Dès lors, soit  $l$  la limite du rapport  $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  ; il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = l |x| . \quad (1.149)$$

La règle de d'Alembert, appliquée à la série des modules  $|u_n|$ , permet alors de conclure que  $S(x)$  converge absolument pour tous les  $x$  tels que  $l|x| < 1$ , soit  $|x| < \frac{1}{l}$ , d'où l'on déduit  $R = \frac{1}{l}$ . C'est ainsi que l'on peut trouver  $R = +\infty$  pour la série de l'exponentielle et  $R = 1$  pour  $\ln(1+x)$ . En tant que série majorable, une série entière converge uniformément dans tout disque fermé inclus dans son disque de convergence.

Notons aussi que la comparaison judicieuse avec une autre série permet de savoir ce qui se passe plus précisément *sur* le bord du disque de convergence ; ainsi, la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$  converge quel que soit  $\alpha$  réel (et même négatif)  $\forall |x| < 1$  puisque  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left( \frac{n}{n+1} \right)^\alpha |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$ , d'où  $R = 1$  ; cependant, pour  $x = 1$ , on voit par comparaison qu'elle converge si  $\alpha > 1$  et diverge si  $\alpha \leq 1$  ; pour  $x = -1$ , la règle de Leibniz pour les séries alternées montre qu'elle converge encore pourvu que  $\alpha$  soit positif. De même, pour  $\ln(1+x)$  (voir (1.147)) : la série converge encore pour  $x = 1$  (c'est la série harmonique alternée, qui est égale à  $\ln 2$ ) mais pas en  $x = -1$ . Notons enfin que laisser à la variable  $x$  la possibilité de varier dans le plan complexe (et non plus seulement sur l'axe réel) permet de comprendre plus profondément les différences de comportement d'un point à l'autre du bord du disque de convergence.

Citons maintenant quelques théorèmes importants, qui découlent des propriétés (générales) liées à la convergence uniforme, et aux propriétés particulières des séries entières :

1. la somme d'une série entière est une fonction continue  $\forall x, |x| < R$ .
2. La série formée avec les primitives de  $u_n(x)$  est la primitive de la somme de la série :

$$\int_a^x \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x^n \right) dx' = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \int_a^x x'^n dx' = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n}{n+1} (x^{n+1} - a^{n+1}) . \quad (1.150)$$

Il faut bien sûr que  $a$  et  $x$  soient dans le disque de convergence.

3. La série formée avec les dérivées des  $u_n(x) = c_n x^n$ , soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} n c_n x^{n-1}$ , a visiblement le même disque de convergence que<sup>63</sup>  $S(x)$  ; cette propriété extraordinaire de la série des dérivées, assurée automatiquement par la forme particulière et remarquable du terme général d'une série entière, s'écrit :

$$S(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \forall x, |x| < R , \quad \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \text{ converge et } = S'(x) . \quad (1.151)$$

Ainsi, pour une série entière, il n'est pas nécessaire d'invoquer préalablement la convergence uniforme de la série des dérivées pour que celle-ci soit égale à la dérivée de la somme de la série (comparer avec le point 3 p. 29).

En reprenant le même argument avec la série  $S'(x)$ , on en déduit que la série des dérivées secondes a pour somme  $S''(x)$  et ainsi de suite. De proche en proche, il apparaît ainsi que la somme d'une série entière définit une fonction  $S(x)$  qui est continue et *infinitiment dérivable* dans le disque de convergence : c'est ce que l'on appelle une *fonction analytique*. Les fonctions analytiques sont des objets d'une grande robustesse et jouent un rôle de tout premier plan en Physique (voir le cours de L3).

Ces résultats permettent aux séries entières de jouer un rôle central dans une multitude de problèmes, notamment pour la résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles, dont il est courant de chercher *des* solutions sous la forme d'une série entière<sup>64</sup> quand on ne sait pas trouver les solutions par des moyens plus directs. Soit par exemple l'équation différentielle<sup>65</sup> :

$$f''(x) - \alpha x f(x) = \lambda f(x) . \quad (1.152)$$

<sup>63</sup>La dépendance exponentielle décroissante l'emporte toujours sur une divergence polynomiale.

<sup>64</sup>Souvent, il est nécessaire de chercher la solution sous une forme un peu plus générale, (série dite *de Fuchs*), à savoir  $x^\alpha S(x)$ ,  $S$  étant une série entière et  $\alpha$  un exposant à déterminer. Par ailleurs, il faut se souvenir que pour une équation donnée, les solutions ne sont pas toutes forcément de cette forme : il peut exister des solutions singulières (*e.g.*  $\ln x$ ).

<sup>65</sup>Quand  $\lambda = 0$  cette équation est dite *d'Airy*.

Cherchons une solution sous la forme d'une série entière, en posant  $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x^n$ . On a :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n c_n x^{n-1} , \quad f''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) c_n x^{n-2} . \quad (1.153)$$

Le report dans (1.152) donne :

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1) c_n x^{n-2} - \alpha x \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x^n = \lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x^n , \quad (1.154)$$

soit :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - \alpha x c_n - \lambda c_n] x^n = 0 \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - \alpha c_{n-1} - \lambda c_n] x^n = 0 , \quad (1.155)$$

en convenant que  $c_{-1} = 0$ . (1.155) dit que la série entière au premier membre est nulle  $\forall x$ , ce qui signifie que tous ses coefficients sont nuls, *i.e.* le crochet en facteur de  $x^n$  est nul. On en déduit la relation de récurrence entre les coefficients  $c_n$  de la solution :

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - \alpha c_{n-1} - \lambda c_n = 0 , \quad n \in \mathbb{N}, c_{-1} = 0 . \quad (1.156)$$

Pour  $n = 0$ , on a  $2c_2 - \lambda c_0 = 0$ , ce qui permet de trouver  $c_2$  connaissant  $c_0$  ;  $n = 1$  donne  $6c_3 - \alpha c_0 - \lambda c_1 = 0$ , ce qui permet d'obtenir  $c_3$  si on connaît  $c_1$  – ensuite tous les  $c_{n>3}$  se trouvent fixés. Comme toujours pour une équation différentielle, il faut se donner des conditions supplémentaires pour pouvoir déterminer complètement la solution ; ici l'équation est d'ordre 2, et tout est fixé pourvu que l'on se donne deux informations supplémentaires, par exemple les valeurs de  $c_0$  et de  $c_1$ .

Par ailleurs, les séries entières apparaissent également sous des formes cousines : on peut dire qu'une série du genre  $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{inx}$  est une série entière par rapport à la variable  $z = e^{ix}$  puisque  $e^{inx} = (e^{ix})^n \equiv z^n$ .

Autre exemple : les séries de perturbation (non-singulières<sup>66</sup>). En Physique, une fois identifié un *petit* paramètre (sans dimension !),  $\varepsilon$ , on est souvent conduit à résoudre un problème en cherchant les quantités d'intérêt,  $A$ , sous la forme d'un développement en puissances entières de  $\varepsilon$ . On pose ainsi *a priori* :

$$A = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \varepsilon^n . \quad (1.157)$$

En général, on est incapable de trouver le terme général de la série, mais si  $\varepsilon \ll 1$ , la série tronquée à l'ordre  $N$  (c'est alors un polynôme de degré  $N$ ) fournit une bonne approximation  $A_N$  de la grandeur cherchée. Cette idée est à la base de toutes les méthodes de *perturbation*, qui sont d'un emploi très fréquent en Physique, et ailleurs.

<sup>66</sup>Cette précision est nécessaire, car il existe également des développements dits *asymptotiques* qui rendent de très grands services. En gros, il s'agit de développements contenant un nombre *fini* de termes et capables, eux aussi, de fournir une expression analytique approximative, dont les valeurs numériques sont très proches de celles de la quantité cherchée. S'il est impératif de garder un nombre *fini* de termes dans ces développements, c'est juste parce que leur terme général est le terme général d'une série... divergente !





## Chapitre 2

# Notions élémentaires sur les équations différentielles

*Le but de ce chapitre est de rappeler les notions élémentaires pour les équations différentielles*

### 2.1 Définitions

Soit une certaine fonction  $f : x \rightarrow f(x)$ , où toutes les grandeurs sont ici supposées réelles<sup>1</sup>. La fonction  $f$  est censée posséder toutes les propriétés de dérivabilité souhaitables dans un certain domaine  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ .

Une équation différentielle est une certaine relation entre la variable  $x$ , la fonction  $f$  et certaines de ses dérivées, relation vraie dans tout le domaine  $\mathcal{D}$ . Par exemple, l'équation :

$$f'''(x) = f(x)^2 \iff f''' = f^2 \quad (2.1)$$

dit que la dérivée troisième de  $f$  est égale au carré de la fonction elle-même partout où toutes les écritures ont un sens. Autre exemple d'équation différentielle :

$$\sqrt{f''(x)} = xf(x) ; \quad (2.2)$$

clairement ici, cette écriture n'a de sens dans le domaine réel que si la dérivée seconde est positive et si le produit  $xf(x)$  l'est aussi. D'une façon générale, une équation différentielle peut être écrite formellement :

$$\Phi(x, f, f', f'', \dots, f^{(N)}) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad (2.3)$$

où  $f^{(N)}$  désigne la dérivée  $N^{\text{e}}$  de  $f$ . La variable  $x$  peut être de fait absente de l'équation – c'est le cas pour (2.1) (mais pas pour (2.2)) ; on parle alors d'équation *autonome*<sup>2</sup>.

Il existe clairement une variété innombrable d'équations différentielles, dont on donnera plus loin une classification élémentaire (section 2.4).

Si  $N$  est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation, celle-ci est dite du  $N^{\text{e}}$  ordre ; (2.1) est une équation du troisième ordre, (2.2) est du second ordre. Pour un problème de dynamique formulé de façon élémentaire<sup>3</sup>, l'équation pour la coordonnée est du second ordre, en conséquence immédiate de  $m\vec{a} = \vec{F}$ , et sachant que l'accélération  $\vec{a}$  est égale à  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ .

<sup>1</sup>Un grand nombre de résultats s'étendent au cas où  $x$  est un nombre complexe et  $f(x)$  une fonction prenant des valeurs complexes.

<sup>2</sup>parfois aussi appelée (de façon pas très heureuse) *équation incomplète*. Pour l'équation autonome  $f'(x) = F(f(x))$ , si  $f(x)$  est solution, alors toute fonction translatée  $f(x - x_0)$  est aussi solution.

<sup>3</sup>Il existe d'autres formulations équivalentes (lagrangienne, hamiltonienne, ...), faisant apparaître des *systèmes différentiels*

## 2.2 Pertinence des équations différentielles en Physique

La Physique a pour objectif de fournir une description rationnelle des phénomènes observés directement ou indirectement. Cette rationalité est constituée de lois, dont le langage naturel (selon Galilée) est celui des Mathématiques. Une loi est considérée comme vraie à une époque donnée et pour un type de phénomènes, affirmation rappelant au passage la *relativité* des lois physiques au sens où la vérité qu'elles expriment n'a de sens qu'à l'intérieur d'un cadre dûment précisé, implicitement ou explicitement. La genèse d'une loi est une succession complexe d'acquis (expérimentaux et/ou théoriques), le plus souvent par essai et erreur, enchaînement dont la description précise est l'un des objectifs de l'épistémologie.

Envisageons l'un des cas les plus simples, celui d'un expérimentateur qui décide d'étudier la chute d'une très petite bille dans la pesanteur terrestre, lâchée sans vitesse initiale d'un point servant d'origine des positions. L'expérience consiste à mesurer, aussi précisément que possible, les positions de la bille à des instants successifs. Si on note  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  ces instants, il s'agit donc de mesurer les altitudes  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  correspondantes, repérées sur un axe vertical, orienté positivement vers le bas à partir du point où la bille est abandonnée ; ces choix sont purement conventionnels, mais il faut s'y tenir une fois qu'on les a faits.

Une première série de mesures effectuées à des temps équidistants séparés de l'intervalle  $\Delta t$  – d'où  $t_n = n\Delta t$  – montre que les altitudes varient comme le carré du temps écoulé depuis le lâcher de la bille, ce que l'on peut traduire algébriquement par :

$$z_n = C^{\text{ste}} (n\Delta t)^2 ; \quad (2.5)$$

une fois ceci admis, il en résulte que :

$$z_{n+1} - z_n = C^{\text{ste}} [(n+1)^2 - n^2](\Delta t)^2 = C^{\text{ste}} (2n+1)(\Delta t)^2 , \quad (2.6)$$

et :

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} = C^{\text{ste}} (2n+1)\Delta t ; \quad (2.7)$$

cette dernière équation donne ainsi la vitesse moyenne de la bille entre deux instants consécutifs  $t_{n+1}$  et  $t_n$ .

L'expérimentateur décide de recommencer ses mesures avec des instruments beaucoup plus précis, disposant notamment d'un chronomètre permettant de considérer un intervalle de temps  $\Delta't$  beaucoup plus petit entre deux mesures consécutives, lesquelles fournissent maintenant les valeurs  $z_m$  ; à nouveau, il remarque que ces altitudes obéissent à la loi (pour l'instant toujours empirique) :

$$z_m = C^{\text{ste}} (m\Delta't)^2 \quad (2.8)$$

d'où il peut à nouveau déduire :

$$z_{m+1} - z_m = C^{\text{ste}} (2m+1)(\Delta't)^2 , \quad \frac{z_{m+1} - z_m}{\Delta't} = C^{\text{ste}} (2m+1)\Delta't . \quad (2.9)$$

Répétant cette expérience avec des instruments de plus en plus précis autorisant un intervalle de temps  $\delta t$  de plus en plus petit, on constate que les lois empiriques ci-dessus conservent leur valeur, ce qui autorise le saut conceptuel consistant à affirmer qu'elles restent valides dans la limite où  $\delta t$  "tend vers zéro", une expression simplifiée qui signifie que  $\delta t$  est beaucoup plus petit que toute autre échelle de longueur disponible expérimentalement. On récrit ainsi la deuxième équation (2.9) :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{z_{m+1} - z_m}{\delta t} \right] = C^{\text{ste}} \lim_{\delta t \rightarrow 0} [(2m+1)\delta t] ; \quad (2.10)$$

(plusieurs équations différentielles couplées) d'ordre un. Par exemple, l'équation du second ordre  $m\ddot{x} = F$  est équivalente au système de deux équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = F \end{cases} . \quad (2.4)$$

visiblement, pour que l'un des instants  $t_m$  soit égal à un instant  $t$  donné dans la limite  $\delta t \rightarrow 0$ , il faut que, *simultanément*,  $m$  tende vers l'infini, de sorte que le produit  $m\delta t$  soit constant, et justement égal à l'instant  $t$  choisi. Il convient donc d'écrire plus précisément :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, m\delta t = t} \left[ \frac{z_{m+1} - z_m}{\delta t} \right] = \text{C}^{\text{ste}} \lim_{\delta t \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, m\delta t = t} [(2m+1)\delta t] ; \quad (2.11)$$

Par définition de ce processus de limite,  $\lim_{\delta t \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, m\delta t = t} [(2m+1)\delta t] = \lim_{\delta t \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, m\delta t = t} [(2 + \frac{1}{m})m\delta t] = 2t$ . Quant au premier membre de (2.11), si on *postule* l'existence d'une fonction  $z$  de la variable  $t$ ,  $z(t)$ , passant par tous les points de la grille des temps, aussi fine soit-elle, il n'est rien d'autre par définition que la dérivée de cette fonction<sup>4</sup>. En définitive, la conclusion est :

$$\frac{dz}{dt} = \text{C}^{\text{ste}'} t , \quad (2.12)$$

une loi, cette fois théorique, qui affirme que la vitesse de chute de la bille dans la pesanteur terrestre est proportionnelle au temps écoulé depuis qu'elle a été lâchée :  $v(t) \propto t$ .

Le saut est réellement conceptuel puisque, partant d'une grille de points  $\{z_n\}_n$ , on postule d'une part l'existence d'une fonction  $z(t)$  dont les valeurs  $z(t = t_n)$  coïncident avec les valeurs mesurées, d'autre part que cette fonction a une dérivée ("est dérivable"), qui donne la vitesse instantanée de la bille,  $v(t) = \frac{dz}{dt}$ . Tout cela étant admis, et supposant de surcroît que la vitesse  $v(t) \equiv \dot{z}(t)$  est aussi une fonction dérivable, la dérivation membre à membre de (2.12) donne :

$$\frac{dv}{dt} = \text{C}^{\text{ste}''} , \quad (2.13)$$

équation qui affirme que l'accélération de la bille est indépendante du temps écoulé. D'autres expériences semblables effectuées avec une particule de masse  $m$  variable ont établi que, toutes choses égales par ailleurs, l'accélération est inversement proportionnelle à la masse (c'est l'inertie : plus c'est "lourd" (!?), plus la modification de la vitesse est difficile). Ceci autorise à écrire :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \text{C}^{\text{ste}''} \iff m \frac{dv}{dt} = \text{C}^{\text{ste}''} . \quad (2.14)$$

C'est la version la plus simple du Principe fondamental de la Dynamique pour la chute "libre" d'un corps — on sait par ailleurs que cette affirmation n'est correcte que pour des expériences conduites sur une échelle de longueur très petite devant le rayon terrestre  $R_T \simeq 6\,400$  km ( $G \frac{mM_T}{(R_T+z)^2} = G \frac{mM_T}{R_T^2} [1 + \mathcal{O}(\frac{z}{R_T})] \simeq G \frac{mM_T}{R_T^2} \equiv \text{C}^{\text{ste}''}$  quand  $z \ll R_T$ ).

La procédure détaillée ci-dessus est un exemple montrant l'arrivée naturelle d'une équation différentielle à propos d'un problème de Physique. Pour la Mécanique classique (ni quantique, ni relativiste), la loi fondamentale affirme que le produit de la masse par l'accélération est égale à la force appliquée,  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ . En général, la force dépend de l'endroit où se trouve le point matériel, point repéré par le vecteur  $\vec{r}$  ; elle peut aussi dépendre du temps, et même de la vitesse (pour une force de frottement par exemple). En définitive, la force est une certaine fonction  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ , et l'équation fondamentale s'écrit formellement :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \iff \vec{\Phi}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) = \vec{0} . \quad (2.15)$$

C'est bien le prototype d'une équation différentielle pour une fonction  $\vec{r}$  de la variable  $t$  : une relation entre cette fonction et ses dérivées  $\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ ,  $\ddot{\vec{r}} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ , etc, vraie quelle que soit la valeur de la variable  $t$  choisie où toutes les écritures ont un sens. Jusqu'à présent, aucune expérience n'est venue invalider le processus de limite ci-dessus dans le cadre de la Physique classique.

Autre exemple, emprunté cette fois à l'Électricité. Soit un circuit parcouru par un courant d'intensité  $I$  contenant en série une résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$ . La différence de potentiel aux bornes de la résistance est  $RI$ , celle aux bornes du condensateur est  $\frac{Q}{C}$ , où  $Q$  est la charge portée par l'une des armatures du

<sup>4</sup>Pour construire une *trajectoire*, dont l'existence est l'un des postulats de la Mécanique classique, il faut se donner une suite de points infiniment proches les uns des autres *et* une tangente en chacun d'entre eux.

condenseur. On sait par ailleurs que le produit  $I\delta t$  est égal à la variation  $\delta Q$  de la charge pendant l'intervalle de temps  $\delta t$ . Ici,  $\delta Q$  ne peut pas être en toute rigueur rendu aussi petit que l'on veut, puisqu'il existe une charge libre *élémentaire* (l'"atome" de charge électrique), égale à peu près à  $1,6 \times 10^{-19}$  C (l'opposé de la charge de l'électron). Il n'empêche que, avec des circuits ordinaires<sup>5</sup> et pour des  $\delta t$  accessibles expérimentalement, la variation  $\delta Q$  est gigantesque par rapport à la charge élémentaire, de sorte qu'inversement la charge élémentaire est un "infiniment petit" par rapport à tout  $\delta Q$  pertinent au plan expérimental ; ceci autorise, pour la description théorique de toute expérience ordinaire, à passer formellement à la limite  $\delta Q \rightarrow 0$ ,  $\delta t \rightarrow 0$  avec le rapport  $\lim(\frac{\delta Q}{\delta t})$  fini et égal à l'intensité  $I(t)$ . Dans ces conditions, la loi d'Ohm (en mettant les bons signes) prend la forme d'une équation différentielle pour la fonction  $Q(t)$  :

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 . \quad (2.16)$$

Ainsi, la charge  $Q$  obéit-elle à une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre du genre  $\Phi(Q, \dot{Q}) = 0$ , où la variable (le temps  $t$ ) ne figure pas explicitement.

Les exemples précédents mettent en jeu des fonctions de la variable temps, et c'est très souvent le cas en Physique, où l'on cherche fréquemment à décrire l'évolution d'un système à partir d'un état connu à un certain instant. Toutefois, la variable dont dépend la fonction assujettie à une certaine équation différentielle peut être *a priori* n'importe quelle grandeur physique : une position, une énergie, une masse, ... Ainsi, soit un verre conique (pointe en bas !) que l'on remplit d'eau progressivement. Soit  $h$  la hauteur d'eau à un certain moment ; la surface de l'interface eau/air est proportionnelle à  $h^2$  – puisque le rayon de l'interface croît proportionnellement à  $h$  –, de sorte que l'ajout d'une tranche d'eau d'épaisseur  $\delta h$ , très petite à l'échelle de l'expérience mais gigantesque par rapport à la taille d'une molécule, fait varier le volume d'eau  $V$  d'une quantité  $\delta V$  proportionnelle à  $h^2 \delta h$ . Ici encore, on peut passer formellement à la limite  $\delta h \rightarrow 0$  et introduire une fonction  $V(h)$  de la variable continue  $h$  donnant le volume de liquide ;  $V(h)$  obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dV}{dh} = Ah^2 , \quad (2.17)$$

où la constante  $A$  dépend des caractéristiques géométriques du verre. De (2.17), on déduit immédiatement que le volume de liquide augmente comme le cube de la hauteur<sup>6</sup>.

Autre exemple : l'équilibre d'une colonne de gaz isotherme à la température absolue  $T$ . Soit la tranche de gaz d'épaisseur  $dz$ , située à l'altitude  $z$  au-dessus du fond du tube (de section  $S$ ) ; si  $n(z)$  est le nombre de molécules par unité de volume (densité de molécules), et si  $m$  est la masse de chacune d'entre elles, la masse de cette tranche est  $n(z)(Sdz)m$ . Cela étant, si  $P(z)$  est la pression à l'altitude  $z$ , l'équilibre *mécanique* de la tranche de gaz s'écrit  $P(z)S = P(z+dz)S + mgn(z)Sdz$ . L'équilibre *thermique* du gaz (considéré comme un gaz parfait) se traduit par l'équation d'état  $PV = Nk_B T$  ( $N$  = nombre de molécules dans le volume  $V$ ,  $k_B$  = constante de Boltzmann), soit  $P(z) = k_B T n(z)$ , d'où finalement après élimination de la pression :

$$k_B T [n(z+dz) - n(z)] = -mgn(z)dz \iff \frac{dn}{dz} = -\frac{mg}{k_B T} n(z) , \quad (2.18)$$

qui redonne (après intégration) la formule barométrique bien connue,  $n(z) = n(z_0)e^{-\frac{mg}{k_B T}(z-z_0)}$ .

## 2.3 Importance des conditions auxiliaires (conditions initiales, conditions aux limites)

Les quelques exemples précédents montrent comment les équations différentielles peuvent survenir très naturellement en Physique. Cependant, un problème de Physique *bien posé* ne peut se traduire exclusivement par une équation différentielle, laquelle doit être complétée par des informations inhérentes à la question que l'on se pose. En effet, un problème bien posé a par définition une et une seule solution, alors que la seule considération

<sup>5</sup>On laisse de côté les expériences conduites avec les nanocircuits, comme on sait en faire depuis peu. . .

<sup>6</sup>résultat que l'on peut aussi obtenir par un simple argument d'échelle, sans écrire d'équation différentielle.

d'une équation différentielle conduit à un nombre infini de solutions distinctes, puisque toute intégration apporte nécessairement une constante d'intégration arbitraire.

Revenons au verre conique et à l'éq. (2.17) ; en l'intégrant membre à membre, on obtient immédiatement :

$$V(h) = \frac{A}{3}h^3 + C, \quad (2.19)$$

où  $C$  est une constante d'intégration *quelconque* : toutes les fonctions d'expression (2.19) satisfont bien (2.17). Il doit donc exister une prescription, non encore énoncée, qui permet de trouver *la* solution. Cette prescription est ici triviale : le volume d'eau est nul si  $h = 0$ . Algébriquement, ceci se traduit par une équation pour la constante d'intégration :

$$V(h=0) = 0 \iff \left[ \frac{A}{3}h^3 + C \right]_{h=0} = 0 \iff C = 0, \quad (2.20)$$

d'où  $C = 0$  et la seule solution du problème,  $V(h) = \frac{A}{3}h^3$ , maintenant complètement déterminée. On constate qu'une seule condition supplémentaire est nécessaire et suffisante : c'est parce que l'équation différentielle est du 1<sup>er</sup> ordre (et qu'elle ne présente aucune bizarrerie – singularité – d'aucune sorte).

Pour un problème de dynamique à une dimension le long d'un axe  $Ox$ , l'équation fondamentale d'une bille de masse  $m$  est très généralement de la forme :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t); \quad (2.21)$$

comme l'équation est du second ordre (par rapport au temps), la solution (générale) est trouvée par deux intégrations successives, chacune d'entre elles apportant une constante d'intégration. Au total, trouver la solution du problème physique exige le recours à deux conditions qui doivent être précisées à part<sup>7</sup>. Dans le cas le plus courant, on donne de surcroît la position  $x$  et la vitesse  $v \equiv \dot{x}$  à un instant de référence, par exemple au départ du mouvement – c'est pourquoi on parle alors de *conditions initiales*. Pour une bille dans la pesanteur terrestre, le mouvement n'est évidemment pas le même selon que l'on lâche la bille (vitesse initiale nulle) ou qu'elle est lancée au départ vers le haut ! En termes plus explicites, si  $z$  est l'altitude comptée sur un axe dirigé positivement vers le haut, on a :

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg \quad (g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2) \quad (2.22)$$

soit par une première intégration  $\frac{dz}{dt} = -gt + C_1$ , puis une seconde :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2. \quad (2.23)$$

Ceci est la solution générale ; les deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  s'obtiennent par calage sur les conditions à préciser en plus. Par exemple, si  $z_0$  est l'altitude de départ (à  $t = 0$ , le moment où on déclenche le chronomètre) et  $v_0$  la vitesse (verticale) à ce même instant, on peut alors en plus écrire en faisant  $t = 0$  dans l'expression générale (2.23) :

$$z(t=0) = C_2 \iff C_2 = z_0, \quad \dot{z}(t=0) = C_1 \iff C_1 = v_0, \quad (2.24)$$

d'où la valeur des constantes d'intégration pour le problème complètement spécifié. On peut d'ailleurs spécifier autrement les conditions additionnelles requises : le point de départ de la bille étant toujours en  $z_0$ , on peut vouloir qu'à l'instant ultérieur  $t_1$ , la vitesse ait une valeur donnée  $v_1$ . Ceci se traduit par les deux équations :

$$z(t=0) \equiv C_2 = z_0, \quad \dot{z}(t_1) \equiv -gt_1 + C_1 = v_1, \quad (2.25)$$

d'où la solution dans ce cas :  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_1 + gt_1)t + z_0$  ; pour qu'il en soit ainsi, il faut donner à la bille la vitesse initiale  $v_1 + gt_1$ .

L'expression *conditions initiales* évoque irrésistiblement un problème où la variable est le temps. On conserve cette expression même lorsque ce n'est pas le cas : on parle<sup>8</sup> de *problème à conditions initiales* lorsque,

<sup>7</sup>À nouveau, deux conditions sont nécessaires et suffisantes, pourvu que la fonction  $F$  au second membre de (2.21) ne présente pas de singularités.

<sup>8</sup>On dit aussi que c'est le *Problème de Cauchy*.

outre l'équation différentielle, les valeurs de la fonction  $f(x)$  et de toutes ses dérivées  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(N-1)}(x)$  sont prescrites en un même point  $x_0$  :

$$f(x_0) = C_0, \quad f'(x_0) = C_1, \quad f''(x_0) = C_2, \quad \dots, \quad f^{(N-1)}(x_0) = C_{N-1}. \quad (2.26)$$

Il existe une autre façon (en un sens plus générale) de spécifier les  $N$  conditions requises pour assurer la détermination complète de la fonction inconnue : on donne  $N$  conditions en plusieurs points distincts<sup>9</sup>, et on parle<sup>10</sup> alors de *problème à conditions aux limites*. Quelle que soit la formulation adoptée pour un problème donné, les conditions auxiliaires doivent permettre de fixer toutes les constantes d'intégration arbitraires inhérentes à la résolution d'une équation différentielle – autrement, cela signifie que, pour une raison ou une autre, le problème physique est mal posé.

Notons que le(s) point(s) où ces conditions doivent être satisfaites ne correspondent pas forcément à une valeur finie de la variable. Par exemple, soit l'équation :

$$f''(x) = k^2 f(x) \quad (k \in \mathbb{R}_+). \quad (2.27)$$

On verra par la suite que la solution générale de cette équation est  $f(x) = Ae^{-kx} + Be^{+kx}$ , où  $A$  et  $B$  sont les constantes d'intégration. Cela étant, si le problème physique exige que la fonction reste finie quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors, nécessairement  $B = 0$ , ce qui fixe déjà l'une des deux constantes. En ajoutant que  $f$  doit prendre une valeur donnée  $f_0$  en  $x_0$ , on trouve la seule et unique solution :  $f(x) = f_0 e^{-(x-x_0)}$  (à nouveau, l'équation étant linéaire et du second ordre, il faut, et il suffit de, préciser deux conditions convenables distinctes). Dans un autre contexte physique, on peut vouloir que la solution ne diverge nulle part, ni en  $x = +\infty$ , ni en  $x = -\infty$ . Ces deux conditions donnent  $A = 0$  et  $B = 0$  : l'équation posée n'a alors d'autre solution physiquement acceptable que la solution triviale...

Notons aussi que pour un problème physique donné, les conditions auxiliaires peuvent s'exprimer plus fondamentalement par certaines *propriétés* de la fonction cherchée, lesquelles entraînent (éventuellement) que celle-ci doit prendre certaines valeurs en certains points. Par exemple, considérons à nouveau (2.27), mais en supposant que la variable  $x$  est confinée au demi-axe réel  $\mathbb{R}_+$ . La solution générale est toujours  $f(x) = Ae^{-kx} + Be^{+kx}$ , mais avec cette fois  $x \geq 0$  ; si le problème physique exige que la fonction ait sur  $\mathbb{R}_+$  une intégrale finie, alors nécessairement  $B = 0$  : l'une des deux constantes est ainsi fixée sans que l'on ait imposé une valeur particulière à la fonction (ou à l'une de ses dérivées) en un point particulier<sup>11</sup>.

Une question fondamentale est de savoir combien de conditions sont nécessaires pour assurer l'existence, et surtout l'unicité, de la solution d'une équation différentielle donnée. Dans la formulation en *conditions initiales* (Problème de Cauchy),  $f(x_0) = C_0$ , on dispose du résultat suivant.

Soit l'équation d'ordre un  $f'(x) = F(x, f)$  ; si la fonction  $F$  et sa dérivée partielle  $\frac{\partial F}{\partial f}$  sont continues dans un certain domaine  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  contenant les nombres  $x_0$  et  $f_0 \equiv f(x_0)$ , il existe une solution et une seule,  $f(x)$ , satisfaisant la condition  $f(x_0) = C_0$ . Géométriquement, ceci signifie qu'il existe une et une seule fonction  $f(x)$  dont le graphe passe par le point du plan de coordonnées  $x_0$  et  $y_0 = f_0$ , et dont la pente de la tangente est égale à  $F(x_0, f_0)$ . La généralisation à l'ordre  $N$  s'énonce comme suit. L'équation étant écrite sous la forme (2.31), si  $F, \frac{\partial F}{\partial f}, \frac{\partial F}{\partial f'}, \frac{\partial F}{\partial f''}, \dots, \frac{\partial F}{\partial f^{(N-1)}}$  sont des fonctions continues au voisinage de  $x_0, C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ , alors il existe une et une seule solution  $f(x)$  satisfaisant toutes les conditions initiales  $f(x_0) = C_0, f'(x_0) = C_1, f''(x_0) = C_2, \dots, f^{(N-1)}(x_0) = C_{N-1}$ .

Lorsque cette condition de continuité n'est pas satisfaite, la solution générale peut dépendre de plus de  $N$  constantes ; par exemple soit l'équation du premier ordre ( $N = 1$ )  $f'(x) = [f(x)]^{\frac{2}{3}}$  avec la condition initiale  $f(0) = 0$ , pour laquelle<sup>12</sup>  $F(f) = f^{\frac{3}{2}}$ . Ainsi posé, le problème a *deux* solutions :  $f(x) = 0$  et  $f(x) = (\frac{2x}{3})^{\frac{3}{2}}$ .

<sup>9</sup>C'est d'ailleurs ce qui a été fait pour arriver à (2.25).

<sup>10</sup>On dit aussi *conditions aux bords*.

<sup>11</sup>Bien sûr, l'exigence d'intégrabilité donne ici  $B = 0$ , et par voie de conséquence  $(Ae^{-kx})_{x=+\infty} = 0$ , soit finalement  $f(+\infty) = 0$  ; mais l'annulation à l'infini n'est nullement une condition nécessaire pour que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  existe et soit finie (exemple : l'intégrale de Gauss  $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ , qui vaut  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ). Dire que la fonction (continue) doit être intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  est une condition moins sévère qu'exiger son annulation à l'infini.

<sup>12</sup>Visiblement,  $F$  est continue en  $x = 0$  et  $f = 0$  mais  $\frac{\partial F}{\partial f} \equiv \frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}$  ne l'est pas.

De fait, la solution *générale* de cette équation du *premier* ordre est  $f(x) = \varepsilon(\frac{2}{3}x + C)^{\frac{3}{2}}$  et dépend de deux constantes,  $C$  et  $\varepsilon = \pm 1$ .

■ Plus formellement, on dispose aussi du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ , et soit  $F(x, y)$  une fonction à valeurs réelles de deux variables :

$$(x, y) \in I \times J \rightarrow F(x, y) \in \mathbb{R} . \quad (2.28)$$

Soit maintenant l'équation du premier ordre :

$$\frac{df}{dx} = F[x, f(x)] \quad (2.29)$$

complétée par la condition  $x_0 \in I, f(x_0) = f_0 \in J$ . Énoncé simplement dans sa version élémentaire, ce théorème affirme que si la fonction  $F$  est continue et satisfait la condition dite de Lipschitz :

$$\forall x \in I, \forall (y_1, y_2) \in J \times J, |F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2| \quad (2.30)$$

où  $k$  est une constante (positive), alors la solution de (2.29) existe et est unique  $\forall x \in I_{x_0}$  où  $I_{x_0}$  est un intervalle centré sur  $x_0$  et inclus dans  $I$ . En substance, ce théorème affirme donc que pour une équation du premier ordre, et avec les hypothèses énoncées, une seule condition est requise pour déterminer la solution.

Ce théorème se généralise au cas d'une équation d'ordre  $N > 1$  en notant qu'une telle équation peut toujours se ramener à un système différentiel d'ordre 1 pour  $N$  quantités scalaires, que l'on peut alors définir comme étant les composantes d'un certain vecteur dans un espace vectoriel de dimension  $N$ . Par exemple, soit l'équation du second ordre  $f''(x) = F(x, f, f')$  et définissons un vecteur  $\vec{V}$  dans  $\mathbb{R}^2$  de composantes  $c_1(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x), c_2(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f'(x)$ . Maintenant l'équation proposée s'écrit  $c'_1(x) = F(x, c_1, c_2)$ , avec  $c'_1 = c_2$  : c'est donc formellement un système différentiel du premier ordre pour les deux fonctions  $c_1$  et  $c_2$ , que l'on peut d'ailleurs écrire  $\frac{D\vec{V}}{dx} = \Omega \vec{V}$ ,  $\Omega$  étant un opérateur qui transforme le vecteur  $\vec{V}$  de composantes  $(c_1, c_2)$  dans le vecteur de composantes  $(c_2, F(x, c_1, c_2))$ . Ce système du premier ordre pour deux inconnues exige la connaissance de 2 conditions initiales. Pour une équation du genre :

$$\frac{d^N f}{dx^N} = F(x, f', f'', \dots, f^{(N-1)}) \quad (2.31)$$

on s'attend à la nécessité de  $N$  conditions initiales. C'est bien le cas, moyennant une généralisation de la notion de valeur absolue ( $|y_1 - y_2|$  apparaît dans la condition de Lipschitz) en une *norme*  $\|y_1 - y_2\|$  dans l'espace vectoriel ainsi défini. ■

Dans la formulation *conditions aux limites*, la nécessité de  $N$  et seulement  $N$  conditions auxiliaires est beaucoup moins évidente. Si on est capable de montrer, dans le cas considéré, que cette formulation est équivalente à un problème à conditions initiales, alors les théorèmes ci-dessus tirent d'affaire. Démontrer une telle équivalence est souvent un problème difficile.

■ Soit par exemple l'équation  $f'' + k^2 f = 0, (k \in \mathbb{R}_+)$  rencontrée quand on cherche les solutions dites *stationnaires* d'une corde vibrante de longueur  $L$  ( $f(x)$  désigne alors l'élongation transverse du point de la corde situé à l'abscisse  $x$ , telle qu'on l'observe en prenant une photo de la corde à un instant donné). La solution générale est  $f(x) = A \cos kx + B \sin kx$  ; si on impose à la corde d'avoir ses extrémités fixes (piano, violon, guitare, . . .), on peut écrire les deux relations  $f(x=0) = 0$  et  $f(x=L) = 0$  ; la première condition donne  $B = 0$ , ce qui permet d'écrire la seconde  $A \sin kL = 0$ . Comme on cherche la solution non triviale ( $f$  non-identiquement nulle alors que déjà  $B = 0$ ),  $A \neq 0$ , d'où  $\sin kL = 0$  : cette condition n'est satisfaite que si  $k$  est choisi dans un ensemble discret de valeurs bien définies<sup>13</sup>, soit  $n\frac{\pi}{L}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, la deuxième condition aux limites se traduit par une sévère restriction sur le paramètre  $k$ , non sur l'une constante d'intégration. En l'état actuel des choses, il y a non pas une mais une infinité de solutions, de la

<sup>13</sup>Ce phénomène constitue la *quantification* des états stationnaires d'une corde vibrante en Physique classique, et survient à toute occasion dans le cadre quantique.

forme  $A \sin(\frac{n\pi x}{L})$ . La constante  $A$  peut alors être fixée en donnant l'amplitude maximum de vibration à  $n$  fixé, mais une telle prescription ne correspond pas réellement au problème physique posé (voir ci-dessous).

Dans cet exemple, les deux conditions aux bords ne suffisent pas à assurer l'unicité de la solution, mais réduisent considérablement les valeurs possibles d'un paramètre de l'équation si l'on veut obtenir une solution non-triviale.

Il convient toutefois de noter que, s'agissant du problème physique d'une corde vibrante, l'équation  $f'' + k^2 f = 0$  n'en est pas à proprement parler l'équation fondamentale, mais seulement un produit dérivé. Ceci est d'ailleurs évident quand on réalise que la solution  $A \sin \frac{n\pi x}{L}$  est *statique* (i.e. indépendante du temps), alors qu'une corde vibrante... vibre !

En effet, l'équation dynamique décrivant complètement le mouvement de la corde doit porter sur une certaine fonction  $F(x, t)$  donnant à l'instant  $t$  l'écart à l'équilibre du point de la corde dont l'abscisse est  $x$  ; on montre que cette équation s'écrit :

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L} \quad (2.32)$$

où  $c$  est une certaine vitesse. Cette équation est dite *aux dérivées partielles*, puisqu'elle constitue une relation entre une fonction de plusieurs variables  $\Phi$  et ses dérivées partielles, et constitue ici *l'équation de propagation* pour la corde vibrante.

Une telle équation est en un sens infiniment plus complexe qu'une simple équation différentielle, et la théorie des équations aux dérivées partielles (acronyme usuel : EDP) ne sera pas abordée ici. Toutefois, compte tenu de la simplicité de (2.32), il est possible de comprendre comment on peut en trouver la solution unique correspondant à un problème physique bien posé.

Dans le cas présent, l'équation est linéaire, de sorte que toute combinaison linéaire de solutions est encore solution. Cherchons des solutions (particulières) sous la forme d'un produit où les variables espace et temps sont séparées :  $\Phi(x, t) = f(x)g(t)$  ; le report dans (2.32) donne :

$$\frac{1}{c^2} f(x) \frac{d^2 g}{dt^2} - g(t) \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \iff \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{g}}{g} = \frac{f''}{f}. \quad (2.33)$$

Le premier membre ne dépend que du temps, le second que de la coordonnée : une telle équation ne peut être satisfaite  $\forall x, \forall t$ , que si chacun des deux membres est en fait une certaine constante, que l'on pose égale à  $-k^2$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ , pour des raisons qui seront claires dans la suite. Dans ces conditions, on doit alors résoudre les deux équations :

$$\ddot{g} + k^2 c^2 g = 0 \quad \text{et} \quad f'' + k^2 f = 0. \quad (2.34)$$

Quand les extrémités de la corde sont fixées en  $x = 0$  et  $x = L$ , les seules valeurs possibles de  $k$  sont des multiples entiers de  $\frac{\pi}{L}$  (voir la discussion ci-dessus) :  $k = n \frac{\pi}{L} \equiv nk_1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Par ailleurs, l'équation pour  $g$  donne  $g(t) = A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}$ , avec  $\omega = kc$  (*relation de dispersion*). Au total, il existe des solutions particulières de la forme  $(A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}) \sin(nk_1 x)$ .

Cela étant, et l'équation étant linéaire, toute combinaison linéaire de telles solutions est encore solution. On écrit ainsi une solution très générale (on peut montrer que c'est *la solution générale*) de (2.32) sous la forme :

$$\Phi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n (A_+ e^{ink_1 ct} + A_- e^{-ink_1 ct}) \sin nk_1 x, \quad (2.35)$$

où les constantes  $C_n$  sont pour l'instant quelconques. Physiquement, comme toujours, il faut donner l'état initial de la corde (vitesse et position de chaque point de celle-ci) ; si au départ on donne un certain profil  $F(x, t = 0) \equiv F_0(x)$  à la corde et si celle-ci est abandonnée sans vitesse initiale, on peut écrire les deux conditions :

$$\Phi(x, t = 0) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n (A_+ + A_-) \sin nk_1 x = \Phi_0(x) \quad \forall x \in [0, L], \quad (2.36)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} \right)_{x, t=0} \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n (ink_1 c A_+ - ink_1 c A_-) \sin nk_1 x = 0 \quad \forall x \in [0, L]; \quad (2.37)$$



(2.37) donne  $A_+ = A_- (= A)$ , d'où l'écriture simplifiée de (2.36) :

$$2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} AC_n \sin n \frac{\pi}{L} x = F_0(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad . \quad (2.38)$$

Cette équation permet effectivement de trouver les constantes ( $AC_n$ ) (les seules pertinentes), comme on le verra au Ch.3 consacré aux séries de Fourier, et d'achever ainsi la construction de la solution satisfaisant les conditions auxiliaires prescrites.

Au total, le problème physique bien posé (considération de l'équation fondamentale et donnée complète de l'état initial de la corde) a une et une seule solution, comme il se doit. ■

Comme très souvent, les théorèmes d'existence de la solution ne fournissent aucune méthode pour trouver celle-ci : savoir qu'elle existe est un acquis indéniable, mais il reste à trouver la(es) recette(s) permettant de la trouver effectivement.

## 2.4 Classification des équations différentielles

Il est d'usage, parce que très utile en pratique et fondamental conceptuellement, de distinguer deux grandes catégories d'équations différentielles : les équations linéaires et les équations non-linéaires.

Une équation est linéaire si la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent au plus au premier degré, et sans se multiplier les unes les autres. Dans tous les autres cas, l'équation est dite non-linéaire. Ainsi, l'équation  $f'' + 3f = \cos x$  est une équation linéaire, alors que  $f(x)f'(x) + x = 0$  est non-linéaire, tout comme  $\frac{1}{[f(x)]^2} = f'(x)$  ou encore  $\sin[f'(x)] = x$ , etc.

Pour les équations linéaires, on dispose en principe d'une méthode générale de résolution, qui sera rappelée ci-dessous. Rien de tel n'existe pour les équations non-linéaires, sauf pour certaines équations remarquables (e.g. *équation de Bernoulli*, *équation de Riccati*), qui seront mentionnées en temps utile, et dont on donnera la méthode spécifique de résolution.

## 2.5 Équations linéaires

Par définition de la linéarité, la forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $N$  est la suivante :

$$\boxed{\sum_{n=0}^N a_n(x) \frac{d^n f}{dx^n} = \sigma(x)} \quad (2.39)$$

Par référence à la notation de (2.31), on voit que la fonction  $F$  est ici :

$$F(x, f, f', \dots, f^{(N-1)}) \stackrel{\text{déf}}{=} - \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x) f^{(n)}(x) + \phi(x) \quad , \quad (2.40)$$

où  $p_n(x) = \frac{a_n(x)}{a_N(x)}$  et  $\phi(x) = \frac{\sigma(x)}{a_N(x)}$ .  $F$  est donc une forme linéaire des  $f^{(n)}$  ( $0 \leq n \leq N-1$ ), qui est une fonction continue. Dès lors, la solution du problème à conditions initiales existe et est unique si  $x_0$  est un point où toutes les fonctions  $p_n$  et  $\phi$  sont elles-mêmes continues. Autrement dit, connaître  $N$  conditions initiales en un point  $x_0$ , qui n'est singulier pour aucune des fonctions  $p_n(x)$ , donne ici l'assurance qu'il existe une et une seule solution satisfaisant l'ensemble de ces conditions initiales.

Le second membre de (2.39) est une fonction donnée quelconque, souvent appelée *source*. (2.39) est l'écriture *canonique* où tout ce qui dépend explicitement de  $f$  est rassemblé au premier membre, et autorise

une sous-classification : si  $\sigma \equiv 0$ , l'équation est dite *homogène* (ou “sans second membre”) : cette qualification rappelle le fait qu'alors si  $f(x)$  est une solution,  $\lambda f(x)$  est encore solution, quelle que soit la constante  $\lambda$ . Si  $\sigma$  est non-identiquement nulle, l'équation est dite *inhomogène* (“avec second membre”). Pour simplifier les notations, on peut définir l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}$  comme :

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{n=0}^N a_n(x) \frac{d^n}{dx^n}, \quad (2.41)$$

ce qui permet d'écrire (2.39) sous la forme compacte :

$$\mathcal{L}f = \sigma. \quad (2.42)$$

La propriété fondamentale des équations linéaires homogènes est la suivante : si  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont deux solutions, alors toute combinaison linéaire à coefficients constants  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  est aussi solution. En effet, la dérivation est elle-même une opération linéaire :

$$\frac{d^n}{dx^n}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \frac{d^n f_1}{dx^n} + \lambda_2 \frac{d^n f_2}{dx^n}, \quad (2.43)$$

de sorte que si chaque  $f_i$  est solution ( $\mathcal{L}f_i = 0$ ), alors  $\mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{L}f_1 + \lambda_2 \mathcal{L}f_2 = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0$ .

## 2.5.1 Équations linéaires homogènes

### Équations à coefficients constants

D'après ci-dessus, la forme générale d'une telle équation est :

$$\boxed{\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n f}{dx^n} = 0} \quad (2.44)$$

où tous les  $a_n$  sont des constantes. L'intégration est immédiate, en notant que la fonction exponentielle est la seule fonction telle que toutes ses dérivées lui sont proportionnelles :

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x}. \quad (2.45)$$

Dès lors, si on reporte  $f(x) = e^{\alpha x}$  dans (2.44), on obtient :

$$\left( \sum_{n=0}^N a_n \alpha^n \right) e^{\alpha x} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}. \quad (2.46)$$

Cette dernière équation est satisfaite ssi  $\alpha$  est un zéro du polynôme  $P_N(\alpha) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{n=0}^N a_n \alpha^n$ , appelé *polynôme caractéristique* ; par le théorème fondamental de l'algèbre, ce polynôme de degré  $N$  a  $N$  zéros complexes  $\alpha_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, N$  de sorte que toutes les exponentielles  $e^{\alpha_r x}$  sont solutions<sup>14</sup> de (2.44) ; comme l'équation est linéaire, toute combinaison linéaire de ces solutions *particulières* est aussi solution. Ainsi, la fonction :

$$\boxed{f(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{r=1}^N \lambda_r e^{\alpha_r x}} \quad (2.47)$$

<sup>14</sup>Lorsque tous les zéros du polynôme  $P_N$  sont simples, toutes les solutions sont de nature purement exponentielle. S'il existe un zéro multiple d'ordre  $\nu$  ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\nu = \alpha$ ), les  $\nu$  solutions particulières correspondantes sont les monômes  $x^\mu e^{\alpha x}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1$ . Par exemple, l'équation  $f''(x) = 0$  donne  $P_2(\alpha) \equiv \alpha^2$  dont la racine double ( $\nu = 2$ ) est  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  ; il existe deux solutions particulières  $x^0$  ( $\equiv 1$ ) et  $x^1$  ( $\equiv x$ ) (et, en effet, la solution générale est bien  $f(x) = \lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times x$ ). Pour  $f''' + k f'' = 0$ , on  $P_3(\alpha) \equiv \alpha^3 + k\alpha^2$  et la solution générale est  $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 e^{-kx}$  ; pour  $f'' - 2k f' + k^2 f = 0$ , la solution générale est  $(\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{kx}$ .

est solution de l'équation (2.44), quelles que soient les constantes  $\lambda_r$ . Un peu de réflexion permet de se convaincre que toutes les solutions de (2.44) sont forcément de cette forme : dans le cas où  $P_N$  n'a pas de zéros multiples, (2.47) est en fait la solution la plus générale, appelée simplement *solution générale*. Un fait majeur : on voit que pour connaître la solution générale, il faut, et il suffit de, connaître  $N$  solutions particulières, linéairement indépendantes évidemment<sup>15</sup>. Cette affirmation permet d'entrevoir la possibilité de doter l'ensemble des solutions de la structure d'espace vectoriel.

Cela étant, et parce que l'équation est linéaire d'ordre  $N$ , disposer de  $N$  conditions initiales permet de déterminer l'unique solution relative à un problème de Physique bien posé. L'écriture explicite de ces  $N$  conditions fournit un système linéaire  $N \times N$  pour les  $N$  inconnues  $\lambda_r$ , dont l'inversion (la résolution) fournit ces dernières et donc la solution cherchée.

Pour terminer, traitons explicitement le cas  $N = 2$  ; l'équation la plus générale avec  $a_{N=2} \neq 0$  peut toujours se mettre sous la forme :

$$f''(x) + 2pf'(x) + qf(x) = 0, \quad (2.48)$$

où les constantes  $p$  et  $q$  sont supposées réelles pour simplifier la discussion ultérieure<sup>16</sup>. On se donne les conditions  $f(0) = f_0$  et  $f'(0) = f'_0$ . Le polynôme caractéristique  $P_2(\alpha)$  est  $\alpha^2 + 2p\alpha + q$ , dont les zéros sont soit réels, soit complexes conjugués deux à deux puisque  $p$  et  $q$  sont réels<sup>17</sup>.

- $p^2 - q > 0$

Alors, les deux zéros de  $P_2$  sont réels et égaux à  $\alpha_{\pm} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$ . La solution générale de l'équation est une combinaison linéaire des deux exponentielles  $e^{(-p \pm \sqrt{p^2 - q})x}$  ; on peut donc l'écrire :

$$f(x) = e^{-px} \left( Ae^{+\sqrt{p^2 - q}x} + Be^{-\sqrt{p^2 - q}x} \right). \quad (2.49)$$

Les conditions initiales permettent d'écrire :

$$f_0 = A + B, \quad f'_0 = A(-p + \sqrt{p^2 - q}) + B(-p - \sqrt{p^2 - q}). \quad (2.50)$$

La résolution de ce système d'équations fournit les deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$  :

$$A = \frac{(p + \sqrt{p^2 - q})f_0 + f'_0}{2\sqrt{p^2 - q}}, \quad B = \frac{(-p + \sqrt{p^2 - q})f_0 - f'_0}{2\sqrt{p^2 - q}}. \quad (2.51)$$

- $p^2 - q < 0$

Alors, les deux zéros sont complexes,  $\alpha_{\pm} = -p + i\sqrt{q - p^2}$  et la solution générale est :

$$f(x) = e^{-px} \left( Ae^{+i\sqrt{q - p^2}x} + Be^{-i\sqrt{q - p^2}x} \right), \quad (2.52)$$

ou :

$$f(x) = e^{-px} \left[ (A + B) \cos(\sqrt{q - p^2}x) + i(A - B) \sin(\sqrt{q - p^2}x) \right], \quad (2.53)$$

avec maintenant :

$$f_0 = A + B, \quad f'_0 = A(-p + i\sqrt{q - p^2}) + B(-p - i\sqrt{q - p^2}), \quad (2.54)$$

d'où :

$$A = \frac{(p + i\sqrt{q - p^2})f_0 + f'_0}{2i\sqrt{q - p^2}}, \quad B = \frac{(-p + i\sqrt{q - p^2})f_0 - f'_0}{2i\sqrt{q - p^2}}. \quad (2.55)$$

<sup>15</sup>Deux fonctions  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont linéairement indépendantes ssi leur rapport n'est pas constant, autrement dit si elles ne sont pas proportionnelles l'une à l'autre  $\forall x$  ; dans ces conditions, on ne peut avoir  $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$  que si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Plus généralement,  $N$  fonctions  $f_n(x)$  sont linéairement indépendantes ssi la seule façon d'avoir  $\sum_{n=1}^N \lambda_n f_n(x) = 0 \forall x$  est que toutes les constantes  $\lambda_n$  soient nulles.

<sup>16</sup>Le cas où  $p$  et  $q$  sont complexes se traite de la même façon, toutes les expressions écrites par la suite ayant également un sens dans le champ complexe.

<sup>17</sup>La considération successive des différents cas ci-dessous n'est pas absolument nécessaire, si on sait manipuler la fonction  $\sqrt{z}$ , où  $z$  est complexe, précisément définie en ajoutant qu'elle vaut  $+1$  au point  $+1$  de l'axe réel.

- $p^2 - q = 0$

Dans ce cas, le zéro de  $P_2(\alpha)$  est double et égal à  $-p$ . Les deux fonctions  $e^{-px}$  et  $xe^{-px}$  sont des solutions particulières, de sorte que la solution générale est  $(C + Dx)e^{-px}$ . Ceci peut aussi se retrouver en partant de la forme générale de la solution quand  $p^2 \neq q$ , et en faisant tendre vers zéro la différence  $p^2 - q$ . Par exemple, revenant à (2.51), la solution est

$$f(x) = \frac{e^{-px}}{2\sqrt{p^2 - q}} \left[ [(p + \sqrt{p^2 - q})f_0 + f'_0]e^{+\sqrt{p^2 - q}x} + [(-p + \sqrt{p^2 - q})f_0 - f'_0]e^{-\sqrt{p^2 - q}x} \right] ; \quad (2.56)$$

Il suffit de poser  $q = p^2 - \varepsilon$  et de faire des développements limités en  $\varepsilon$  pour retrouver la solution du genre  $(C + Dx)e^{-px}$ , avec  $C = f_0$  et  $D = f'_0 + pf_0$ .

En particulier, les équations suivantes (avec  $k \in \mathbb{R}$ ) ont les solutions générales :

$$f''(x) - k^2 f(x) = 0 \iff f(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} , \quad (2.57)$$

et

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \iff f(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = C \cos kx + D \sin kx \quad (2.58)$$

### Équations à coefficients variables

C'est par définition le cas lorsque les coefficients de l'équation dépendent de la variable. La forme générale de l'équation est alors :

$$\boxed{\sum_{n=0}^N a_n(x) \frac{d^n f}{dx^n} = 0} \quad (2.59)$$

la dépendance effective des coefficients  $a_n$  par rapport à la variable  $x$  modifie du tout au tout la difficulté technique du problème. En effet, une exponentielle du genre  $e^{\alpha x}$  n'est plus solution puisque le report dans (2.59) donne l'équation  $(\sum_{n=0}^N a_n(x) \alpha^n) e^{\alpha x} = 0$ , qui ne peut visiblement pas être satisfaite  $\forall x$  avec des  $a_n(x)$  variables.

Toutefois, grâce au caractère linéaire de l'équation, la solution générale de cette équation a encore la forme d'une combinaison linéaire de fonctions remarquables :

$$\boxed{f(x) = \sum_{r=1}^N \lambda_r E_r(x)} \quad (2.60)$$

où les  $E_r(x)$  sont  $N$  solutions particulières (linéairement indépendantes) de (2.59). Ainsi, grâce à la linéarité, l'ensemble des solutions peut à nouveau être muni d'une structure d'espace vectoriel. La difficulté, quand les coefficients sont variables, consiste à trouver effectivement ces  $N$  solutions  $E_r(x)$ .

La procédure à suivre pour trouver les  $N$  solutions  $E_r(x)$  est en grande partie inspirée par l'analyse préalable des points singuliers de l'équation différentielle<sup>18</sup>, éclairant le choix d'une méthode ou d'une autre pour essayer de trouver ces solutions particulières.

<sup>18</sup>Très brièvement : on classe les singularités d'une équation différentielle linéaire en examinant les singularités (au sens de la théorie des fonctions analytiques) des coefficients apparaissant dans (2.60), réécrite de façon canonique (après division par  $a_N(x)$ ) :

$$f^{(N)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x) = 0 ; \quad (2.61)$$

On dit que  $x_0$  est un point singulier *régulier* si toutes les quantités  $(x - x_0)^k p_{n-k}(x)$  sont analytiques dans un voisinage de  $x_0$ , alors que certains coefficients  $p_m(x)$  ont une singularité en  $x_0$ . La définition s'étend au cas du point à l'infini en effectuant le changement de variable  $X = \frac{1}{x}$  ; un point qui n'est pas régulier est dit *irrégulier* (pour plus de détails, voir par exemple l'ouvrage de BENDER et ORSZAG, ch.3).

Lorsque les  $a_n(x)$  sont des polynômes simples, une méthode systématique consiste à chercher les solutions sous la forme d'une série entière  $\sum_{m \in \mathbb{N}} c_m (x - x_0)^m$ , éventuellement multipliée par le monôme  $(x - x_0)^\mu$ , où  $\mu$  est un exposant à trouver (on cherche alors  $f(x)$  sous la forme  $(x - x_0)^\mu \sum_{m \in \mathbb{N}} c_m (x - x_0)^m$ ). Le report dans l'équation différentielle suivie de l'identification des termes de même puissance en  $x$  fournit alors une relation de récurrence entre les coefficients  $c_m$ , laquelle permet en principe de les trouver tous à partir des quelques premiers. Ces derniers sont déterminés *in fine* par application des conditions auxiliaires. On connaît quelques équations remarquables (équation de Legendre, de Weber, etc) dont les solutions apparaissent souvent en Physique et ont fait l'objet d'une étude approfondie, et répertoriée dans les ouvrages.

Lorsque les coefficients  $a_n(x)$  sont des fonctions plus compliquées, il n'existe pas de méthode générale permettant de trouver les solutions particulières, mais on connaît quelques techniques, parfois spécifiques d'un certain type d'équation. Il en va ainsi pour les équations d'Euler<sup>19</sup>, caractérisées par le fait qu'elles sont invariantes dans le changement d'échelle  $x \rightarrow ax$  (par exemple :  $f''(x) + \frac{1}{4x^2} f(x) = 0$ ). En posant  $x = e^t$ , on est ramené à une équation à coefficients constants pour la fonction  $\Lambda$  telle que  $\Lambda(t) \stackrel{\text{d'éf}}{=} f(e^t)$ . Une autre façon de faire est de substituer tout simplement  $f(x) = x^r$  dans l'équation donnée : on obtient alors un polynôme de degré  $N$ , dont les zéros sont les valeurs de  $r$  possibles<sup>20</sup>.

Une autre technique utile (surtout pour une équation du second ordre) est la réduction de l'ordre. Supposons que, par chance et astuce, on ait trouvé une solution particulière  $E_1(x)$ , satisfaisant donc  $\mathcal{L}E_1(x) = 0$ . Posons alors  $f(x) = E_1(x)g(x)$  ; chaque terme  $\frac{d^n}{dx^n} f$  de l'équation différentielle donne  $n + 1$  termes, l'un d'entre eux étant  $(\frac{d^n}{dx^n} E_1)g$ . La somme de tous ces termes est  $(\mathcal{L}E_1)g$ , qui est nul puisque  $\mathcal{L}E_1(x) = 0$ . En définitive, on trouve pour  $g$  une équation différentielle ne contenant que les dérivées  $g', g'', \dots, g^{(N)}$ , où la fonction  $g$  elle-même n'apparaît pas : c'est donc une équation d'ordre  $N - 1$  pour l'inconnue  $g'$ . En ayant trouvé la solution générale, il reste à effectuer une intégration pour obtenir  $g(x)$ , puis la solution générale  $f(x)$ .

Notons que les équations du premier ordre ne posent pas de problème de ce point de vue. En effet, une telle équation peut toujours se mettre sous la forme  $f'(x) + p_0(x)f(x) = 0$ , et est de fait une équation séparable (voir sous-section 2.7.1). Pour en trouver la solution générale, on écrit successivement :

$$\boxed{f'(x) + p_0(x)f(x) = 0} \iff \frac{df}{f} = -p_0(x) dx \iff \ln \frac{f(x)}{A} = - \int p_0(x) dx ; \quad (2.62)$$

d'où la solution générale  $f(x) = Ae^{-\int p_0(x) dx}$ . Si on donne  $f(x_0)$  par ailleurs, la solution est :

$$\boxed{f(x) = f(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_0(x') dx'}} \quad (2.63)$$

C'est pourquoi la réduction de l'ordre d'une équation du second ordre est une technique *a priori* séduisante !

Une fois trouvées, d'une façon ou d'une autre, les  $N$  solutions particulières  $E_r(x)$ , la détermination complète se fait par utilisation des conditions auxiliaires. Par exemple, pour un problème à conditions initiales posé comme en (2.26), on peut écrire un système linéaire  $N \times N$  pour les  $N$  coefficients  $\lambda_r$ . Le déterminant du système est formé avec les quantités  $E_r^{(p)}(x_0)$  ( $p = 0, 1, \dots, N - 1, r = 1, 2, \dots, N$ ) ; c'est une certaine fonction<sup>21</sup> de  $x_0, W(x_0)$ . Une condition nécessaire pour que le problème soit bien posé est donc  $W(x_0) \neq 0$  ; il peut arriver que cette condition ne soit pas suffisante, notamment si  $x_0$  est un point singulier.

<sup>19</sup>À ne pas confondre avec l'équation d'Euler (ou d'Euler - Lagrange) qui traduit l'application d'un principe variationnel.

<sup>20</sup>S'il existe un zéro multiple d'ordre  $\nu$ ,  $\alpha$ , les solutions particulières sont de la forme  $x^r, x^r(\ln x), x^r(\ln x)^2, \dots, x^r(\ln x)^{\nu-1}$ .

<sup>21</sup>Cette fonction est appelée *Wronskien*. Pour  $N = 2$ , le wronskien de deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  est :

$$W_{f_1 f_2}(x) \stackrel{\text{d'éf}}{=} f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x) ; \quad (2.64)$$

c'est visiblement un certain déterminant ; le wronskien de deux fonctions non linéairement indépendantes est identiquement nul.

Si le wronskien n'est pas nul en un certain point  $x_1$  de tout intervalle où les coefficients  $a_n(x)$  sont continus, il ne s'annule nulle part dans cet intervalle, et inversement.

## 2.5.2 Équations linéaires inhomogènes

La forme générale est :

$$\boxed{\sum_{n=0}^N a_n(x) \frac{d^n f}{dx^n} = \sigma(x) \iff \mathcal{L}f = \sigma} \quad (2.65)$$

où  $\sigma(x)$  est une fonction (source) donnée. La solution générale de cette équation est la somme d'une solution particulière  $f_{\text{part}}$  et de la solution générale de l'équation homogène associée,  $f_{\text{gen homo}}$ . En effet, avec  $f = f_{\text{part}} + f_{\text{gen homo}}$ , le premier membre de (2.65) est :

$$\mathcal{L}(f_{\text{gen homo}} + f_{\text{part}}) = \mathcal{L}f_{\text{gen homo}} + \mathcal{L}f_{\text{part}} \equiv 0 + \mathcal{L}f_{\text{part}} , \quad (2.66)$$

et comme  $f_{\text{part}}$  est une solution particulière, on a  $\mathcal{L}f_{\text{part}} = \sigma$  : l'équation est (2.65) donc bien satisfaite par la somme  $f_{\text{part}} + f_{\text{gen homo}}$ . Comme celle-ci dépend finalement de  $N$  constantes d'intégration, c'est bien la solution la plus générale de l'équation inhomogène (2.65). En définitive, la difficulté supplémentaire pour une équation inhomogène est de trouver *une* solution particulière<sup>22</sup>.

Pour une équation du premier ordre, les choses sont simples<sup>23</sup>. Soit :

$$a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x) = \sigma(x) . \quad (2.67)$$

On pose  $f(x) = e^{-\int p_0(x) dx} g(x)$  où  $p_0 = \frac{a_0}{a_1}$ . Le report dans (2.67) donne :

$$g'(x) = \frac{\sigma(x)}{a_1(x)} e^{+\int p_0(x) dx} , \quad (2.68)$$

d'où  $g(x)$  explicitement – à condition de savoir calculer l'intégrale  $\int \frac{\sigma(x)}{a_1(x)} e^{+\int p_0(x) dx} dx$ . La solution est alors :

$$f(x) = e^{-\int p_0(x) dx} \left( \int \frac{\sigma(x)}{a_1(x)} e^{+\int p_0(x) dx} dx + C \right) , \quad (2.69)$$

soit :

$$f(x) = Ce^{-\int p_0(x) dx} + e^{-\int p_0(x) dx} \int \frac{\sigma(x)}{a_1(x)} e^{+\int p_0(x) dx} dx ; \quad (2.70)$$

le premier terme est bien la solution générale de l'équation homogène associée ( $a_1 f'(x) + a_0(x)f(x) = 0$ ). Quant au second, on vérifie facilement qu'il est *une* solution particulière de l'équation complète avec second membre, (2.67). Une autre expression plus agréable de (2.70) est :

$$f(x) = f(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_0(x') dx'} + \int_{x_0}^x \frac{\sigma(x')}{a_1(x')} e^{-\int_{x'}^x p_0(x'') dx''} dx' . \quad (2.71)$$

Cette technique se généralise sans grandes complications pour le second ordre.

## 2.6 Équations non-linéaires

Les équations non-linéaires sont “infiniment” plus difficiles à résoudre en général que les équations linéaires (d'ailleurs, rares sont les équations non-linéaires dont on connaît les (des ?) solutions). De surcroît, les théorèmes d'existence et d'unicité sont difficiles, notamment en raison d'une particularité assez extraordinaire, appelée *apparition de singularités spontanées*. Alors que pour une équation linéaire le simple examen de l'équation elle-même<sup>24</sup> permet de dresser la liste exhaustive (et la nature) de toutes les singularités des solutions, ceci n'est plus vrai pour une équation non-linéaire : les singularités des solutions dépendent souvent des conditions initiales

<sup>22</sup>Une méthode alternative à celle esquissée dans la suite est la méthode dite des *fonctions de Green*.

<sup>23</sup>Cette méthode est parfois appelée *variation de la constante*.

<sup>24</sup>donc sans aucune référence aux conditions auxiliaires.

■ Les deux types d'équations linéaires/non-linéaires se rattachent à des mondes très différents. On peut dire que les équations linéaires décrivent des phénomènes très banals, ne conduisant à aucune vraie surprise – mais jouent néanmoins un rôle de tout premier plan en Physique, en particulier quand on veut décrire la réponse d'un système à une petite perturbation (Théorie de la réponse linéaire). Au contraire, les équations non-linéaires contiennent une richesse incommensurable, et engendrent parfois des solutions exotiques, présentant de surcroît une extrême variabilité par rapport à des changements *a priori* anodins, voire infimes. On rencontrera quelques exemples dans la suite (voir ch.5), mais il est utile de marquer dès maintenant la différence spectaculaire sur un exemple très simple.

L'équation linéaire :

$$f'(x) + \frac{1}{x-1}f(x) = 0 \quad (2.72)$$

a pour solution<sup>25</sup>  $f(x) = \frac{A}{1-x}$ , où  $A$  est la constante d'intégration, qui peut être fixée en imposant la valeur de  $f$  en un point, par exemple  $f(0)$  et alors  $A = f(0)$  ; de ce fait, et avec  $f(0) = 1$ , la solution est :

$$f(x) = \frac{f(0)}{1-x} = \frac{1}{1-x} ; \quad (2.73)$$

noter que le facteur  $A = f(0)$  ne change en rien la nature de la solution, et notamment n'affecte pas ses singularités, ici une unique divergence en  $x = 1$  – la simple vision de l'équation (5.16) permet d'ailleurs de deviner que  $x = 1$  est un point particulier, où il se passe quelque chose de remarquable.

Par contraste, soit l'équation non-linéaire :

$$f'(x) = [f(x)]^2 \quad (2.74)$$

dont la solution générale est  $f(x) = \frac{1}{C-x}$ ,  $C$  étant la constante d'intégration. À nouveau, en prescrivant d'avance la valeur de  $f$  en  $x = 0$ , on a  $f(0) = \frac{1}{C}$ , d'où la solution dans ces conditions :

$$f(x) = \frac{f(0)}{1 - xf(0)} = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } f(0) = 1 . \quad (2.75)$$

Ainsi, en prenant  $f(0) = 1$  dans les deux cas, les deux équations (5.16) et (5.17) ont exactement la même solution – et pourtant, la considération de (5.17) ne permet nullement de soupçonner que  $x = 1$  est un point remarquable : une singularité apparaît spontanément dans la solution, que l'on n'aurait pas deviné en regardant l'équation (c'est pourquoi on parle de *singularité spontanée* – la *spontanéité* vient du fait que la singularité n'est pas inscrite dans l'équation différentielle). Choisissons une autre condition initiale, par exemple  $f(0) = 2$  ; la solution de (5.17) est alors  $\frac{2}{1-2x}$  : le simple changement de condition initiale a profondément modifié la solution, qui diverge maintenant en  $x = \frac{1}{2}$  et non plus en  $x = 1$ ... Ainsi, la singularité de la solution dépend de la condition initiale – et on comprend qu'elle ne peut être visible sur l'équation elle-même puisque cette dernière ne fait référence en soi à *aucune* condition initiale ■

- Une équation non-linéaire étant donnée, il est parfois possible de se ramener à une équation linéaire par un changement de variable et/ou de fonction inconnue, mais ceci reste l'exception<sup>26</sup>.

Ces difficultés rendent encore plus précieuse la connaissance de quelques équations non-linéaires remarquables, dont on donne ci-dessous les plus fréquentes. Face à une équation non-linéaire quelconque, il faut

<sup>25</sup>obtenue par intégration comme en (2.62).

<sup>26</sup>Par exemple, l'équation fondamentale de la Dynamique pour le problème de Kepler (un point matériel de masse  $m$  soumise à la force  $\frac{K}{r^2}$ ) se traduit d'abord par les deux équations :

$$m r^2 \dot{\theta} = J \text{ (constance du moment cinétique) } , \quad m \ddot{r} = \frac{J^2}{m r^3} + \frac{K}{r^2} . \quad (2.76)$$

L'élimination de l'angle  $\theta$  fournit l'équation fermée pour la fonction  $r(\theta)$  :

$$r'' - \frac{2}{r} r'^2 - r - \frac{K m}{J^2} r^2 = 0 . \quad (2.77)$$

Cette équation est non-linéaire, mais en posant  $\frac{1}{r} = u$ , on trouve  $u'' + u = -\frac{K m}{J^2}$ , qui s'intègre immédiatement et donne finalement la solution  $r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos \theta}$  ( $p$  et  $e$  sont des constantes incorporant les conditions initiales).

en tout premier lieu élucider si, oui ou non, elle peut se ramener à l'une de ces équations *standard* (par un changement de variable et/ou de fonction inconnue), ou éventuellement en tant qu'approximation. Par ailleurs, la recherche d'intégrale(s) première(s) permet parfois de réduire l'ordre d'une équation (voir la sous-section 2.8.3 où cette possibilité existe et est exploitée).

## 2.7 Quelques équations remarquables

Certaines équations remarquables, qui apparaissent parfois en Physique, relèvent d'un traitement spécifique. On en donne ci-dessous quelques exemples (inventaire non exhaustif).

### 2.7.1 Équations à variables séparées

Bien qu'il existe des équations linéaires à variables séparées, c'est essentiellement dans le cas non-linéaire que la méthode ci-dessous est utile<sup>27</sup>.

Une équation du premier ordre pour la fonction inconnue  $f(x)$  est dite à *variables séparées*, ssi on peut la mettre sous la forme ( $df \equiv f'(x)dx$ ) :

$$\boxed{\phi(x)dx = \psi(f) df} \quad (2.78)$$

Une telle équation s'intègre en :

$$\int \phi(x)dx = \int \psi(f) df + C . \quad (2.79)$$

Deux cas particuliers importants en pratique :

1.  $\psi(f) \equiv 1$ , auquel cas :

$$\phi(x)dx = df \iff f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \phi(x')dx' . \quad (2.80)$$

2.  $\phi(f) \equiv 1$ , auquel cas ( $f_0 = f(x_0)$ ) :

$$x - x_0 = \int_{f_0}^f \psi(f') df' \equiv A(f) , \quad (2.81)$$

fournissant la solution sous la forme inverse ; formellement :

$$f(x) \equiv A^{-1}(x - x_0) . \quad (2.82)$$

### 2.7.2 Équation de Bernoulli

L'écriture canonique de l'équation de Bernoulli est :

$$\boxed{a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)[f(x)]^m} \quad (2.83)$$

en posant  $g(x) = [f(x)]^{1-m}$ , on trouve l'équation linéaire :

$$\frac{1}{1-m}a(x)g'(x) + b(x)g(x) = c(x) ; \quad (2.84)$$

cette équation s'intègre comme indiqué dans la sous-section 2.5.2.

<sup>27</sup>Elle vaut évidemment tout autant dans le cas linéaire !



### 2.7.3 Équation de Riccati

L'écriture canonique de l'équation de Riccati est :

$$\boxed{f'(x) = a(x)[f(x)]^2 + b(x)f(x) + c(x)} \quad (2.85)$$

Si  $f_{\text{part}}$  est une solution particulière, le changement de fonction  $f(x) = f_{\text{part}}(x) + \frac{1}{g(x)}$  produit l'équation linéaire pour la nouvelle inconnue  $g(x)$  :

$$g'(x) + [2a(x)f_{\text{part}}(x) + b(x)]g(x) + a(x) = 0 ; \quad (2.86)$$

à nouveau, cette équation s'intègre comme décrit dans la sous-section 2.5.2.

## 2.8 Exemples

On donne ci-dessous trois exemples de traitement d'équations non-linéaires, que l'on retrouvera dans la suite du cours sous une forme ou sous une autre.

### 2.8.1 Exemple 1 : le problème proie - prédateur

En 1838, Verhulst a proposé une équation susceptible de modéliser simplement l'évolution d'une population capable de s'auto-reproduire et devant partager les ressources du milieu où elle vit. Si  $N(t)$  est le nombre d'individus à l'instant  $t$  (traité comme une fonction continue à valeurs réelles), l'équation de Verhulst est<sup>28</sup> :

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = aN - bN^2} \quad (2.87)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives. C'est une équation de Bernoulli avec  $m = 2$  ; posant  $f(t) = N^{1-2} \equiv \frac{1}{N}$ , on obtient l'équation pour  $f$  :  $\frac{df}{dt} + af = b$ . La solution générale de l'équation homogène est  $Ce^{-at}$  ; par ailleurs, l'équation avec second membre admet visiblement la solution constante  $f_{\text{part}} = \frac{b}{a}$ , d'où la solution générale  $f(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}$  et :

$$\boxed{N(t) = \frac{a}{b} \frac{N_0}{N_0 + (\frac{a}{b} - N_0)e^{-at}}} \quad (2.88)$$

où  $N_0$  est la valeur de la population à l'instant de départ ; au début,  $N(t)$  augmente linéairement à partir de sa valeur  $N_0$  (sauf si  $N_0 = \frac{b}{a}$ ) ; dans la phase finale,  $N(t)$  se rapproche exponentiellement de sa valeur limite, égale à  $\frac{b}{a}$ . On retrouvera cette équation dans le Ch.5.

### 2.8.2 Exemple 2 : le parachute

On admet que pour les vitesses atteintes (assez vite), le freinage est proportionnel au carré de la vitesse. Dans cette hypothèse, l'équation fondamentale de la Dynamique ( $v(t)$  = vitesse verticale) s'écrit :

$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = mg - Av^2} \quad (2.89)$$

où la constante  $A$  est homogène à une masse divisée par une longueur (le vérifier) ; il est donc naturel de poser  $A = mk$  où  $k$  est l'inverse d'une longueur. L'équation à résoudre prend alors la forme :

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2 . \quad (2.90)$$

<sup>28</sup>Essayer d'interpréter les deux termes au second membre de (2.87).

Ceci est une équation de Riccati (voir (2.85)) avec  $a(x) = -k$ ,  $b(x) = 0$  et  $c(x) = g$ . Il faut donc d'abord trouver une solution particulière. Un peu de réflexion montre qu'il en existe une, qui est la fonction constante et égale à  $\sqrt{\frac{g}{k}}$  (c'est la vitesse limite du parachute,  $v_\infty$  !). On pose donc  $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{1}{f(t)}$ , d'où l'équation pour  $f$  :

$$\frac{df}{dt} - 2\sqrt{kg}f = k ; \quad (2.91)$$

c'est une équation linéaire inhomogène du premier ordre. La solution générale de l'équation homogène est  $f(t) = Ce^{2\sqrt{kg}t}$  ; de plus, (2.91) a visiblement une solution particulière constante et égale à  $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}}$ , d'où la solution générale de (2.91) :

$$f(t) = Ce^{2\sqrt{kg}t} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}} . \quad (2.92)$$

La solution générale de l'équation de Riccati (2.90) est donc :

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{1}{Ce^{2\sqrt{kg}t} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}}} . \quad (2.93)$$

Si le parachute part avec une vitesse verticale nulle, on a :

$$0 = \sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{1}{C - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}}} , \quad (2.94)$$

d'où l'on déduit la constante d'intégration  $C = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{g}} \equiv -\frac{1}{2v_\infty}$  et l'expression finale de la vitesse avec cette condition initiale :

$$v(t) = \left(1 - \frac{2}{e^{2\sqrt{kg}t} + 1}\right) v_\infty \quad (2.95)$$

La vitesse a donc un comportement exponentiel dans la phase finale : pour  $t \gg \frac{1}{\sqrt{kg}}$ ,  $v(t) \simeq (1 - 2e^{-2\sqrt{kg}t}) v_\infty$ . Avec une vitesse d'arrivée au sol de 1 m/s, la vitesse limite est pratiquement atteinte au bout d'un temps de chute un peu supérieur à 20 s (le vérifier). À titre d'exercice, montrer que la distance  $d(t)$  parcourue par le parachutiste est donnée par :

$$d(t) = v_\infty t - \frac{2}{k} \left( \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-2n\sqrt{kg}t} \right) ; \quad (2.96)$$

des résultats précédents, déduire que :

$$d(t) \simeq \begin{cases} \frac{1}{2}gt^2 & \text{si } t \ll \frac{1}{\sqrt{kg}} \\ v_\infty t - \frac{2}{k} \ln 2 & \text{si } t \gg \frac{1}{\sqrt{kg}} \end{cases} \quad (2.97)$$

et interpréter les résultats.

### 2.8.3 Exemple 3 : le pendule simple

Une très petite bille, attachée au bout d'une tige de masse négligeable et de longueur  $l \ll R_T \simeq 6400$  km, est libre de tourner autour de l'autre extrémité. Si  $\theta$  est l'angle mesurant l'écart à la verticale de la bille, et en l'absence de frottement, l'équation fondamentale de la Dynamique s'écrit :

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \iff \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.98)$$

C'est une équation non-linéaire du second ordre pour la fonction  $\theta(t)$  ; on suppose connues la position  $\theta(t=0)$  et la vitesse angulaire  $\dot{\theta}(t=0)$ . En multipliant membre à membre par  $\dot{\theta}$  et en intégrant, il vient ( $\omega^2 = \frac{g}{l}$ ) :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega^2 \cos \theta = C^{\text{ste}} . \quad (2.99)$$

On vient ainsi de mettre en évidence une *intégrale première* : c'est une combinaison des grandeurs dynamiques (position, vitesse, ...) qui garde une valeur constante à tout instant, cette valeur étant verrouillée à ce qu'elle était dans l'état de départ<sup>29</sup>. Si, à  $t=0$ , on abandonne le pendule écarté de  $\theta_0$  sans vitesse initiale, alors  $C^{\text{ste}} = -\omega^2 \cos \theta_0$  et il vient :

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(\cos \theta - \cos \theta_0) ; \quad (2.100)$$

ceci montre déjà que le pendule oscille entre les deux inclinaisons  $\pm\theta_0$  ... ce qui n'est guère surprenant, et que le mouvement est périodique. Pendant la première demi-période, l'angle  $\theta$  décroît ; pour  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ , l'extraction de la bonne racine carrée donne :

$$\dot{\theta} = -\sqrt{2}\omega\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \iff dt = -\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} ; \quad (2.101)$$

l'intégration donne alors :

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos \theta' - \cos \theta_0}} , \quad (2.102)$$

où  $\theta$  est la valeur de l'angle à l'instant  $t \in [0, \frac{T}{2}]$ . Ceci permet déjà d'obtenir une expression de la période, en utilisant le fait que pour  $t = \frac{T}{2}$ , l'angle vaut  $-\theta_0$ . D'où :

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos \theta' - \cos \theta_0}} . \quad (2.103)$$

De proche en proche, on voit par inspection que le bon changement de variable est  $\sin \frac{\theta'}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \phi$ , et on trouve :

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi}} . \quad (2.104)$$

Cette intégrale ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires, et sert de définition à une fonction spéciale, appelée *fonction* (ou *intégrale*) *elliptique complète de première espèce*, dont la notation traditionnelle est  $\mathbf{K}$  ; ainsi :

$$\mathbf{K}(m) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} , \quad (2.105)$$

d'où :

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K}(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}) \quad (2.106)$$

De toute évidence,  $\mathbf{K}(0) = \frac{\pi}{2}$ , d'où l'expression bien connue de la période dans la limite des petites oscillations,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , expression remarquable par le fait qu'elle ne dépend pas de l'amplitude : dans la limite des petites oscillations, le pendule simple est *isochrone*.

Cette propriété est perdue quand l'amplitude  $\theta_0$  n'est plus très petite, et il faut alors examiner de plus près le comportement de  $\mathbf{K}$  quand on sort de ce régime. Il est facile de montrer que<sup>30</sup> :

$$0 \leq m \ll 1 : \mathbf{K}(m) \simeq \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{m}{4}\right) , \quad (2.107)$$

qui donne l'allongement de la période d'oscillation quand l'amplitude de celle-ci augmente (un peu) :

$$T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right) \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2\right) \quad (0 \leq \theta_0 \ll \pi) . \quad (2.108)$$

<sup>29</sup>À un facteur près, que représente physiquement la quantité au premier membre de (2.99) ?

<sup>30</sup>Comment s'y prend-on pour établir (2.107) ?

À l'inverse, pour les très grandes amplitudes ( $\theta_0 \lesssim \pi$ ), il faut connaître le comportement de  $\mathbf{K}(m \lesssim 1)$ , qui est visiblement logarithmique, du genre<sup>31</sup>  $\propto -\ln(1-m)$ . Ceci permet de conclure que la période  $T$  tend vers l'infini si  $\theta_0 \rightarrow \pi$  (commenter ce résultat).

Plus généralement, et tant que  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ , des manipulations simples à partir de (2.102) donnent

$$t = \frac{2}{\omega} \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi'}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi'}} \quad (2.109)$$

où l'angle  $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  est relié à  $\theta$  par  $\phi = \text{Arcsin} \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$ . Ceci donne, sous une forme assez peu explicite il est vrai<sup>32</sup>, le lien entre le temps  $t$  et l'angle  $\theta$  déterminant l'inclinaison du pendule pour la première demi-période ; pour la deuxième demi-période, il suffit de changer le signe de l'intégrale (alors la dérivée  $\dot{\theta}$  est positive) et  $\theta_0$  en  $-\theta_0$  (le pendule repart à l'identique (*i.e.* sans vitesse initiale) de la position opposée à celle de départ).

<sup>31</sup>Établir qualitativement ce résultat. Un calcul pas si facile montre que dans ce cas, on a précisément  $\mathbf{K}(m) \simeq \ln \frac{4}{\sqrt{1-m}}$ .

<sup>32</sup>Le lien entre  $\theta$  et  $t$  est en effet peu explicite, mais l'importance pratique de ce problème a justifié que ce type de relation serve de point de départ à la définition d'une autre fonction spéciale, appelée *amplitude*, notée *am*. On a précisément :

$$u = \int_0^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi'}} \iff \phi \stackrel{\text{déf}}{=} \text{am}(u|m) , \quad (2.110)$$

où la fonction *am* – visiblement paramétrée par  $m$  – sert à son tour de point de départ pour la définition d'autres fonctions spéciales très importantes, appelées *fonctions elliptiques de Jacobi*, notées  $\text{sn}(u|m) \stackrel{\text{déf}}{=} \sin \phi$  et  $\text{cn}(u|m) \stackrel{\text{déf}}{=} \cos \phi$ , soit  $\text{sn}(u|m) = \sin(\text{am}(u|m))$  et  $\text{cn}(u|m) = \cos(\text{am}(u|m))$ . Si  $0 \leq m \ll 1$ , on a approximativement :

$$\text{sn}(u|m) \simeq \sin u - \frac{1}{4}m(u - \sin u \cos u) \cos u , \quad \text{cn}(u|m) \simeq \cos u + \frac{1}{4}m(u - \sin u \cos u) \sin u ; \quad (2.111)$$

reportées dans les expressions du pendule simple quand on fait l'hypothèse des petites oscillations ( $m = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \ll 1$ ), ces développements redonnent bien  $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t + \dots$

# Chapitre 3

## Applications des séries de Fourier

*Le but de ce chapitre est de rappeler les notions fondamentales sur la représentation d'une fonction périodique en série et de présenter quelques applications importantes en Physique*

### 3.1 Représentation d'une fonction périodique

#### 3.1.1 Présentation

Soit  $f(\phi)$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $\mathbb{R}$ , sauf éventuellement en un certain nombre de points.  $f(\phi)$  est dite périodique s'il existe un nombre  $\theta$ , appelé *période* tel que l'on ait :

$$\boxed{f(\phi + p\theta) = f(\phi) \quad \forall p \in \mathbb{Z}} \quad (3.1)$$

Il est bien clair que si  $\theta$  est une période, il en va de même de  $10\theta, -3\theta, \dots$ . Usuellement, on appelle *période* la plus petite période positive, ici notée  $\theta$ , et la fonction est dite  $\theta$ -périodique.

Si  $\phi$  a la dimension d'une longueur,  $\theta$  est aussi une longueur ( $p$  est un *nombre* !).  $f$  est par exemple l'énergie potentielle  $V(x)$  d'une particule ayant la coordonnée  $x$ , se déplaçant dans un paysage répétitif dans l'espace (réseau) admettant la période spatiale  $a$  : quand on translate le paysage de  $a, 2a, -5a, \dots$  il se superpose à lui-même, d'où  $V(x + pa) = V(x)$ . Techniquement parlant, c'est le cas quand  $V(x)$  est de la forme :

$$V(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v(x - na) \quad , \quad (3.2)$$

où  $v(x)$  est une fonction donnée (en forme de puits par exemple) ; en effet :

$$V(x + pa) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v(x + pa - na) \stackrel{(n' = n-p)}{=} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} v(x - n'a) \equiv V(x) \quad . \quad (3.3)$$

$f$  peut aussi désigner la variation spatiale à temps fixé de la composante d'une onde plane  $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ , ou  $\cos(\omega t - kx)$ . La période est alors une longueur, appelée *longueur d'onde*  $\lambda$ , grandeur à laquelle on associe traditionnellement le nombre d'onde  $k$  :

$$k \stackrel{\text{d'éf}}{=} \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad (3.4)$$

à une dimension d'espace, on a alors :

$$f(x + p\lambda) = f(x) \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad . \quad (3.5)$$

Lorsque la variable désigne le temps, il est naturel de noter  $f(t)$  la valeur de la fonction  $f$  en  $t$ , et la (plus petite) période est souvent notée  $T$ .  $f(t)$  décrit alors un phénomène qui se répète identiquement à lui-même (cycle) au bout de l'intervalle de temps  $T$  :

$$f(t + T) = f(t) \implies f(t + pT) = f(t) \quad \forall p \in \mathbb{Z} . \quad (3.6)$$

À la période  $T$ , on associe la fréquence  $\nu$  et la pulsation  $\omega$  définies comme suit :

$$\nu = \frac{1}{T} , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu ; \quad (3.7)$$

La fréquence  $\nu$  est donc le nombre de cycles effectués par unité de temps, et s'exprime en Hertz (Hz) ou ses multiples (kHz, MHz, ...). La pulsation  $\omega$  s'exprime en radians par seconde (rad/s).

À l'aide des fréquence  $\nu$ , période  $T$  et longueur d'onde  $\lambda$ , une onde plane  $\cos(\omega t - kx)$  s'écrit  $\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$  ou encore  $\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ .

Il est bien clair que, *stricto sensu*, la notion même de fonction périodique est une vue de l'esprit pour le physicien et repose sur un saut conceptuel. Très précisément, on dira en Physique qu'une fonction est périodique si elle est définie sur un intervalle qui peut être rendu arbitrairement grand par rapport à la plus petite période physique définie au préalable. Aucun phénomène ne dure infiniment longtemps<sup>1</sup> : le physicien considèrera que la fonction  $f(t)$  est  $T$ -périodique<sup>2</sup> si elle décrit un phénomène durant très longtemps par rapport à  $T$ , autrement dit on doit avoir le temps de compter un très grand nombre de périodes<sup>3</sup> (voir fig. 3.1). De la même façon, pour un cristal cubique *macroscopique* de côté  $L$ , le potentiel  $V(x)$  sera considéré comme périodique puisque  $L \gg a$ , côté de la maille cristalline ( $\frac{L}{a} \sim \mathcal{N} \sim 10^{23}$ ). Le saut conceptuel à l'infini s'en trouve légitimé et avec la définition (3.1), le domaine de définition de  $f$  s'étend de  $-\infty$  à  $+\infty$ , en-dehors bien sûr des éventuels points où  $f$  présente des singularités.

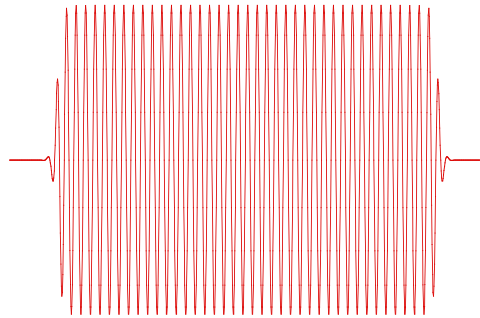


Figure 3.1: Allure d'une fonction considérée comme presque exactement périodique parce que sa durée est très grande devant l'intervalle de temps séparant deux oscillations consécutives

### 3.1.2 Développement en série d'exponentielles complexes. Calcul des coefficients

Revenons à la notation générale  $f(\phi)$  pour une fonction  $2\pi$ -périodique ( $f(\phi + n2\pi) = f(\phi)$ ), mais quelconque par ailleurs. Par ailleurs, on connaît des fonctions périodiques élémentaires dont la période est  $2\pi$ , les sinus et les cosinus, qui satisfont les relations<sup>4</sup> :

$$\sin(\phi + p2\pi) = \sin \phi , \quad \cos(\phi + p2\pi) = \cos \phi , \quad \forall p \in \mathbb{Z} . \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>De même, aucun cristal réel n'est infiniment grand.

<sup>2</sup>En pareil cas, on évitera la terminologie *quasi-périodique*, un terme le plus souvent utilisé pour qualifier une fonction contenant des termes dont les périodes individuelles sont dans un rapport *irrationnel*, par exemple  $\cos \phi + \cos \sqrt{2}\phi$ .

<sup>3</sup>Pour une telle fonction, il n'existe pas de série de Fourier – la fonction n'est pas *strictement* périodique –, mais on peut généraliser tout ceci en considérant la transformée de Fourier de  $f$ ,  $F(\omega)$ , qui est en quelque sorte la version continue du spectre de Fourier  $\{f_n\}_n$ . En pareilles circonstances,  $F(\omega)$  est une fonction très pointue (en forme de résonance), le maximum survenant en  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  et ayant une largeur  $\simeq \frac{1}{\text{durée}} \ll \omega_0$ .

<sup>4</sup>Avec une notation plus physique dans le cas où la variable est une longueur notée  $x$ , on écrit :

$$\sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{a} + p \right) \right] = \sin 2\pi \frac{x}{a} , \quad \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{a} + p \right) \right] = \cos 2\pi \frac{x}{a} \quad \forall p \in \mathbb{Z} , \quad (3.8)$$

De plus, les fonctions  $\cos n\phi$  et  $\sin n\phi$  avec  $n \in \mathbb{N}$  ont pour plus petite période  $\frac{2\pi}{n}$  puisque  $\cos n(\phi + \frac{2\pi}{n}) = \cos n\phi$ , donc ont aussi pour période  $n$  fois cette quantité, soit  $n\frac{2\pi}{n} = 2\pi$ . En définitive, toutes les fonctions  $\sin n\phi$  et  $\cos n\phi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) ont la même période commune  $2\pi$ . Quand  $n \sim 1$ , elles oscillent lentement ; si  $n \gg 1$ , elles oscillent très vite à l'échelle  $2\pi$ .

Toute combinaison linéaire de fonctions de même période  $2\pi$  étant aussi une fonction de période  $2\pi$ , il est ainsi naturel de se demander si une fonction  $2\pi$ -périodique  $f(\phi)$  peut être écrite "plus simplement" en faisant appel aux fonctions élémentaires  $\cos n\phi$  et  $\sin n\phi$ . On en vient à se poser la question de l'existence de développements du genre :

$$f(\phi) = \sum_n (c_n \cos n\phi + s_n \sin n\phi) , \quad (3.11)$$

où les  $c_n$  et les  $s_n$  sont des coefficients qu'il faudra se donner les moyens de trouver (une fois la fonction  $f$  définie).

Dans (3.11), la sommation sur  $n$  est imprécise. Dans un but de généralité, il se révèle nécessaire d'envisager la possibilité de sommation infinie ; dès lors le développement putatif apparaît comme une *série*, c'est une série de fonctions :

$$f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n \cos n\phi + s_n \sin n\phi) , \quad (3.12)$$

ou, de façon équivalente :

$$f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n \cos(n\phi + \alpha_n) , \quad (3.13)$$

avec  $c_n = r_n \cos \alpha_n$ ,  $s_n = -r_n \sin \alpha_n$ . Se souvenant des formules d'Euler, on devine que le développement (3.12) doit aussi pouvoir s'écrire comme suit<sup>5</sup> :

$$f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi} , \quad (3.14)$$

où les  $f_n$  sont des coefficients se déduisant simplement des  $c_n$  et des  $s_n$  :

$$c_0 = f_0 , \quad c_{n \neq 0} = f_n + f_{-n} , \quad s_n = i(f_n - f_{-n}) \quad (3.15)$$

En toute rigueur, on montre que l'écriture (3.14) doit être comprise précisément comme :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} f_n e^{in\phi} ; \quad (3.16)$$

cette subtilité sera sous-entendue dans la suite. Le développement (3.14) est appelé *série de Fourier* de  $f$ , les développements en sin et cos étant souvent appelés séries trigonométriques. Les écritures (3.12) et (3.14) sont équivalentes, le choix entre l'une ou l'autre étant une affaire de goût ou de commodité ; dans la suite, c'est (3.14) qui sera le plus souvent utilisé. C'est la *représentation* de la fonction  $f$  (en série de Fourier) : c'est – du moins on l'espère – une autre façon d'écrire la fonction  $f$ . Les coefficients  $\{f_n\}_n$  constituent le *spectre* de  $f$ .

La question de la convergence de la série (3.14) se règle en notant que  $|e^{in\phi}| = 1 \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \phi \in \mathbb{R}$ . Il en résulte que :

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n e^{in\phi}| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| |e^{in\phi}| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n| . \quad (3.17)$$

Autrement dit, la série de fonctions de Fourier est majorée par la série numérique  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|$  : si celle-ci est convergente (autrement dit : si la série  $f_n$  est absolument convergente), alors la série de Fourier est uniformément convergente, sa somme  $f(\phi)$  est donc une fonction continue (puisque de surcroît  $e^{in\phi}$  est visiblement une fonction

se souvenant que l'argument d'une fonction mathématique est forcément un nombre sans dimension. Lorsque la variable est le temps  $t$ , on écrit :

$$\sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + p \right) \right] = \sin 2\pi \frac{t}{T} , \quad \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + p \right) \right] = \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \forall p \in \mathbb{Z} , \quad (3.9)$$

<sup>5</sup>Noter que la sommation sur  $n$  se fait dans  $\mathbb{Z}$  et non plus dans  $\mathbb{N}$  comme pour les séries trigonométriques (3.12).

continue  $\forall n$ ). Le cas où la fonction de départ  $f(\phi)$  présente des discontinuités sera abordé par la suite et brièvement discuté sur des exemples.

Une fois que l'on a décidé de travailler avec les séries de Fourier, l'un des besoins premiers est de trouver les coefficients  $f_n$ , ce qui se fait en principe facilement grâce à une égalité importante, qui considère l'intégrale  $S_{nm} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{2\pi} e^{in\phi} e^{-im\phi} d\phi$  ; en calculant la primitive, on a tout de suite pour  $n \neq m$  :

$$S_{nm} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{2\pi} e^{in\phi} e^{-im\phi} d\phi = \left[ \frac{e^{i(n-m)\phi}}{i(n-m)} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(n-m)} (e^{i(n-m)2\pi} - 1) . \quad (3.18)$$

Si  $n$  et  $m$  sont entiers,  $n - m$  est aussi entier et la parenthèse est nulle puisque  $e^{\text{entier} \times 2i\pi} = 1$  d'où  $S_{nm} = 0$ . Dans le cas  $n = m$  on a  $S_{nn} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{2\pi} e^{in\phi} e^{-in\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ . Finalement, introduisant le symbole de Kronecker  $\delta_{nm} = 1$  si  $n = m$ ,  $\delta_{nm} = 0$  si  $n \neq m$ , l'égalité importante suivante est obtenue :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} e^{in\phi} e^{-im\phi} d\phi = 2\pi \delta_{nm} \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.19)$$

Ceci étant, multiplions (3.14) membre à membre par  $e^{-im\phi}$  et intégrons sur une période ; la série (3.14) étant supposée uniformément convergente (et alors  $f$  est continue), on peut échanger l'ordre des opérations sommation/intégration. Il vient :

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\phi} f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi} d\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \int_0^{2\pi} e^{-im\phi} e^{in\phi} d\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n 2\pi \delta_{nm} = 2\pi f_m ; \quad (3.20)$$

c'est ce résultat que l'on lit à l'envers pour obtenir la formule donnant les coefficients de Fourier  $f_n$  :

$$\boxed{f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} f(\phi) d\phi} \quad (3.21)$$

ou encore, selon (3.15) :

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi, \quad c_{n \neq 0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\phi f(\phi) d\phi, \quad s_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\phi f(\phi) d\phi} \quad (3.22)$$

Les bornes  $[0, 2\pi]$  peuvent être remplacées par  $[\phi_0, \phi_0 + 2\pi]$ , où  $\phi_0$  est quelconque. On note que le terme constant de la série ( $c_0 = f_0$ ) n'est autre que la valeur *moyenne* de la fonction  $f$  sur une période ; pour une fonction constante,  $f(\phi) = C$ , on a simplement  $f_n = C\delta_{n0}$ .

Récrivons les relations précédentes en termes de grandeurs dimensionnées, dans le cas d'une fonction périodique dans le temps avec la (plus petite période)  $T$ ,  $f(t + pT) = f(t)$  ; avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , on a :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\omega t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{2i\pi n \frac{t}{T}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{2i\pi n \nu t}, \quad (3.23)$$

avec :

$$\boxed{f_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-in\omega t} f(t) dt} \quad (3.24)$$

ou encore :

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad c_{n \neq 0} = \frac{2}{T} \int_0^T \cos n\omega t f(t) dt, \quad s_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin n\omega t f(t) dt} \quad (3.25)$$

$f_n$  a la même dimension que  $f$ . Les développements (3.23) montrent que le développement de Fourier fait apparaître une fréquence (pulsation) fondamentale  $\nu$  ( $\omega$ ) et toutes ses harmoniques  $n\nu$  ( $n\omega$ ). Le terme fondamental oscille avec la période  $T$ , le premier harmonique oscille deux fois plus vite avec la période  $\frac{T}{2}$ , etc.

Donnons quelques conséquences immédiates des formules précédentes :



1. si la fonction  $f(\phi)$  est à valeurs réelles, on a  $f_n = f_{-n}^*$
2. si  $f(\phi) \in \mathbb{R}$  et paire ( $f(\phi) = f(-\phi)$ ), alors  $f_n = f_{-n}$ . Il en résulte ce que l'on aurait pu d'emblée écrire que la série trigonométrique contient seulement des cosinus :

$$f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \cos n\phi . \quad (3.26)$$

3. si  $f(\phi) \in \mathbb{R}$  et impaire ( $f(\phi) = -f(-\phi)$ ), alors  $f_n = -f_{-n}$ . Il en résulte que la série trigonométrique ne contient que des sinus :

$$f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} s_n \sin n\phi , \quad (3.27)$$

le terme  $n = 0$  étant absent ( $\sin 0 = 0$ ).

4. si  $f(\phi) = \cos \phi$ , la formule (3.21) donne  $f_n = f_{-n} = \frac{1}{2} \delta_{n1}$  : le développement de Fourier s'écrit  $\cos \phi = \frac{1}{2} e^{i\phi} + \frac{1}{2} e^{-i\phi}$  : c'est l'une des formules d'Euler ! Avec  $f(\phi) = \sin \phi$ , la même formule donne  $f_n = -f_{-n} = \frac{1}{2i} \delta_{n1}$ , soit  $\sin \phi = \frac{1}{2i} (e^{i\phi} - e^{-i\phi})$ .

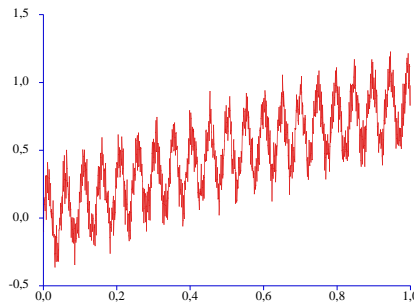


Figure 3.2: La fonction discutée par Picard (voir note 6).

Les formules (3.20) et (3.24) ont été établies dans l'hypothèse de convergence uniforme de la série de Fourier, entraînant la continuité de la fonction et surtout la possibilité d'échanger l'ordre des opérations sommation et intégration. Soit maintenant une fonction  $f(\phi)$  (toujours  $2\pi$ -périodique) mais présentant des sauts (continue par morceaux) d'amplitude finie, en nombre fini sur une période. Rien n'interdit de calculer *des* coefficients  $f_n$  suivant la règle (3.21), et de fabriquer la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi}$ , supposée convergente et égale à une certaine fonction  $\tilde{f}(\phi)$ . La question est alors : quelle est la relation entre  $f$  et  $\tilde{f}$  ?

On peut montrer<sup>6</sup> (théorème (ou conditions) de Dirichlet) que pour toute fonction  $f$  bornée et monotone

<sup>6</sup>L'expression de ce théorème varie d'un auteur à l'autre. La formulation ci-dessus est celle de Piskounov, tome II, p. 338. Schwartz (MMP, p. 172) exige la propriété pour  $f$  d'être à *variation bornée* – voir la définition qu'il en donne –, et ajoute plus loin que “les fonctions bornées rencontrées dans la pratique sont à variation bornée”, tout en précisant qu'il existe des fonctions *continues* à variations non bornées.

Picard donne l'exemple suivant d'une fonction continue sur l'intervalle  $[-\pi, +\pi]$ , mais dont la série de Fourier ne converge pas. Soit la fonction  $F(\phi)$  définie comme :

$$f(\phi) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin(2p^3 + 1) \frac{\phi}{2} , \quad F(\phi) = \begin{cases} f(\phi) & \text{si } 0 < \phi < \pi \\ f(-\phi) & \text{si } -\pi < \phi < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

La série donnant  $f(\phi)$  converge uniformément, donc la somme  $f(\phi)$  est bien continue, donc bornée, et  $f(0) = 0$ . La fonction  $F$  est aussi continue et bornée – en revanche, en raison de ses rapides oscillations, la fonction n'est pas à variation bornée.

La série de Fourier de  $F$  ne contient que les cosinus (la fonction est paire) :

$$F(\phi) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots \quad (3.29)$$

Soit  $S_N = a_0 + a_1 + \dots + a_N$  la somme partielle de cette série de Fourier en  $\phi = 0$ . En choisissant  $n = 2^{p'^3} - 1$ , Picard montre que  $S_{2^{p'^3} - 1} > \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p'^2} \log(2^{p'^3} + 1)$ . Pour  $p'$  grand,  $\log(2^{p'^3} + 1) \sim p'^3 \log 2$ , donc  $S_{2^{p'^3} - 1} > \frac{p' \log 2}{2\pi}$  qui croît sans limite. La suite des sommes partielles  $S_n$  ne peut donc converger : la série de Fourier de  $F$  en  $\phi = 0$  diverge ! (É. Picard, *Traité d'Analyse*).

par morceaux, la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi}$  converge (simplement) vers  $f$  en tout point de continuité de  $f$ , et vers la demi-somme des valeurs à droite et à gauche aux points de discontinuité :

$$\tilde{f}(\phi) = \begin{cases} f(\phi) & \forall \phi \text{ où } f \text{ est continue} \\ \frac{1}{2}[f(\phi+0) + f(\phi-0)] & \forall \phi \text{ où } f \text{ est discontinue} \end{cases} \quad (3.30)$$

Au total, la relation entre  $f$  et  $\tilde{f}$  peut s'écrire comme suit :

$$\tilde{f}(\phi) = \frac{1}{2}[f(\phi+0) + f(\phi-0)] \equiv f_{\text{rég}} \quad \forall \phi \quad (3.31)$$

les deux limites étant égales si  $f$  est continue (auquel cas  $\tilde{f}$  est vraiment le *clone* de  $f$ ). Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on commettra l'abus d'écriture  $f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi}$ , étant entendu qu'il faut éventuellement remplacer le premier membre par son expression "régularisée"  $f_{\text{rég}}$ .

Avant de donner des exemples, plusieurs commentaires s'imposent :

- Soit une fonction  $2\pi$ -périodique  $f(\phi)$ , dont les coefficients de Fourier  $f_n$  sont donnés par la formule (3.21). La dérivée  $f'(\phi)$  est aussi une fonction  $2\pi$ -périodique admettant le développement de Fourier :

$$f'(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^{(1)} e^{in\phi}, \quad (3.32)$$

les coefficients de Fourier  $f_n^{(1)}$  étant donnés par :

$$f_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} f'(\phi) d\phi. \quad (3.33)$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient successivement :

$$f_n^{(1)} = [f(\phi)e^{-in\phi}]_0^{2\pi} - (-in) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} f(\phi) d\phi; \quad (3.34)$$

$n$  étant entier,  $e^{-in\phi} = 1$  pour  $\phi$  multiple entier de  $2\pi$  ; par ailleurs,  $f(0) = f(2\pi)$  puisque la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique : le terme tout intégré est donc nul. Finalement :

$$f_n^{(1)} = inf_n \iff f'(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} inf_n e^{in\phi} \quad (3.35)$$

Si l'on revient à l'écriture  $f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi}$ , on constate que le résultat (3.35) peut aussi s'obtenir par simple dérivation terme à terme de la série donnant  $f(\phi)$ , sans recourir à la moindre hypothèse concernant la convergence uniforme ou simple de cette série, et/ou de la série de terme général égal à la dérivée du terme général de la série donnant  $f(\phi)$ . Comme on le sait, ce résultat ne vaut pas en général pour une série de fonctions quelconques (de ce point de vue, les séries de Fourier constituent un cas exceptionnel).

- le théorème de Dirichlet affirme que  $f(\phi)$  et sa série de Fourier sont presque partout égales, si les sauts de  $f$  sur une période sont en nombre *fini*. En d'autres termes, la donnée de la fonction  $f(\phi)$  et celle de ses coefficients de Fourier  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  constituent deux informations distinctes mais équivalentes, ce qu'exprime globalement (3.30). En un sens qui sera précisé par la suite, ces deux informations sont *duals* l'une de l'autre
- la distribution des valeurs des coefficients de Fourier décrit quantitativement la participation de chacune des périodes  $\frac{2\pi}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , dans la variation de  $f(\phi)$ . Si  $c_{n_0}$  et/ou  $s_{n_0}$  sont beaucoup plus grands que tous les autres, ceci signifie que  $f$  oscille "presque" comme un simple cosinus et/ou sinus de période  $\frac{2\pi}{n_0}$ . À l'inverse, si les coefficients sont lentement variables en  $n$ , ceci signifie que toutes les périodes sont présentes de façon "démocratique", étant entendu que s'il existe une série numérique majorante (assurant la convergence uniforme<sup>7</sup>) alors, nécessairement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$ .

La distribution des coefficients s'appelle *spectre de Fourier* de  $f$ .

<sup>7</sup>Il existe toutefois des séries de fonctions uniformément convergentes mais non majorables.

### 3.1.3 Exemples

#### Exemple 1

Comme premier exemple, prenons la fonction continue définie comme suit :

$$f(\phi) = \phi^2, \quad -\pi \leq \phi \leq +\pi \quad (3.36)$$

et prolongée périodiquement sur tout l'axe réel :

$$f(\phi + 2p\pi) = f(\phi), \quad -\pi \leq \phi \leq +\pi \quad \forall p \in \mathbb{Z}. \quad (3.37)$$

Le graphe est composé d'une succession d'arcs de parabole se déduisant les uns des autres par des translations d'un multiple entier de  $2\pi$ . La fonction est continue, mais pas sa dérivée : celle-ci a un saut à chaque fois que  $\phi = (2k+1)\pi \equiv \phi_k$ , valant  $-2\pi$  à gauche,  $+2\pi$  à droite. Le graphe traduit ce fait par les points anguleux en  $\phi_k$ .

Par définition,  $f(\phi)$  est une fonction dont la plus petite période est  $2\pi$  ; son développement de Fourier s'obtient par la formule (3.21), qui s'écrit ici :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \phi^2 e^{-in\phi} d\phi; \quad (3.38)$$

par des intégrations par parties (ou par dérivation en  $n$  sous le signe  $f$ ), on trouve :

$$f_n = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} & \text{si } n = 0 \\ (-1)^n \frac{2}{n^2} & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

d'où<sup>8</sup> :

$$f(\phi) = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{in\phi} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\phi \quad (3.43)$$

Visiblement, les séries (3.43) convergent uniformément, puisque leur terme général est majoré par le terme général d'une série numérique convergente (c'est une série de Riemann, avec d'ailleurs  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ) ; comme de surcroît chacun de leurs termes est une fonction continue, la somme est une fonction continue : c'est bien le cas de la fonction  $f(\phi)$  de départ définie par (3.36) et (3.37).

Il est intéressant de voir à quoi ressemble le développement de Fourier tronqué à l'ordre  $N$ , où  $N$  est un entier que l'on fixe arbitrairement. Ce faisant, on définit une nouvelle fonction  $f^{(N)}(\phi)$ , clairement différente de  $f(\phi)$  :

$$f^{(N)}(\phi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\phi \neq f(\phi) \quad (3.44)$$

Les graphes pour  $n = 10$  et  $N = 40$  sont donnés sur la fig. 3.3 ; il saute aux yeux que la fonction tronquée "ressemble" à  $f(\phi)$ , mais ne présente aucun point point anguleux : c'est normal, puisque  $f^{(N)}$  est une somme

<sup>8</sup>De ce développement, on peut déduire des égalités importantes. Par exemple, en faisant  $\phi = \pi$  puis  $\phi = 0$ , on trouve :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (3.40)$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \text{etc} \quad (3.41)$$

On voit apparaître des valeurs particulières de l'illustissime fonction Zêta de Riemann,  $\zeta(z)$ , que l'on peut définir comme suit quand  $\Re z > 1$  :

$$\zeta(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \quad (\Re z > 1). \quad (3.42)$$

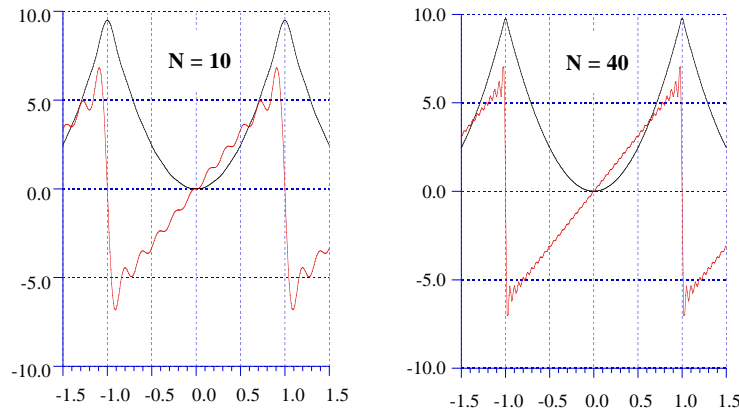


Figure 3.3: Graphes de la fonction tronquée  $f^{(N)}(\phi)$  définie en (3.44), et de sa dérivée  $f^{(N)'(\phi)}$ , pour  $N = 10, 40$  (c'est  $\frac{\phi}{\pi}$  qui est porté en abscisse).

en nombre *fini* de fonctions continues et dérivables – tronquer la série arrondit donc forcément les éventuels points anguleux de la vraie fonction. À l'inverse, on voit que quand  $N$  augmente, l'arrondi est de moins en moins visible. On conçoit ainsi intuitivement que passer à la limite  $N \rightarrow +\infty$  puisse restituer les sauts de la dérivée et produire une fonction  $f^{(\infty)}(\phi)$  *strictement* égale<sup>9</sup> à  $f(\phi)$ . D'une façon générale, on peut dire (assez vaguement) que plus  $N$  est grand, plus la série tronquée ressemble à  $f(\phi)$  définie par les relations (3.36) et (3.37). On remarque aussi que si le graphe de  $f^{(N)}(\phi)$  n'a pas d'irrégularités visibles, celui de la dérivée présente des oscillations de plus en plus marquées quand  $N$  augmente. Ceci est encore plus flagrant sur la dérivée seconde  $f^{(N)''}(\phi)$  (fig 3.4) : dériver révèle des détails quasi-invisibles sur le graphe de la fonction, elle-même<sup>10</sup>, un point que l'on discute maintenant un peu plus en détails.

Revenons à  $f^{(N)}(\phi)$ , et dérivons terme à terme, ce qui est *toujours* licite puisque la somme contient un nombre fini de termes. On a ainsi :

$$f^{(N)'(\phi)} = -4 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n} \sin n\phi \quad (3.45)$$

Le graphe de  $f^{(N)'(\phi)}$  est aussi tracé sur la fig. 3.3. Il est visible que plus  $N$  est grand, plus  $f^{(N)'(\phi)}$ , toujours continue, varie vite au voisinage de  $\phi_k = (2k+1)\pi$ , vaut  $\simeq -6$  un peu à gauche, 0 au milieu,  $\simeq +6$  un peu à droite.

D'un autre côté, la dérivée de  $f(\phi)$  est parfaitement définie, sauf aux points  $(2k+1)\pi$ , il suffit d'en revenir à la définition (3.36) et (3.37) :

$$f'(\phi) = 2\phi, \quad f'(\phi + 2p\pi) = f'(\phi), \quad -\pi < \phi < +\pi; \quad (3.46)$$

son graphe est constitué d'une suite de segments parallèles entre eux, de pente égale à  $+2$ , translatés les uns des autres.  $f'(\phi)$  vaut  $+2\pi$  juste à gauche de  $\phi_k$ ,  $-2\pi$  juste à droite<sup>11</sup>. La parenté entre  $f^{(N)'(\phi)}$  et  $f'(\phi) = 2\phi$  est alors évidente : plus  $N$  est grand, plus  $f^{(N)'(\phi)}$  se rapproche de  $f'(\phi)$ , mais bien sûr, tant que  $N$  est fini, la somme finie  $f^{(N)'(\phi)}$  reste continue.

<sup>9</sup>Ceci n'est vrai que si la fonction est continue. C'est le cas de  $f(\phi)$ , mais pas de  $f'(\phi)$ . Les conditions de Dirichlet étant satisfaites, une fonction ayant des sauts et sa série de Fourier sont *presque partout* égales.

<sup>10</sup>S'il est aisé de voir à l'œil une rupture de pente, il est bien difficile de voir une discontinuité de la concavité (liée à la dérivée seconde) !

<sup>11</sup>d'où  $f^{(N)'(\phi_k \pm \delta\phi)} \simeq \pm 6$ , comme signalé plus haut.

Rien n'interdit de considérer la *série* obtenue en prenant la limite  $N \rightarrow +\infty$  de (3.45), pourvu que l'on n'affirme pas que c'est la dérivée  $f'(\phi)$  de  $f(\phi)$  :

$$f^{(\infty)'}(\phi) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\phi \neq f'(\phi) . \quad (3.47)$$

Ces deux fonctions ne sont pas égales partout : en  $\phi_k$ ,  $f^{(\infty)'}(\phi_k) = 0$  par la convergence simple (chaque élément de la suite des sommes partielles  $f^{(N)'}(\phi_k)$  est nul, la limite de la suite vaut zéro), alors que  $f'(\phi_k)$  n'est pas définie, mais la série  $f^{(\infty)'}(\phi = \phi_k)$  est bien égale à la demi-somme  $\frac{1}{2}[f'(\phi_k + 0) + f'(\phi_k - 0)]$ , conformément à (3.31). Pour restituer le saut (la singularité) de  $f'(\phi)$ , le passage à la limite est essentiel<sup>12</sup> (une somme finie de fonctions continues est une fonction continue) ; cette limite étant prise, les valeurs à gauche et à droite sont "correctes", mais il reste que, conformément au théorème de Dirichlet, la série de Fourier est égale à la demi-somme de ces valeurs au point de discontinuité (où il n'est pas nécessaire, *a priori*, de dire ce que vaut la fonction elle-même).

L'origine de ces distinctions est facile à trouver : la série des dérivées (3.47), elle, ne converge pas uniformément (la somme est d'ailleurs discontinue), et c'est pourquoi la somme  $f^{(\infty)'}(\phi)$  de la série obtenue en dérivant (3.43) terme à terme n'est pas égale partout à  $f'(\phi)$  ; en fait, ces deux fonctions sont *presque partout* égales. La possibilité de cette (petite) différence se comprend bien en réalisant que modifier la valeur d'une fonction en un (ou plusieurs) point(s), ne saurait changer la valeur des intégrales (3.21) donnant les coefficients. Dès lors, et très généralement; on ne peut espérer qu'une fonction et sa série de Fourier soient toujours égales partout : ceci n'est vrai que pour les fonctions continues.

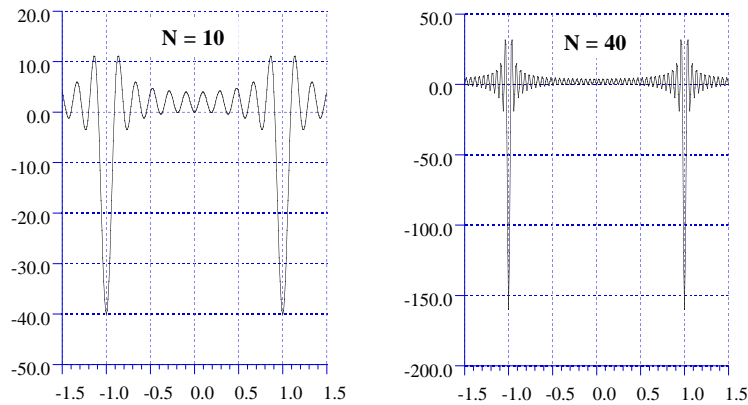


Figure 3.4: Graphes de la seconde dérivée de la fonction tronquée  $f^{(N)}(\phi)$  définie en (3.44) pour  $N = 10, 40$ . Noter les échelles différentes sur l'axe vertical et se souvenir que la fonction  $f$  a en fait une dérivée constante (égale à 2)  $\forall \phi \neq \text{entier} \times \pi \dots$ . Plus  $N$  est grand, plus la dérivée seconde prend des valeurs négatives grandes en valeur absolue, traduisant le fait que pour  $\phi \simeq \text{entier} \times \pi$ , la concavité est dirigée vers le bas en ces points qui vont devenir anguleux à la limite.

Les mêmes considérations, enfin presque, valent pour la dérivée seconde de la série tronquée :

$$f^{(N)''}(\phi) = -4 \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos n\phi . \quad (3.48)$$

<sup>12</sup>Tout comme le passage à la limite thermodynamique, nécessaire pour l'apparition d'un point critique.

Si  $f^{(N)''}(\phi)$  est parfaitement définie (elle vaut 2 en tout point  $\phi \neq$  entier impair  $\times \pi$ ), il est bien clair que le sens de  $f^{(\infty)''}(\phi)$ , obtenue en prenant la limite  $N \rightarrow +\infty$  :

$$f^{(\infty)''}(\phi) = -4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos n\phi \quad (3.49)$$

mérite d'être clarifié !

Revenons sur la dérivation d'un développement tronqué, pour attirer l'attention sur le fait que l'analyse de la (des) fonction(s) obtenue(s) par dérivation(s) constitue un bon test visuel de la fidélité d'un tel développement. Dans le cas présent,  $f'(\phi) = \phi$  et  $f''(\phi) = 2$  pour  $-\pi < \phi < +\pi$ . Les figures montrent que, à  $N$  fixé, plus on dérive, plus la représentation tronquée est visiblement non conforme à l'original. On note aussi que, toutes choses égales par ailleurs, les écarts les plus grands surgissent près des points de discontinuité. Compte tenu des arguments généraux exposés plus haut, ceci ne doit pas être une surprise.

### Exemple 2

Comme autre exemple, procédons en sens inverse, en se donnant d'emblée une certaine distribution de coefficients de Fourier  $f_n$  (ou  $c_n$  et  $s_n$ ). Cette situation est fréquente en pratique, l'enjeu étant de reconstruire une fonction inconnue grâce à la donnée de son spectre de Fourier mesuré par un appareil. Soit par exemple, relativement à une fonction dont on sait par ailleurs qu'elle est paire :

$$c_n = e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\eta^2}} \quad (3.50)$$

le spectre obtenu d'une façon ou d'une autre. Il s'agit d'une distribution gaussienne présentant un maximum en  $n = n_0$  et ayant une largeur d'ordre  $\eta$  : si  $\eta \ll 1$ , la distribution est étroite, dans le cas contraire, elle est presque plate.

La question est de trouver à quoi ressemble la fonction :

$$f(\phi) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\eta^2}} \cos n\phi, \quad (3.51)$$

qui est nulle en moyenne (le développement ne contient pas de terme constant,  $c_0 = f_0 = 0$ ).

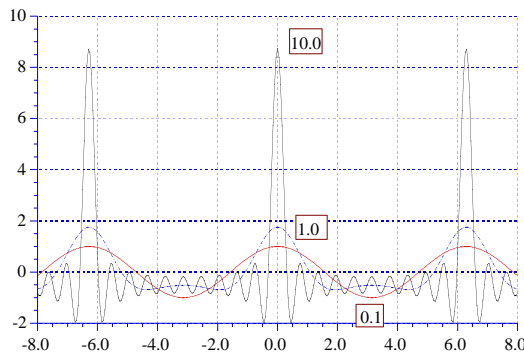


Figure 3.5: Graphes de la fonction dont le spectre de Fourier est donné en (3.51), avec  $n_0 = 1$ . Chaque courbe est repérée par la valeur du paramètre  $\eta$  fixant la largeur de la distribution de Gauss. Le calcul numérique a été fait en tronquant la série à 10 termes ( $e^{-81} \simeq 7 \times 10^{-36} \dots$ )

On voit (fig. 3.5) que si  $\eta \ll 1$  (gaussienne pointue),  $f(\phi)$  ressemble beaucoup à un simple cosinus (c'est de fait  $\simeq \cos n_0\phi$ ) – avec  $n_0 = 1$  comme sur la figure,  $f(\phi) \simeq \cos \phi$ , tout simplement. Au contraire, si  $\eta \gg 1$  (gaussienne large),  $f(\phi)$  ne prend de grandes valeurs que si  $\phi$  est voisin de entier  $\times 2\pi$  : alors, toutes les périodes (fréquences) sont presque également représentées et la somme ne prend de grandes valeurs que si tous les cosinus valent à peu près 1, soit pour  $\phi \simeq$  entier  $\times 2\pi$  : en dehors de ces valeurs, il y a presque annihilation par interférences destructives. On retrouvera ce phénomène par la suite à propos de la diffraction par un réseau.

### Exemple 3

Un dernier exemple : la fonction égale à  $f(\phi) = \cos \nu\phi$  pour  $-\pi < \phi < +\pi$  et périodisée, avec  $\nu \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . On trouve que la série de Fourier est<sup>13</sup> :

$$\frac{1}{\pi} \sin \pi\nu \left[ \frac{1}{\nu} + 2\nu \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\nu^2 - n^2} \cos n\phi \right]. \quad (3.52)$$

En désignant par  $n_0$  et  $n_0 + 1$  les deux entiers qui encadrent le réel  $\nu$  ( $n_0 < \nu < n_0 + 1$ ), les coefficients  $c_{n_0}$  et  $c_{n_0+1}$  sont les plus grands en valeur absolue – d'où la prépondérance des termes  $\cos n_0\phi$  et  $\cos(n_0 + 1)\phi$  dans la série de Fourier. Il n'est pas difficile de montrer que si  $\nu$  tend vers un entier  $m_0$ , l'expression (3.52) se réduit à  $\cos m_0\phi$ , comme il se doit.

#### 3.1.4 Phénomène de Gibbs

L'impression qui se dégage de la section précédente est que plus on augmente le nombre de termes du développement de Fourier, meilleure est la représentation de la fonction originale  $f(\phi)$  par ce développement. Cet optimisme doit être un peu tempéré : si cette amélioration est indiscutable pour les fonctions continues, dont la série de Fourier converge uniformément, un phénomène surprenant se produit près d'un saut lorsque la fonction est discontinue<sup>14</sup> : des oscillations résiduelles apparaissent, dont l'amplitude ne tend pas vers zéro<sup>15</sup> – c'est le phénomène de Gibbs.

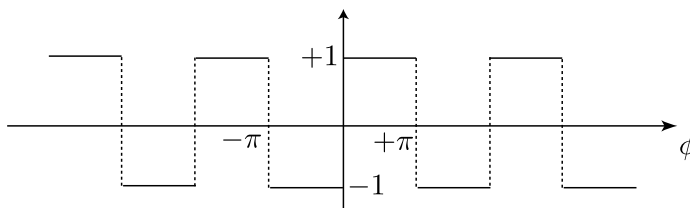


Figure 3.6: La fonction-créneau définie en (3.53).

Illustrons-le dans le cas le plus simple, celui d'une fonction créneau, définie précisément comme suit :

$$f(\phi) = \begin{cases} -1 & -\pi < \phi < 0 \\ +1 & 0 < \phi < \pi \end{cases} \quad (3.53)$$

et prolongée par période sur tout l'axe réel. Le calcul des coefficients  $s_n$  montre que la série de Fourier est<sup>16</sup> :

$$f(\phi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\phi. \quad (3.54)$$

Les graphes des séries tronquées<sup>17</sup> sont tracés sur la fig. 3.7 et montrent le phénomène annoncé : plus  $N$  est grand, plus la série tronquée se rapproche du vrai créneau (les oscillations se tassent et semblent régresser), mais si l'abscisse  $\phi_N$  du maximum des oscillations se rapproche en effet de celle du point de discontinuité, l'amplitude  $\delta_N$  de ce maximum *ne tend pas vers zéro*. On peut en effet montrer<sup>18</sup> que dans la limite  $N$  infini, le maximum

<sup>13</sup>On vérifie sans trop de difficulté que si  $\nu$  tend vers un entier  $n_0$ , le développement (3.52) collapse et se réduit au seul terme  $\cos n_0\phi$ , comme il se doit.

<sup>14</sup>Rappelons que le théorème de Dirichlet énonce un résultat de convergence *simple*.

<sup>15</sup>C'est à ce propos que Michelson a dû s'arracher quelques cheveux.

<sup>16</sup>L'écriture (3.54) commet l'abus annoncé plus haut : en  $\phi = \text{entier} \times \pi$ ,  $f$  n'est pas définie, alors que, selon Dirichlet, le second membre vaut zéro, demi-somme des valeurs à gauche et à droite (la suite des sommes partielles est la suite dont tous les éléments sont nuls, dont la limite est ... nulle).

<sup>17</sup>La série (3.54) a pour limite  $\pm 1$  en  $0_{\pm}$ , et vaut zéro en 0 (Dirichlet). La somme est une fonction discontinue, en accord avec le fait que la série n'est pas uniformément convergente.

<sup>18</sup>Voir l'exercice traité en T.D.

survient infiniment près de l'abscisse du saut (tout en restant soit à gauche, soit à droite), mais *l'écart avec le créneau n'est pas nul* : à la limite,  $\delta_\infty$  vaut à peu près 10% du saut de la fonction. Ainsi, même avec un nombre *infini* de termes, on ne peut pas strictement reproduire la marche, un peu comme si la série, égale à  $-1$  pour  $\phi < 0$ , montait trop vite pour rejoindre sa valeur  $+1$  pour  $\phi > 0$  pour pouvoir s'arrêter à temps à 1 ("la force de l'inertie", comme on dit...). Comme la même oscillation résiduelle existe du côté  $\phi < 0$ , on peut même dire que la série fait du trampoline : elle prend son élan à gauche et du coup elle saute trop haut...

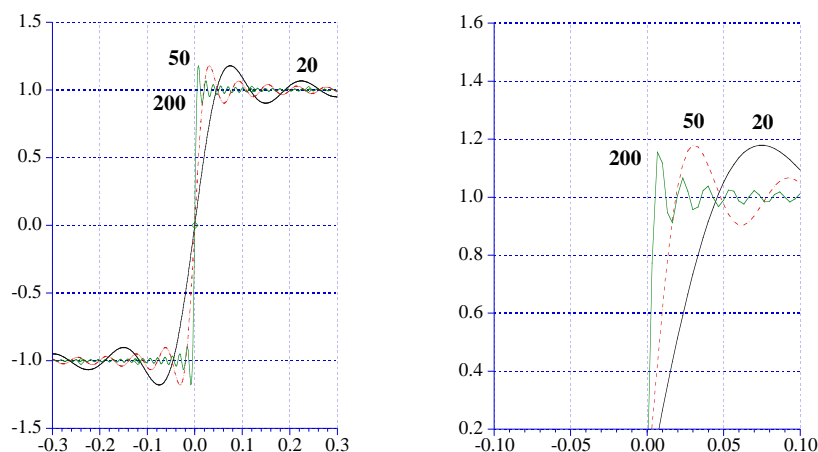


Figure 3.7: Illustration du phénomène de Gibbs près d'un saut de la fonction créneau (3.53) périodisée : graphes avec *zoom* de la série de Fourier de cette fonction, tronquée à  $N$  termes. Chaque courbe, repérée par le nombre  $N = 20, 50$  et  $200$ , est aisément identifiable. L'amplitude de la plus forte oscillation, dont l'abscisse se rapproche pourtant de  $\phi = 0$ , ne tend pas vers zéro.

Pour peu intuitif qu'il soit, ce phénomène n'est pas en contradiction avec le théorème de Dirichlet. En toute abscisse située à distance *finie* du saut, aussi petite soit-elle, la fonction est continue, et la série lui est égale ; juste au point de discontinuité, la série vaut la demi-somme. Pour remarquable qu'il soit, le point où l'oscillation maximale se produit n'est pas concerné par le théorème de Dirichlet. Enfin, même s'il n'existe pas dans la réalité des *vraies* fonctions discontinues, le problème d'un pseudo-phénomène de Gibbs existe pour les fonctions variant très rapidement comparées à une autre échelle de temps pertinente. De fait, ces étrangetés ont une grande importance en pratique : une fois assurée une large bande passante, le phénomène de Gibbs est la cause première de déformation d'un transitoire par un appareil qui le restitue en sortie par recombinaison. Pour plus détails on pourra se reporter aux ouvrages consacrés à la Théorie du signal, exposant notamment les remèdes astucieux pour soigner le malade (le plus connu est l'introduction du *facteur  $\sigma$  de Lanczos*).

◆ *Remarque*

S'il est peu intuitif, ce phénomène constitue un bon exemple des subtilités liées à la convergence des séries de fonctions (simple *vs* uniforme), et à la nécessité de bien formuler la question posée. À défaut, plusieurs réponses différentes peuvent donner l'impression d'un paradoxe, lequel ne résulte que d'une ambiguïté non reconnue de la question elle-même.

- La question *Combien vaut la série (3.54) au point  $\phi = 0$  ?* a le sens suivant, compte tenu du fait que choisir *une* valeur de la variable  $\phi$  n'implique *a priori* aucun processus de limite concernant cette variable.



On commence par considérer la suite des sommes partielles  $f^{(N)}(\phi)$ , qui est donc une suite de fonctions, c'est-à-dire un ensemble de suites numériques, chacune de celles-ci correspondant à une certaine valeur de  $\phi$ . En particulier, soit la suite des  $f^{(N)}(\phi = 0)$  : chacun des éléments de cette suite est nul (somme en nombre fini de termes tous nuls). Comme tous les éléments de la suite sont nuls, la limite de la suite est nulle. La réponse est donc : en  $\phi = 0$ , la série vaut zéro (c'est aussi ce que dit Dirichlet) ; de plus, comme chaque  $f^{(N)}(\phi)$  est continue,  $0 = \lim_{\phi \rightarrow 0_+} f^{(N)}(\phi)$  d'où :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\phi \rightarrow 0_+} f^{(N)}(\phi) = 0 . \quad (3.55)$$

– Autre question : *Quelle est la limite de la série (3.54) quand  $\phi \rightarrow 0$  (à droite) ?*

Là, il est question de limite en  $\phi$ , de sorte que deux limites sont d'emblée en jeu :  $\phi \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$ . On a  $\lim_{N \rightarrow \infty} f^{(N)}(\phi) = +1 \forall \phi > 0$ , puisque, selon Dirichlet, la série converge simplement vers la fonction en tout point de continuité, et que la fonction vaut +1 partout à droite. Comme elle vaut +1 à droite, sa limite à droite est égale à +1, d'où :

$$\lim_{\phi \rightarrow 0_+} \lim_{N \rightarrow \infty} f^{(N)}(\phi) = 1 . \quad (3.56)$$

– Désignant toujours par  $\delta_N$  l'écart (à droite) entre la hauteur de l'oscillation maximale et +1, survenant à l'abscisse positive  $\phi_N$ , le phénomène de Gibbs se traduit par :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = \delta > 0 , \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_N = 0_+ . \quad (3.57)$$

Une autre question est alors : *De quoi le nombre  $1 + \delta$  est-il la limite ?* La réponse est  $1 + \delta$  est la limite de  $\text{Max}_{\phi \geq 0} f^{(N)}(\phi)$  quand  $N \rightarrow +\infty$ , autrement dit :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Max}_{\phi \geq 0} f^{(N)}(\phi) = 1 + \delta . \quad (3.58)$$

Le fait que<sup>19</sup>  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Max}_{\phi > 0} |f^{(N)}(\phi) - f(\phi)| = \delta > 0$  est le symptôme le plus indiscutable du fait que la convergence de la série (3.54) n'est pas uniforme.  $\blacklozenge$

## 3.2 Équations différentielles linéaires avec une source périodique

### 3.2.1 Définition et rappels

Une équation différentielle est une relation entre une fonction  $f$  et ses dérivées, vraie pour toute valeur de la variable où toutes les quantités impliquées sont définies. L'équation est dite *linéaire* si  $f$  et ses dérivées figurent au plus dans des monômes du premier degré. En outre, on sait que s'il existe au moins un terme où ne figurent ni  $f$  ni ses dérivées, l'équation est dite *inhomogène* ; elle est dite *homogène* dans le cas contraire.

La forme générale d'une équation linéaire homogène d'ordre  $M$  est donc :

$$\boxed{\sum_{p=0}^M a_p \frac{d^p f}{d\phi^p} = 0 \iff \mathcal{L}f = 0} \quad (3.59)$$

où  $\mathcal{L}$  désigne l'opérateur différentiel  $\sum_{p=0}^M a_p \frac{d^p}{d\phi^p}$ , qui a bien la propriété d'être linéaire : deux constantes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant données, on a  $\mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{L}f_1 + \lambda_2 \mathcal{L}f_2$ , puisque toute constante sort intacte de la dérivation d'un produit où elle apparaît en facteur. Les  $a_p$  peuvent être des fonctions de  $\phi$ , mais on se bornera dans la

<sup>19</sup>  $f(\phi)$  n'est pas définie en  $\phi = 0$ , d'où le passage de  $\text{Max}_{\phi \geq 0}$  à  $\text{Max}_{\phi > 0}$ .

suite au cas où ce sont de simples constantes<sup>20</sup>. Quand l'équation est homogène, si  $f(\phi)$  est solution,  $Af(\phi)$  est aussi solution, où  $A$  est une constante.

Pour une équation inhomogène, l'usage est de grouper au second membre les termes ne contenant ni  $f$  ni ses dérivées. On écrit ainsi :

$$\sum_{p=0}^N a_p \frac{d^p f}{d\phi^p} = \sigma(\phi) \iff \mathcal{L}f = \sigma \quad (3.60)$$

et le second membre est traditionnellement appelé *source*<sup>21</sup>.

Rappelons une propriété essentielle (immédiate) des équations linéaires homogènes : si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux solutions de l'équation, alors toute combinaison linéaire à coefficients constants est encore solution :

$$\mathcal{L}f_1 = \mathcal{L}f_2 = 0 \implies \mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = 0 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 . \quad (3.61)$$

Ceci ne fait que traduire la propriété de linéarité de l'opérateur  $\mathcal{L}$ .

La théorie générale des équations différentielles linéaires, résumée dans le chapitre 2, établit que la solution la plus générale est une combinaison linéaire de l'équation homogène associée,  $f_{\text{hom}}$ , à laquelle on ajoute une solution particulière  $f_{\text{part}}$  de l'équation (complète) donnée (voir chapitre 2). Il existe des méthodes générales pour trouver  $f_{\text{hom}}(\phi)$ . La méthode utilisant les séries de Fourier est très utile pour trouver une solution particulière  $f_{\text{part}}(\phi)$  quand la source  $\sigma(\phi)$  est périodique.

### 3.2.2 Découplage des fréquences

Si la source  $\sigma(\phi)$  dans (3.60) est périodique, il existe certainement des solutions particulières de même période : une fonction périodique donnée admet des dérivées de même période et toute combinaison linéaire (le premier membre de l'équation (3.60) en est une) reconstruit une fonction ayant cette période. Il est donc *a priori* possible de chercher  $f_{\text{part}}$  sous la forme d'une série (ou d'un polynôme) de Fourier.

L'aspect linéaire de l'équation est essentiel et donne lieu à un phénomène remarquable : le *découplage* des fréquences (pour adopter ici la terminologie propre aux fonctions périodiques dans le *temps*). On va voir en effet que les différentes composantes de Fourier s'ignorent les unes les autres<sup>22</sup>, ce qui simplifie grandement l'obtention effective d'une solution particulière.

Dans la suite, on suppose que toutes les séries introduites convergent uniformément, l'idée étant de donner le principe de la méthode dans le cas le plus simple. Par ailleurs, la source est supposée avoir  $2\pi$  pour plus petite période.

Posons donc :

$$f_{\text{part}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi} \quad (3.62)$$

et reportons ce développement dans le premier membre de l'équation. Grâce à l'hypothèse de convergence uniforme de toutes les séries introduites, on a :

$$f_{\text{part}}^{(p)} = \frac{d^p}{d\phi^p} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{d^p}{d\phi^p} e^{in\phi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n (in)^p e^{in\phi} . \quad (3.63)$$

On lit sur l'expression de droite que  $f_{\text{part}}^{(p)}$  a pour coefficients de Fourier  $(in)^p f_n$ . En factorisant  $e^{in\phi}$ , le premier membre de (3.60) devient :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{p=0}^M a_p (in)^p f_n \right) e^{in\phi} . \quad (3.64)$$

<sup>20</sup>Dans le cas contraire, la résolution par les séries de Fourier produit des équations linéaires contenant des convolutions discrètes.

<sup>21</sup>On parle aussi d'équation *avec second membre*.

<sup>22</sup>Il en va ainsi pour le champ électromagnétique dans un milieu non dispersif, dont les différentes composantes de fréquence donnée n'interagissent pas.

En introduisant la série de Fourier de  $\sigma = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_n e^{in\phi}$ , l'équation s'écrit :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{p=0}^M a_p i^p n^p \right) f_n e^{in\phi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_n e^{in\phi} \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[ \left( \sum_{p=0}^M a_p i^p n^p \right) f_n - \sigma_n \right] e^{in\phi} = 0 . \quad (3.65)$$

Les différentes fonctions  $e^{in\phi}$  sont linéairement indépendantes<sup>23</sup>, toute combinaison linéaire ne peut être nulle (identiquement) que si tous les coefficients sont nuls. La deuxième égalité de (3.65) ne peut donc être vérifiée que si tous les facteurs des  $e^{in\phi}$  sont *séparément nuls*, et c'est ce fait qui traduit techniquement le découplage des fréquences entre elles : l'équation donnant  $f_n$  ne contient aucun autre  $f_{n'}$ ,  $n' \neq n$ . Au total, les coefficients cherchés satisfont les équations<sup>24</sup> :

$$\left( \sum_{p=0}^M a_p i^p n^p \right) f_n = \sigma_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \iff f_n = \frac{\sigma_n}{\sum_{p=0}^M a_p i^p n^p} . \quad (3.66)$$

Ceci fournit une solution unique, donnant la solution particulière cherchée ; chaque composante  $f_n$  est exclusivement donnée par la composante correspondante de la source, et ne dépend nullement des autres  $f_{n'}$ . On peut généralement écrire :

$$f_n = Z_n \sigma_n , \quad Z_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sum_{p=0}^M a_p i^p n^p} \quad (3.67)$$

la fonction  $Z_n$ , caractéristique de l'équation différentielle, porte des noms différents suivant le contexte (impédance, fonction de transfert, fonction de réponse, susceptibilité, ...). Elle dépend de  $n$  : pour des phénomènes périodiques en temps, cette dépendance s'exprimera comme une variabilité en *fréquence*, traduisant la réaction plus ou moins grande du système selon la fréquence de la source d'excitation.

Il est parfaitement clair que c'est la linéarité de l'équation qui conduit au découplage des fréquences<sup>25</sup>. Pour bien marquer ce fait essentiel, considérons le cas contraire où l'équation contient par exemple un terme en  $f^2$ . Alors, l'injection du développement de Fourier de  $f$  dans l'équation donne une série double du genre  $\sum_n \sum_{n'} f_n f_{n'} e^{i n\phi} e^{i n'\phi}$  que l'on peut toujours récrire sous la forme  $\sum_m (\sum_n f_n f_{m-n}) e^{i m\phi}$  : dans ces conditions, l'identification des exponentielles fournit un système (d'ailleurs non-linéaire) entre un  $f_m$  et tous les autres *via* la somme de convolution  $\sum_n f_n f_{m-n}$ .

### 3.2.3 Exemples

Comme premier exemple, soit une particule de masse  $m$  astreinte à se déplacer sur une droite (axe  $Ox$ ), et soumise à une force de frottement proportionnelle à la vitesse (frottement fluide). En l'absence d'excitation (source), l'équation fondamentale de la dynamique est :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} \quad (\alpha > 0) , \quad (3.68)$$

ce que l'on peut toujours écrire ( $v = \dot{x}$ ) :

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\tau}\dot{x} \iff \dot{v} = -\frac{1}{\tau}v , \quad (3.69)$$

où  $\tau = \frac{m}{\alpha}$  est un temps caractéristique du mouvement associé au retour à zéro (*relaxation*) de la vitesse, puisque la solution de (3.69) est  $v(t) = v(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$  : au bout du temps  $\tau$ , la vitesse initiale a relativement décréu de  $\frac{1}{e}$  par rapport à sa valeur initiale, et tend exponentiellement vite vers zéro.

<sup>23</sup>En un peu plus formel, l'argument est le même que celui qui affirme : pour que la combinaison linéaire  $A \cos x + B \sin x$  soit nulle partout, il faut et suffit que  $A = 0$  et  $B = 0$ .

<sup>24</sup>L'écriture (3.66) suppose bien sûr que pour les fréquences présentes dans  $\sigma$ ,  $in$  n'est pas zéro du polynôme caractéristique  $P(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{p=0}^M a_p z^p$ . Voir l'exemple ci-dessous examinant ce cas particulier...

<sup>25</sup>On a d'emblée exclu le cas où les coefficients  $a_p$  de (3.59) dépendent de la variable. En pareille situation, et même si l'équation est linéaire, il n'y a plus découplage des fréquences : les différentes composantes sont couplées les unes aux autres par des sommes de convolution du genre  $\sum_m A_{p, n-m} f_m$  où les  $A_{p, n}$  sont les coefficients de Fourier de  $a_p(\phi)$ .

Si la particule est de surcroît soumise à une force additionnelle  $f(t)$ , l'équation dynamique est ( $\sigma = \frac{f}{m}$ ) :

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau}v + \sigma(t) , \quad (3.70)$$

dont l'écriture traditionnelle est :

$$\boxed{\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = \sigma(t)} \quad (3.71)$$

C'est une équation différentielle linéaire avec une source  $\sigma$ , dont il s'agit de trouver une solution particulière. Supposons  $\sigma(t)$   $T$ -périodique et de pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ; on introduit alors sa série de Fourier :

$$\sigma(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_n e^{in\omega t} \quad (3.72)$$

et celle de la vitesse  $v_{\text{part}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n e^{in\omega t}$ . Supposant toutes les hypothèses de convergence uniforme satisfaites, l'équation (3.71) se transforme en :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( in\omega + \frac{1}{\tau} \right) v_n e^{in\omega t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_n e^{in\omega t} \quad (3.73)$$

et donne la relation entre composantes de Fourier :

$$\boxed{\left( in\omega + \frac{1}{\tau} \right) v_n = \sigma_n \iff v_n = \frac{\sigma_n}{in\omega + \frac{1}{\tau}}} \quad (3.74)$$

Une solution particulière de (3.71) est donc formellement :

$$\boxed{v_{\text{part}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\tau \sigma_n}{1 + in\omega \tau} e^{in\omega t}} \quad (3.75)$$

$\sigma(t)$  étant à valeurs réelles,  $\sigma_{-n} = \sigma_n^*$ , d'où :

$$v_{\text{part}}(t) = \tau \sigma_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\sigma_n}{in\omega + \frac{1}{\tau}} e^{in\omega t} + \frac{\sigma_{-n}^*}{-in\omega + \frac{1}{\tau}} e^{-in\omega t} \right) \equiv \tau \sigma_0 + 2\Re \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{in\omega + \frac{1}{\tau}} e^{in\omega t} ; \quad (3.76)$$

la vitesse est bien réelle, comme il se doit<sup>26</sup>. Quand  $\sigma$  est une fonction paire ( $\sigma(-t) = \sigma(t)$ ), alors  $\sigma_{-n} = \sigma_n$  et :

$$v_{\text{part}}(t) = \tau \sigma_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau \sigma_n}{1 + (n\omega \tau)^2} (\cos n\omega t + n\omega \tau \sin n\omega t) . \quad (3.77)$$

Pour fixer les idées, prenons  $\sigma(t) = 2\frac{v_0}{\tau} \cos^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{v_0}{\tau} (1 + \cos \omega t)$  : la source est donc la somme d'un terme constant et d'une oscillation harmonique à  $\omega$  ; on a alors<sup>27</sup>  $\sigma_0 = \frac{v_0}{\tau}$ ,  $\sigma_{\pm 1} = \frac{v_0}{2\tau}$ , tous les autres  $\sigma_n$  étant nuls. Selon (3.75), la vitesse est :

$$v_{\text{part}}(t) = v_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0}{i\omega \tau + 1} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \frac{v_0}{-i\omega \tau + 1} e^{-i\omega t} = v_0 \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \right] , \quad (3.78)$$

où  $\varphi = \arctan(\omega \tau)$ . Deux cas-limites apparaissent :

- basse fréquence d'excitation,  $\omega \tau \ll 1$ . Dans ce cas, la source effectue une petite fraction d'oscillation pendant le temps de relaxation (relaxation rapide). Alors,  $v(t) \simeq v_0 [1 + [1 - \frac{1}{2}(\omega \tau)^2] \cos \omega(t - \tau)]$  : la vitesse suit à peu près l'excitation à un léger déphasage constant près. C'est le cas du frottement fort, qui se conçoit bien physiquement.

<sup>26</sup>Pour une source constante et égale à  $\sigma_c$ ,  $\sigma_n = \sigma_c \delta_{n0}$  ; (3.76) donne  $v_{\text{part}}(t) = \tau \sigma_c$ , qui est visiblement une solution particulière de (3.71) avec une source constante.

<sup>27</sup> $\sigma$  étant ici une fonction réelle et paire, ses coefficients de Fourier sont réels et pairs.

- haute fréquence d'excitation,  $\omega\tau \gg 1$  (ou relaxation lente). Alors  $v(t) \simeq v_0 \left[1 + \frac{1}{\omega\tau} \sin \omega t\right]$  : dans ce cas, une oscillation de faible amplitude (et déphasée de  $\frac{\pi}{2}$ ) se superpose au mouvement de dérive à vitesse constante imposé par la composante statique de la source.

Comme deuxième exemple, prenons un oscillateur de pulsation propre  $\omega_0$ , dont l'équation en présence d'une source est :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \sigma(t) \equiv \omega_0^2 a(t) . \quad (3.79)$$

Le même type de calcul donne maintenant les composantes de Fourier de  $x(t)$  sous la forme :

$$[-(n\omega)^2 + \omega_0^2] x_n = \sigma_n \iff x_n = \frac{a_n}{1 - n^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{a_n}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - n^2} , \quad (3.80)$$

à condition que le rapport  $\frac{\omega}{\omega_0}$  ne soit pas un entier  $n_0$  – condition inutile si  $\sigma_{n_0} = 0$ .

L'expression (3.80) montre que la composante de Fourier de  $x$  est exaltée quand précisément le rapport  $\frac{\omega_0}{\omega}$  est voisin d'un certain nombre entier  $n_0$  – et c'est alors la composante  $x_{n_0}$  qui est très grande. Ceci se produit donc à chaque fois que la source contient des oscillations de fréquence voisine de la fréquence fondamentale de l'oscillateur, et de ses sous-harmoniques  $\frac{\omega_0}{n}$ . Dans le cas où  $\frac{\omega_0}{\omega}$  est strictement un entier  $n_0$  ce système "explose", et il n'existe pas de solution forcée périodique : l'amplitude augmente indéfiniment (résonance infinie). Ceci veut dire que la période d'excitation  $T$  est égale à  $n_0 T$  : c'est bien en relançant la balançoire au bout d'un nombre entier de périodes qu'on lui donne peu à peu une grande amplitude.

La divergence fournie par le calcul précédent est un bon exemple d'une situation typique de la Physique : la manipulation d'un modèle (trop) simple conduisant à des difficultés techniques, et exigeant *a posteriori* une analyse plus fine. Ici, il suffit de réaliser qu'en pratique il y a toujours de l'amortissement, et c'est lui qui empêche la divergence de l'amplitude ; techniquement, ceci se traduit par un terme imaginaire pur additionnel au dénominateur de l'expression (3.80), qui interdit à ce dernier de s'annuler (voir le ch. 3 pour plus de détails). La description simplifiée ci-dessus, hors résonance, garde sa validité si le système réel est peu amorti et si son observation dure pendant un temps très petit devant le temps d'amortissement.

### 3.3 Analyse d'un signal périodique avec un appareil de bande passante donnée

En Physique, l'analyse d'un phénomène représenté par une fonction périodique (signal périodique) passe toujours par un enregistrement sous une forme ou une autre. L'appareil qui enregistre le signal n'est jamais parfait, mais est caractérisé par une *fonction d'appareil* décrivant comment les différentes fréquences sont reçues/transmises par l'appareil. Une fonction d'appareil idéal est plate (aucune fréquence n'est privilégiée) et s'étend de 0 à  $+\infty$  dans l'échelle des fréquences (toutes les fréquences sont uniformément transmises). Cette situation n'est jamais réalisée en pratique : d'une part la courbe donnant la bande passante n'est pas strictement plate, et d'autre part elle s'annule en dehors d'un intervalle  $[\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ . Dans le cas le plus schématique, la courbe est effectivement plate dans cet intervalle : en terme de variables dimensionnées, ceci signifie que la fonction  $T$ -périodique dont le développement est  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t}$ , injectée à l'entrée de l'appareil, est simplement tronquée aux hautes et basses fréquences et est inaltérée pour les fréquences situées dans la bande passante. La fonction restituée par l'appareil est donc :

$$f_{\text{enr}}(t) = \sum_{n_{\min} \leq |n| \leq n_{\max}} f_n e^{in\omega t} , \quad (3.81)$$

où  $[n_{\min}, n_{\max}]$  caractérise la bande passante. Tout ce qui a été dit précédemment montre que le signal enregistré est déformé par rapport à l'original, la déformation étant d'autant plus grande que la bande passante est faible<sup>28</sup>.

<sup>28</sup>Ne pas se laisser abuser par l'argument affirmant que pour un ampli HiFi, il suffit de se contenter de la bande  $\sim 20 - 20\,000$  Hz, au motif que c'est la bande passante d'une oreille jeune et sans défaut !

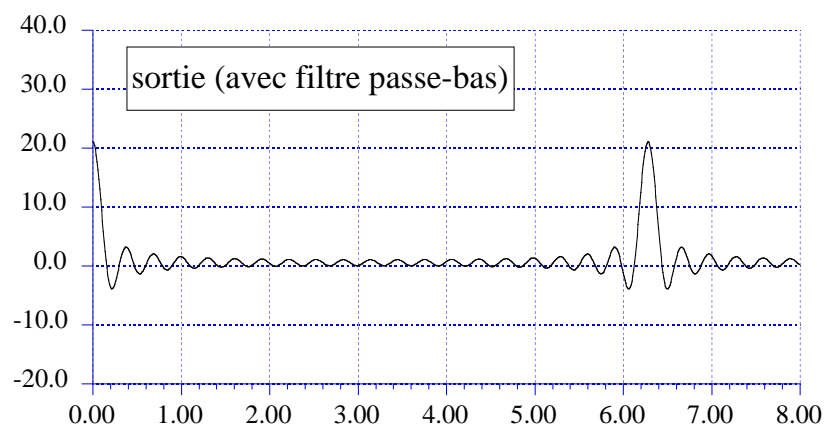
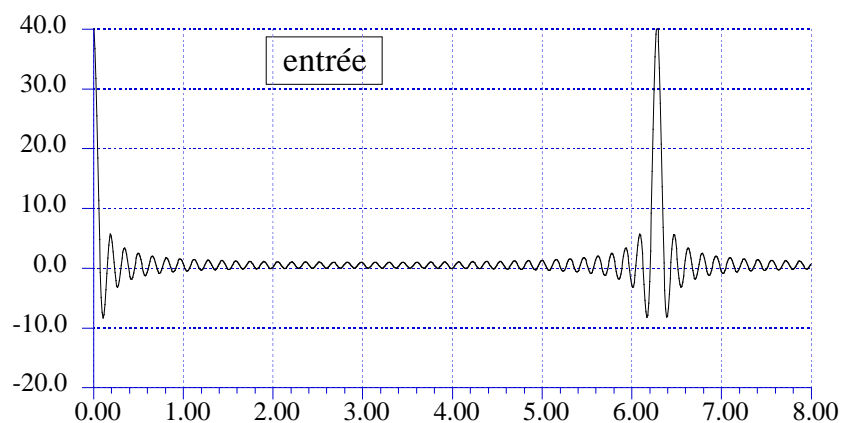
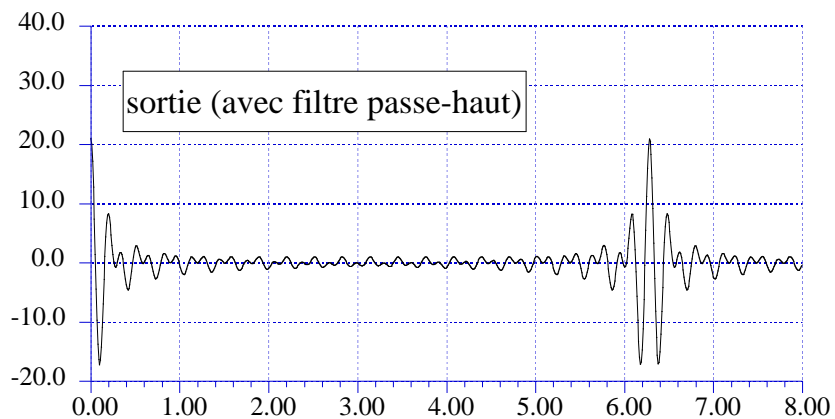


Figure 3.8: Comparaison des signaux d'entrée et de sortie pour la fonction (3.82) avec un spectre uniforme  $c_n = 1$ ,  $0 \leq n \leq 40$ ,  $c_n = 0$  si  $n > 40$ . La fréquence de coupure correspond à  $N_{\text{coupure}} = 20$ .

Pour un signal périodique harmonique (ne contenant qu'une seule fréquence – l'orgue est un presque parfait exemple), la situation est évidemment très simple : ou bien cette seule et unique fréquence est dans la bande passante, ou bien elle n'y est pas, le signal harmonique passe ou ne passe pas.

En revanche pour un signal complexe (un transitoire – coup d'archet ou percussion –, et/ou un instrument au timbre riche – piano, violon, guitare), contenant *a priori* presque toutes les fréquences, la bande passante finie introduit inexorablement des déformations (distorsions). Dans ce qui suit, on discute sommairement ce qui se passe quand l'appareil coupe aux hautes fréquences, ou s'il coupe les basses fréquences. Pour simplifier, le signal d'entrée est supposé pair (sa série trigonométrique ne contient que des cosinus) :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos n\omega t . \quad (3.82)$$

Si l'appareil coupe aux hautes fréquences, ceci signifie que le signal enregistré est :

$$f_{\text{enr}}(t) = \sum_{n=0}^{N_{\text{coupure}}} c_n \cos n\omega t . \quad (3.83)$$

Tout se passe comme si on utilisait un filtre passe-bas idéal, la fréquence de coupure étant  $\nu_{\text{max}} = 2\pi N_{\text{coupure}}\omega$ .

Quelle est la différence entre les deux fonctions (3.82) et (3.83) ? L'analyse précise est complexe, mais on peut deviner qualitativement quelques traits marquants en notant que pour faire disparaître les termes  $n > N_{\text{coupure}}$  dans le développement de l'entrée, il suffit d'intégrer<sup>29</sup> sur un intervalle de temps plus grand que la plus petite période retenue : alors, tous les termes oscillant plus rapidement vont être moyennés à zéro, les autres étant peu altérés. Autrement dit, couper au-dessus de la fréquence  $\omega_{\text{max}} = N_{\text{coupure}}\omega$  tend à effacer les variations temporelles survenant sur une échelle de temps  $\Delta t \sim \frac{1}{\omega_{\text{max}}}$  ou plus courte : l'appareil lisse partiellement les variations rapides de  $f(t)$ , s'il y en a ; en particulier, les crêtes du signal d'entrée vont être atténuées. Notons aussi que si les  $c_n$  sont tous positifs, les maxima de  $f(t)$ , survenant pour  $t = \text{entier} \times T$  ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ) sont atténués par l'appareil :

$$f(t = \text{entier} \times T) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n > f_{\text{enr}}(t = \text{entier} \times T) = \sum_{n=0}^{N_{\text{coupure}}} c_n . \quad (3.84)$$

Des remarques analogues valent si on coupe aux basses fréquences, au-dessous de  $\omega_{\text{min}} = N_{\text{coupure}}\omega$  (filtre passe-haut). Alors, les composantes lentement variables vont être effacées, et les crêtes sont encore émoussées, puisque les termes presque statiques y apportent également une contribution. De plus, comme l'empilement de termes oscillants peut conduire à des interférences destructrices, l'effacement des composantes lentement variables fait apparaître des oscillations rapides absentes dans le signal d'entrée.

Ces distorsions sont illustrées dans un cas particulier dans la fig. 3.8, pour une entrée contenant un nombre fini de cosinus avec des poids égaux<sup>30</sup>.

### 3.4 Diffusion cohérente par un réseau fini

D'une façon générale, on appelle *réseau* un ensemble de points (aussi appelés nœuds, sites, ...) organisés dans l'espace suivant une règle précise. Le cas le plus fréquent<sup>31</sup> est celui où les points sont, suivant chaque direction

<sup>29</sup>Plus précisément, on prend la moyenne  $\frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} f(t) dt$ , où  $T_m > T_{\text{min}}$  est la période associée à la plus grande pulsation  $\omega_{\text{max}}$ .

<sup>30</sup>Une telle somme, à la limite d'un nombre infini de termes, engendre le peigne de Dirac traité plus bas, à des constantes près.

<sup>31</sup>La règle de construction géométrique peut aussi être définie sur des considérations plus "topologiques", du genre : chaque nœud est un point de branchement vers  $z$  nœuds (arbres, réseau de Bethe).

Les premiers réseaux historiquement considérés en Physique sont les réseaux dits *de Bravais*, obtenus comme l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^d$  de coordonnées entières relativement à une base de  $d$  vecteurs. Dans  $\mathbb{R}^3$ , tout nœud d'un réseau de Bravais est ainsi l'extrémité du vecteur  $n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$ , les  $n_i$  étant dans  $\mathbb{Z}$ , les  $\vec{a}_i$  étant les (ou plutôt *des*) vecteurs *primitifs* du réseau considéré. Le réseau en nid d'abeille n'est pas un réseau de Bravais.

de  $\mathbb{R}^3$ , régulièrement espacés les uns des autres. Dans un premier temps, on se borne par simplicité au cas d'un réseau unidimensionnel : c'est un ensemble de points alignés, équidistants de la distance  $a$ . L'extension au cas tridimensionnel sera restreinte à une suite d'affirmations sans démonstration.

Un réseau est dit *fini* s'il contient un nombre fini  $N$  de sites, infini dans le cas contraire ; dans le cas unidimensionnel, il est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , dans  $\mathbb{R}^d$ , il est isomorphe à  $\mathbb{Z}^d$ .

Les réseaux apparaissent très souvent en Physique, l'exemple le plus ancien étant celui fourni par les solides cristallisés, se différenciant des *amorphes* (verres) par l'existence d'un ordre spatial à longue portée (théoriquement infinie), complètement caractérisé par une maille cristalline de dimension atomique. Il existe aussi des réseaux optiques (dans l'acception ancienne), réalisés en gravant des traits parallèles sur une surface, et servant notamment de monochromateurs. Enfin, depuis récemment, on sait fabriquer des organisations spatiales pour le champ électromagnétique où, schématiquement, les composantes (du champ électrique, essentiellement) définissent un réseau spatial de puits de potentiel où des atomes peuvent se piéger préférentiellement (et on parle encore de *réseaux optiques*). Dans la suite, on s'en tient aux réseaux représentant les cristaux.

La matière cristallisée ordinaire<sup>32</sup> donne lieu à un phénomène remarquable : relativement à une incidence donnée du faisceau (rayons X, neutrons, ...) issu de la source pour "éclairer" l'échantillon, il n'existe de lumière diffusée que pour des directions caractéristiques du cristal – en dehors de ces directions, l'intensité diffusée est nulle (enfin presque). Cette *hypersélectivité* en direction résulte des interférences entre les ondes diffusées par les atomes régulièrement disposés dans l'espace, qui se révèlent constructives pour les directions remarquables, totalement<sup>33</sup> destructives autrement.

On sait utiliser depuis très longtemps les rayons X pour tirer profit de ce phénomène et déterminer les structures cristallines. Depuis une cinquantaine d'années, on sait également fabriquer en toute sécurité des sources de neutrons permettant le même type d'expérience. Dans tous les cas, la longueur d'onde de la sonde doit être du même ordre de grandeur (mais plus petite) que la longueur caractérisant la maille cristalline, notée  $a$ , faute de quoi l'effet d'hypersélectivité est perdu, on verra brièvement pourquoi dans la suite (section 3.5).

Revenons sur l'origine de la diffusion sélective. Quand on envoie de la "lumière" sur un grand nombre  $N$  de diffuseurs se bornant à changer la direction de propagation de celle-ci<sup>34</sup>, des interférences se produisent : les ondes diffusées s'additionnent, mais avec un déphasage dû aux positions différentes occupées dans l'espace par les atomes. Pourvu que  $N$  soit assez grand, l'intensité lumineuse n'est alors sensiblement différente de zéro que dans certaines directions remarquables de diffusion. C'est ce résultat majeur qui est établi dans la suite.

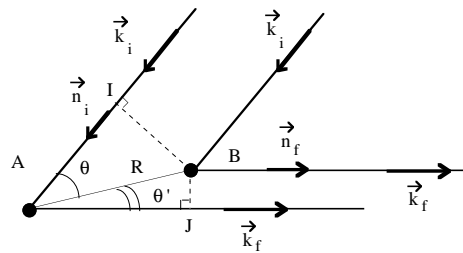


Figure 3.9: Déphasage spatial pour deux diffuseurs situés en A et B.

Soit un réseau unidimensionnel fini d'atomes régulièrement disposés sur une ligne, aux points d'abscisses  $x_n = na$ ,  $-N \leq n \leq N$  ( $2N + 1$  sites), sur lequel est envoyée de la lumière émise par une source située à l'infini. L'observateur, situé aussi à l'infini, reçoit la lumière diffusée élastiquement par tous les atomes sous

<sup>32</sup>Celle dite de basse énergie, où l'échelle typique ne dépasse guère l'eV.

<sup>33</sup>Le "totalement" doit être pris au sens où si le nombre de diffuseurs est aussi grand que l'on veut (mais fini !), l'intensité, en dehors des directions caractéristiques de la structure cristalline, est aussi petite que l'on veut.

<sup>34</sup>Diffusion dite élastique (pas de changement de longueur d'onde) et cohérente (pas de phase aléatoire, d'une origine ou d'une autre).



forme d'ondes planes (l'aspect sphérique caractéristique d'un diffuseur ponctuel est effacé). En l'absence de non-linéarités, on peut raisonner composante par composante, et supposer que l'onde incidente est monochromatique, de pulsation  $\omega$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . Son vecteur d'onde est  $\vec{k}_i$  ( $k_i = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) et on raisonne dans le plan formé par celui-ci et la ligne du réseau.

L'observateur est situé dans le même plan selon une direction repérée par le vecteur d'onde de la lumière diffusée, notée  $\vec{k}_f$  ; pour la diffusion élastique, les modules des vecteurs d'onde sont égaux,  $k_i = k_f$ , seule la direction du vecteur d'onde est modifiée.

Raisonnons d'abord avec deux diffuseurs situés en deux points A et B, définissant un certain vecteur  $\vec{R}$ . La différence de chemin pour les ondes diffusées par A et B est  $IA + AJ$  (fig. 3.9), soit :

$$R \cos \theta + R \cos \theta' \equiv \vec{R} \cdot (-\vec{n}_i) + \vec{R} \cdot \vec{n}_f = \vec{R} \cdot (\vec{n}_f - \vec{n}_i) \quad (\vec{R} = \overrightarrow{AB}) . \quad (3.85)$$

Le déphasage est donc :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \vec{R} \cdot (\vec{n}_f - \vec{n}_i) \equiv \vec{R} \cdot (\vec{k}_f - \vec{k}_i) \equiv \vec{R} \cdot \vec{q} \quad \left( \lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}_i\|} = \frac{2\pi}{\|\vec{k}_f\|} \right) . \quad (3.86)$$

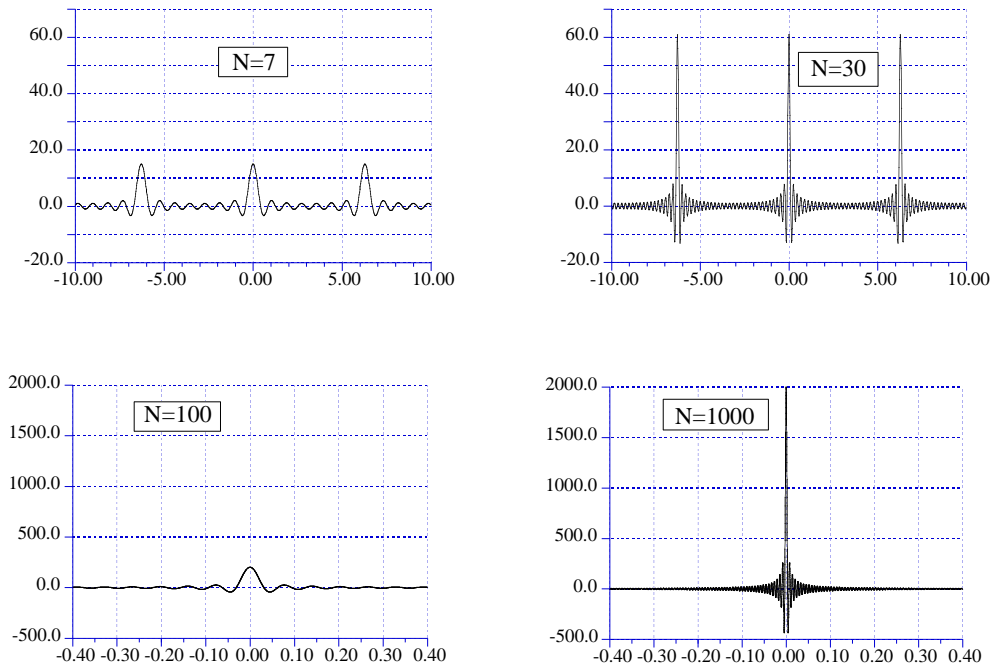


Figure 3.10: Variations de  $S_N$ , (3.88), pour  $N = 7$  et  $N = 30$  d'une part,  $N = 100$  et  $N = 1000$  d'autre part (noter que les échelles sont les mêmes sur les deux couples de graphes).

L'onde incidente est du genre  $A_0 \cos \omega t$ , chaque onde diffusée, compte tenu du déphasage spatial du centre qui l'a émise, est  $f A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R})$ , où  $f$  (facteur de diffusion atomique) décrit quantitativement la faculté de chaque atome à diffuser la lumière qu'il reçoit (plus ou moins, selon l'angle, ...). Chacun des cosinus peut être écrit comme la partie réelle d'une exponentielle  $e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R})}$ , de sorte que, au total, l'onde diffusée par tous les atomes est<sup>35</sup> :

$$\Re A_0 \sum_{n=-N}^{+N} e^{-i[\omega t - (na\vec{u}) \cdot \vec{q}]} = \Re A_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=-N}^{+N} e^{ina\vec{q} \cdot \vec{u}} , \quad (3.87)$$

<sup>35</sup> $\Re$  désigne la partie réelle.

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire du réseau. Le terme temporel oscillant est sans importance (il se factorise) et, posant  $a\vec{q}\cdot\vec{u} = \phi$ , l'amplitude diffusée collectivement est proportionnelle à la somme  $S_N = \sum_{n=-N}^{+N} e^{in\phi}$  ; il s'agit essentiellement d'une progression géométrique<sup>36</sup> et on trouve sans peine :

$$S_N \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{n=-N}^{+N} e^{in\phi} = \frac{\sin(2N+1)\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} \quad (3.88)$$

$S_N$  est par construction une fonction  $2\pi$ -périodique, qui présente des pics d'autant plus pointus que  $N$  est grand. Les grands *maxima* (où  $S_N = 2N+1$ ) surviennent là où le dénominateur s'annule, soit pour  $\frac{\phi}{2} = \text{entier} \times \pi$ , ou encore :

$$\vec{q}\cdot\vec{u} = \text{entier} \times \frac{2\pi}{a} . \quad (3.89)$$

Le premier minimum est en  $(2N+1)\frac{\phi}{2} = \pi$ , soit  $\phi \simeq \frac{\pi}{N}$  pour  $N \gg 1$ . On imagine (difficilement !) la finesse du pic central lorsque  $N$  est de l'ordre du nombre d'Avogadro : sa hauteur est d'ordre  $10^{23}$ , sa largeur est d'ordre  $10^{-23}$  radian (sa surface vaut donc 1 environ<sup>37</sup>). Clairement (3.89) exprime la condition d'interférences constructives.

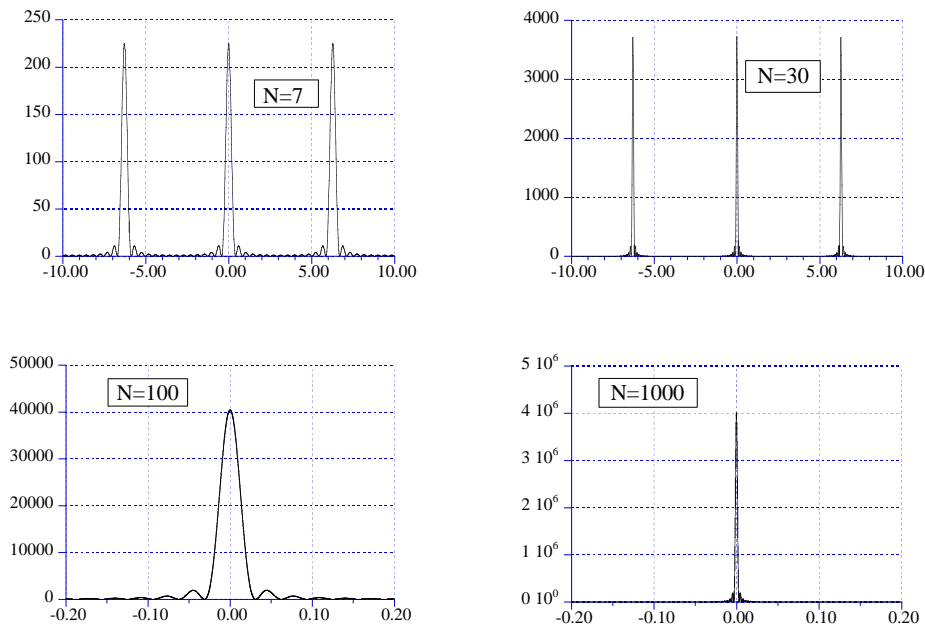


Figure 3.11: Carré de la fonction  $S_N(\phi)$ . Noter les échelles différentes d'un tracé à l'autre. L'intensité diffusée est proportionnelle à  $S_N^2(\phi)$ .

L'intensité diffusée est proportionnelle au *carré*, de l'amplitude, soit :

$$I_{\text{diffusée}} \propto S_N^2 \equiv |S_N|^2 \quad (3.91)$$

<sup>36</sup>  $\sum_{n=0}^N X^n = \frac{1-X^{N+1}}{1-X}$ .

<sup>37</sup> L'aire sous  $S_N(\phi)$  entre  $\pm\pi$  vaut exactement  $2\pi$ , comme on le voit en intégrant la somme  $S_N$  terme à terme, puisque seul le terme  $n=0$  contribue, de sorte que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_N(\phi) d\phi = 1 . \quad \forall N \quad (3.90)$$

( $S_N$  est réel, et donc  $S_N = S_N^*$ ) et varie entre 0 et  $(2N + 1)^2$ . L'aire sous  $S_N^2$  se déduit de :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} S_N^2(\phi) d\phi = \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-N}^{+N} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)\phi} d\phi = \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m=-N}^{+N} 2\pi\delta_{nm} = 2\pi(2N + 1) . \quad (3.92)$$

Comme le maximum de  $|S_N|^2$  vaut  $(2N + 1)^2$ , on en déduit bien que la largeur typique de la courbe  $|S_N|^2$  est d'ordre  $\frac{1}{2N+1}$  : quand  $N$  est de l'ordre du nombre d'Avogadro, on peut bien affirmer que cette largeur est "infiniment" fine (voir fig. 3.11).

La condition(3.89) a une interprétation géométrique simple (voir fig. 3.12).  $\vec{k}_f$  et  $\vec{k}_i$  ayant même module  $k$ , le vecteur  $\vec{k}_f - \vec{k}_i$  a pour module  $2k \sin \theta$  ; si  $\alpha$  désigne l'angle entre l'axe du réseau et  $\vec{k}_f - \vec{k}_i$ , cette condition s'écrit s'écrit :

$$2k \sin \theta |\cos \alpha| = \text{entier} \times \frac{2\pi}{a} \quad (3.93)$$

et constitue donc une contrainte entre les deux angles<sup>38</sup>  $\theta$  et  $\alpha$ . Si l'observateur regarde symétriquement par rapport à la direction d'incidence (réflexion),  $\alpha = 0$  ( $\pi$ ),  $\theta$  est l'angle d'incidence et d'émergence compté à partir de la normale. On obtient alors simplement :

$$\boxed{2k \sin \theta = \text{entier} \times \frac{2\pi}{a} \iff 2a \sin \theta = \text{entier} \times \lambda} \quad (3.94)$$

C'est le précurseur de la relation de Bragg, dans sa formulation élémentaire.

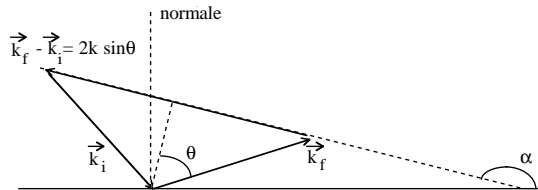


Figure 3.12: Illustration géométrique de la condition de diffusion coopérative (diffraction).

### 3.5 Diffusion cohérente par un réseau infini

L'étude précédente montre que plus  $N$  est grand, plus la condition de diffusion coopérative devient contraignante, les résonances de  $S_N(\phi)$  devenant de plus en plus fines et de plus en plus hautes quand  $N$  croît. Pour  $N$  de l'ordre du nombre d'Avogadro, chaque résonance est "infiniment" fine et "infiniment" haute, son aire étant un nombre fini.

Soit maintenant une fonction quelconque  $f(\phi)$ , douée de toutes les propriétés de régularité voulues (continuité, dérivabilité, ...), mais surtout à variation lente à l'échelle  $\pi$ . Considérons l'intégrale :

$$I_N \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\phi) S_N(\phi) d\phi \quad (3.95)$$

<sup>38</sup>L'arbitraire sur l'un des deux angles vient du fait que, pour un réseau unidimensionnel, la conservation de l'impulsion (du photon) ne tient que le long de l'axe du réseau : tous les photons ayant la même projection sur l'axe du réseau satisfont la condition de Bragg. En d'autres termes, le réseau réciproque d'un réseau unidimensionnel est un réseau de plans, non pas de points.

dans la limite  $N \gg 1$ . Clairement, et puisque  $f$  est à variation lente relativement à  $S_N$  qui est très piquée, on peut sans dommages sortir  $f$  de l'intégrale et écrire :

$$I_{N \gg 1} \simeq f(\phi = 0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_N(\phi) d\phi = f(0) . \quad (3.96)$$

On peut vouloir s'affranchir du symbole  $\simeq$ , se disant intuitivement qu'il suffit (?) de prendre la limite  $N$  infini. En réalité, on introduit ce faisant un symbole dépourvu de sens puisque la  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  n'existe pas : c'est une fonction presque partout nulle, mais dont l'intégrale entre  $\pm\pi$  vaut  $2\pi$  ; or retirer un point d'un intervalle d'intégration ne change pas la valeur de l'intégrale !

Il est néanmoins possible de donner un sens à de telles opérations, c'est l'objectif accompli de la Théorie des distributions, dont l'un des objets importants est précisément, à un facteur près, la limite de la fonction  $S_N$  ci-dessus. Traditionnellement notée  $\delta$ , c'est une *fonction* en un sens généralisé, dont la règle opérationnelle de base peut s'écrire *schématiquement* comme suit :

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(\phi) \delta(\phi - \phi_0) d\phi = f(\phi_0) \quad (\phi_1 < \phi_0 < \phi_2) \quad (3.97)$$

à condition que la fonction  $f(\phi)$  soit une "bonne" fonction. On peut se faire une idée du graphe de  $\delta(\phi - \phi_0)$  en imaginant la limite d'une résonance devenant de plus en plus forte au fur et à mesure qu'elle est plus fine, et dont l'aire reste égale à 1, ce que l'on écrit, toujours aussi symboliquement<sup>39</sup> :

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \delta(\phi - \phi_0) d\phi = 1 \quad (\phi_1 < \phi_0 < \phi_2) \quad (3.98)$$

Dans ces conditions, la relation symbolique est<sup>40</sup> :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\phi) = 2\pi \delta(\phi) \quad (-\pi < \phi < \pi) . \quad (3.99)$$

Pour la discussion intuitive précédente, on s'est restreint à l'intervalle  $\pm\pi$ , mais tout peut être répété sur  $\mathbb{R}$  à  $2\pi$  près, et d'ailleurs, de par sa définition (3.88),  $S_N$  est  $2\pi$ -périodique. Il en résulte que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\phi) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\phi - n 2\pi) \quad \forall \phi \in \mathbb{R} . \quad (3.100)$$

Explicitement, l'écriture symbolique est donc :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\phi} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\phi - n 2\pi) . \quad (3.101)$$

Le graphe de cette "fonction" est donc une série de résonances équidistantes, infiniment hautes et infiniment fines : c'est ce que l'on appelle le *peigne de Dirac*, souvent désigné par le symbole évocateur  $\text{III}(\phi)$  :

$$\text{III}(\phi) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\phi} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\phi - n 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\phi - n) . \quad (3.102)$$

En admettant sans états d'âme ces généralisations symboliques, on voit que pour un réseau infini, la diffusion ne se produit *strictement*<sup>41</sup> que pour certaines directions appelées directions de Bragg : pour un réseau

<sup>39</sup>ce qui revient à prendre  $f(\phi) = 1 \forall \phi$  dans (3.97).

<sup>40</sup>Dans (3.98), la restriction  $-\pi < \phi < +\pi$  est importante, voir juste après.

<sup>41</sup>En pratique, toutes les raies de Bragg ont une largeur finie qui ne tient pas forcément au fait que tout échantillon n'est pas infini : de multiples sources d'élargissement existent toujours (défauts structuraux ou chimiques, vibrations (*phonons*) du réseau par exemple). Leur discussion, très subtile, est précisément liée à la dimensionnalité du cristal. Pour un cristal tridimensionnel, les vibrations ne donnent qu'une atténuation de l'intensité de chaque raie (facteur de Debye - Waller) ; pour les dimensions réduites, les effets de taille finie peuvent entrer en compétition avec les phonons, en raison de la divergence de certaines intégrales pour  $d = 1, 2$ .

infini, l'intensité diffusée est nulle si la condition (3.93) n'est pas satisfaite, non-nulle dans le cas contraire (pour un réseau fini, cette condition donne le maximum principal à  $2\pi$  près). La condition de Bragg, en réflexion, est alors *strictement* :

$$\boxed{2a \sin \theta = \text{entier} \times \lambda} \quad (3.103)$$

Cette équation n'a de solutions que si  $\text{entier} \times \frac{\lambda}{2a} < 1$ , ce qui impose à la longueur d'onde d'être nettement plus petite que le double du paramètre de réseau – faute de quoi la seule solution est  $\theta = 0$  (réflexion sans diffusion). Chaque réflexion de Bragg est caractérisée par un angle  $\theta_n$ , associé à un certain entier  $n$  appelé *ordre* de la réflexion :

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{2a} . \quad (3.104)$$

Les rayons X, dont les sources courantes donnent une longueur d'onde de l'ordre de 0.5 à 1 Å sont particulièrement adaptés à l'étude de la matière ordinaire ; s'agissant des neutrons, on doit les thermaliser à l'ambiante pour satisfaire  $\lambda \lesssim 2a$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde associée au sens de de Broglie ( $\lambda = \frac{h}{Mv}$ , avec des notations évidentes).

Il a été noté que la condition (3.93), établie dans le cas unidimensionnel, donne seulement une relation entre les deux angles  $\theta$  et  $\alpha$ , l'un d'entre eux restant *a priori* libre. Dans le cas tridimensionnel, il en va tout autrement : on trouve en fait une condition du genre Bragg pour chacune des trois directions<sup>42</sup>, de sorte que globalement la contrainte exprimant la diffusion coopérative est beaucoup plus stricte, tous les angles se trouvant fixés. Ainsi, la diffusion ne se produit que pour des angles complètement déterminés par la structure cristalline définissant sans ambiguïté le réseau cristallin et son réseau réciproque.

---

<sup>42</sup>du réseau réciproque. La factorisation en trois conditions résulte du fait que l'exponentielle donnant le déphasage spatial,  $e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}}$  ( $\vec{R}$  = nœud du réseau de Bravais), se factorise en trois exponentielles se sommant indépendamment les unes des autres ; apparaît alors une somme du genre  $S_N$  pour chacune des trois directions pertinentes.



# Chapitre 4

## Dynamique des systèmes linéaires

*Le but de ce chapitre est de rappeler comment l'étude des petits mouvements près de l'équilibre conduit à des équations dynamiques linéaires. Le rôle de l'amortissement, inévitable dans les systèmes physiques, est discuté (oubli des conditions initiales, régimes transitoire et forcé), avant d'introduire la notion très importante de susceptibilité.*

### 4.1 Définition d'un système linéaire. Prototype : l'oscillateur harmonique

D'une façon générale, on désigne par *système linéaire* un système régi par une (des) équation(s) linéaire(s), c'est-à-dire par des relations où la grandeur physique d'intérêt figure au premier degré au plus. Dans les cas les plus courants, ces équations sont différentielles (ou aux dérivées partielles), aux différences finies, ou purement algébriques. Donnons quelques exemples.

Soit une particule de masse  $m$  se déplaçant sur l'axe  $Ox$ , soumise à une force  $F(x)$ . En une dimension d'espace, on peut toujours poser que la force  $F$  est la dérivée d'une certaine fonction, plus précisément on introduit l'énergie potentielle  $V(x)$  telle que  $F(x) = -V'(x)$ . Alors, l'équation fondamentale de la Dynamique s'écrit :

$$m\ddot{x} = -V'(x) ; \quad (4.1)$$

l'inconnue est la fonction  $x(t)$  et figure notamment dans la fonction  $V$  sous une forme *a priori* quelconque. L'équation n'est linéaire que si  $V'$  est au plus un monôme en  $x$ , ce qui contient les deux seuls cas (en dehors du cas trivial  $V \equiv 0$ , particule libre) :

1.  $V(x) \propto x$  (force constante, particule dans le champ de gravitation terrestre,  $|\Delta z| \ll R_T$ , particule chargée dans un champ électrique statique)
2.  $V(x) \propto x^2$  (force proportionnelle à l'élongation, mesurée à partir d'un point choisi comme origine de l'axe  $Ox$ ). Dans ce cas, le mouvement ne peut être confiné que si la constante de proportionnalité est *négative* (force de *rappel*), et il s'agit généralement d'un oscillateur harmonique. Physiquement, il est clair qu'écrire  $F = -kx$  est toujours une approximation ; on parle alors de ressort parfait et de petits écarts à la position d'équilibre. En posant  $k = m\omega_0^2$ , l'équation (4.1) prend la forme canonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (4.2)$$

$\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur.

On trouve la même équation dans un contexte tout à fait différent, lors de l'étude d'un circuit électrique constitué d'une inductance pure  $L$  et d'une capacité  $C$  montées en série. La tension aux bornes de la bobine est  $L \frac{dI}{dt}$ , où  $I$  est l'intensité dans le circuit, la ddp aux bornes du condensateur est  $\frac{Q}{C}$ . La loi d'Ohm donne :

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \iff L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = 0 . \quad (4.3)$$

Avec  $I = \frac{dQ}{dt}$ , on déduit l'équation pour l'intensité :

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C} I = 0 \iff \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 . \quad (4.4)$$

C'est la même équation que (4.2), avec l'identification :

$$L \longleftrightarrow m , \quad k \equiv m\omega_0^2 \longleftrightarrow \frac{1}{C} , \quad \frac{1}{LC} \longleftrightarrow \omega_0^2 . \quad (4.5)$$

$L$  joue pour l'intensité le même rôle que la masse pour la coordonnée et explique pourquoi, pour éviter les changements brutaux d'intensité, il faut introduire des *selfs* dans les circuits (en quelque sorte,  $L$  a un rôle *inertiel*).

D'une façon générale, le terme  $V'(x)$  au second membre de (4.1) introduit des termes non-linéaires en  $x$ . Un exemple d'oscillateur matériel non-linéaire est le pendule simple (masse ponctuelle attachée au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $l$ , et soumise à la gravité terrestre). La variable est ici un angle, noté  $\theta$ , fixant la position de la bille par rapport à la verticale. L'énergie potentielle est  $V(\theta) = -mg \cos \theta$  et l'équation dynamique est :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta . \quad (4.6)$$

L'inconnue est  $\theta(t)$  et apparaît dans le sinus au second membre : à ce stade, l'équation est certainement non-linéaire, et sera l'objet d'une étude approfondie dans le ch.5. Si on fait l'hypothèse de petites oscillations,  $|\theta| \ll \pi$ , alors on peut écrire  $\sin \theta \simeq \theta$  et l'équation (5.6) se transforme en :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta \iff \ddot{\theta} + \frac{g}{l} = 0 . \quad (4.7)$$

Dimensionnellement, le rapport  $\frac{g}{l}$  est l'inverse du carré d'un temps. En posant  $\frac{g}{l} = \omega_0^2$ , on fait apparaître la pulsation propre  $\omega_0$  du pendule ; la période  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  des (petites) oscillations est donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \quad (4.8)$$

Ceci n'est qu'un cas particulier d'une procédure tout à fait générale. Si  $V(x)$  est l'énergie potentielle, et s'il existe une (ou plusieurs) position(s) d'équilibre stable  $x_{\text{eq}}$ , c'est que l'énergie potentielle présente un (ou plusieurs) minimum(s)<sup>1</sup>. Au voisinage d'un tel minimum, on peut écrire le développement de Taylor :

$$V(x) = V(x_{\text{eq}}) + 0 + \frac{1}{2}V''(x_{\text{eq}})(x - x_{\text{eq}})^2 + \mathcal{O}((x - x_{\text{eq}})^3) . \quad (4.9)$$

Il n'y a pas de terme en  $(x - x_{\text{eq}})$  puisqu'au point d'équilibre (stable ou instable, d'ailleurs) la force est nulle ( $0 = F(x_{\text{eq}}) = -V'(x_{\text{eq}})$ ). L'approximation dite *harmonique* consiste à oublier tous les termes au-delà de  $(x - x_{\text{eq}})^2$ , faisant la substitution  $V(x) \rightarrow V_{\text{harm}}$  dans l'équation fondamentale :

$$V(x) \rightarrow V_{\text{harm}} \stackrel{\text{d'ef}}{=} V(x_{\text{eq}}) + \frac{1}{2}V''(x_{\text{eq}})(x - x_{\text{eq}})^2 . \quad (4.10)$$

Dès lors, l'écart à l'équilibre  $X = (x - x_{\text{eq}})$  satisfait ( $\ddot{x} = \ddot{X}$ ) :

$$m\ddot{X} = -\frac{1}{2}V''(x_{\text{eq}})X . \quad (4.11)$$

<sup>1</sup>Un maximum correspond à un point d'équilibre instable, d'où la particule part sous l'effet de la moindre brise.



En posant<sup>2</sup>  $V''(x_{\text{eq}}) = m\omega_0^2$ , l'équation approchée prend une forme identique à (4.2) :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 . \quad (4.12)$$

Ainsi, dès que l'on fait l'hypothèse de petites oscillations autour d'un point d'équilibre stable, tout système peut être traité sur la base de l'équation (4.2), à des recalages près. Bien évidemment, cette approximation fait perdre une grande partie des mouvements possibles : il est sûr qu'en le lançant assez fort, on peut faire tourner un pendule simple autour de son point d'attache ! Ce type de mouvement est, par construction, exclu de l'analyse effectuée dans l'approximation harmonique.

Comme on l'a vu, la variable dynamique (notée  $x$ ,  $\theta$ ,  $I$ , dans les exemples précédents) peut être en effet de nature très variée. Il peut encore s'agir de la distance des deux noyaux d'une molécule diatomique stable,  $x_{\text{eq}}$  représentant alors la longueur de la liaison chimique. Le cadre harmonique permet d'étudier les petites vibrations de la molécule et fournit un cadre général d'explication du spectre infrarouge des molécules hétéronucléaires<sup>3</sup>.

La notion de système linéaire survient également lorsque l'on étudie la relation existant entre les signaux d'entrée et de sortie d'un appareil, ou entre deux grandeurs physiques agissant l'une sur l'autre au sein d'un même système. Il peut s'agir par exemple de la relation entre l'intensité  $I$  et la tension  $V$  aux bornes d'un circuit électrique donné, que l'on peut toujours écrire  $V = f(I)$  (caractéristique courant - tension) – le cas le plus simple,  $V = ZI$  (loi d'Ohm), se passant de commentaires. La fonction  $I \rightarrow f(I)$  est en général non-linéaire, et peut même être une fonction multivaluée<sup>4</sup>.

Quand la caractéristique n'est pas linéaire, on peut néanmoins facilement décrire le fonctionnement du circuit au voisinage d'un point choisi pour une raison ou une autre, en considérant exclusivement des petites variations de l'intensité (par exemple) autour d'une valeur donnée  $I_0$  : ce que l'on décrit alors est le comportement du circuit (ou de l'appareil) au voisinage d'un point dit de fonctionnement statique. En pareil cas, la relation compliquée  $V = f(I)$  peut être linéarisée en effectuant à nouveau un développement de Taylor :

$$V \simeq f(I_0) + (I - I_0)f'(I_0) \iff V - V_0 = f'(I_0)(I - I_0) . \quad (4.13)$$

Alors, c'est la dérivée de la caractéristique, évaluée au point de fonctionnement statique, qui fait office d'impédance effective. Par la suite, la relation linéarisée (4.13) peut alors être injectée dans une équation dynamique relative à la question que l'on se pose.

Les exemples cités permettent d'être convaincu que, se restreignant à des équations du second ordre, le prototype du système dynamique linéaire est l'oscillateur harmonique. Revenant à des notations désincarnées physiquement, l'équation fondamentale est une équation différentielle du second ordre pour une certaine fonction  $y(x)$  :

$$y'' + \alpha^2 y = 0 ; \quad (4.14)$$

ne considérant que des oscillations près d'un équilibre stable,  $\alpha$  désigne une quantité réelle, que l'on peut toujours choisir positive (seul le carré figure dans l'équation (4.14)). La solution *générale* de (4.14) peut être écrite de plusieurs façons :

$$y(x) = C_+ e^{i\alpha x} + C_- e^{-i\alpha x} , \quad y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x , \quad y(x) = C \cos(\alpha x + \phi) . \quad (4.15)$$

Ceci ne tombe pas du ciel : en se souvenant que la fonction exponentielle est la seule fonction proportionnelle à toutes ses dérivées, on réalise que l'équation (qui dit : dérivée seconde proportionnelle à la fonction) n'a que des solutions de type exponentiel. En cherchant donc  $y(x)$  sous la forme  $e^{\lambda x}$ , on trouve immédiatement que  $\lambda$  satisfait l'équation du second degré<sup>5</sup> :

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0 , \quad (4.16)$$

dont les solutions sont  $\pm i\alpha$ , fournissant les deux exponentielles  $e^{\pm i\alpha x}$ . Comme l'équation est linéaire, toute combinaison linéaire à coefficients constants de  $e^{+i\alpha x}$  et  $e^{-i\alpha x}$  est encore solution, d'où la première écriture dans (4.15). Les deux suivantes résultent de manipulations algébriques élémentaires.

<sup>2</sup>Il s'agit bien d'un minimum, où la concavité est vers le haut, d'où  $V''(x_{\text{eq}}) > 0$ .

<sup>3</sup>Pour des raisons de symétrie, une molécule homonucléaire  $X_2$  est inactive dans l'infrarouge.

<sup>4</sup>La caractéristique  $I(V)$  de la diode Esaki est de la forme  $I(V) = aV^3 - b(V - V_p)^2 + cV^3$  ( $a$ ,  $V_p$  et  $c$  tous positifs). Il en résulte que la caractéristique inverse  $V(I)$  est bivaluée sur un certain segment  $[I_1, I_2]$  de l'intensité.

<sup>5</sup>Si l'équation est du  $n^{\text{ème}}$  ordre, l'équation pour  $\lambda$  est du  $n^{\text{ème}}$  degré.

Pour chaque écriture dans (4.15), deux constantes apparaissent, liées au fait que l'équation différentielle est du second ordre (il faut donc, d'une certaine façon, intégrer *deux* fois). Le problème de Physique examiné n'est *bien posé* que si l'on se donne, en plus de l'équation, deux informations distinctes permettant de déterminer ces deux constantes d'intégration : s'agissant de la dynamique d'un point matériel, on précise usuellement la position et la vitesse au départ du mouvement<sup>6</sup>. Plus formellement, revenant à (4.15), on peut donner deux informations distinctes, par exemple les valeurs  $y(x_1)$  et  $y(x_2)$ , ou  $y(x_1)$  et  $y'(x_2)$ . Alors, dans le premier cas, on peut écrire le système :

$$A \cos \alpha x_1 + B \sin \alpha x_1 = y(x_1) \quad , \quad A \cos \alpha x_2 + B \sin \alpha x_2 = y(x_2) \quad , \quad (4.17)$$

qui admet une solution unique pourvu que<sup>7</sup>  $\sin \alpha(x_2 - x_1) \neq 0$ , soit  $\alpha(x_2 - x_1) \neq \text{entier} \times \pi$ .

Pour l'oscillateur matériel (ou pour le pendule dans l'approximation des petites amplitudes), avec des notations physiques on écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \quad (4.18)$$

Le pendant de (4.14) est :

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \iff \quad \lambda = \lambda_{\pm} \equiv \pm i\omega_0 \quad ; \quad (4.19)$$

la solution générale s'écrit :

$$x(t) = C_+ e^{i\omega_0 t} + C_- e^{-i\omega_0 t} \quad , \quad x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad , \quad x(t) = C \cos(\omega_0 t + \phi) \quad , \quad . \quad (4.20)$$

Le plus souvent, les deux informations nécessaires sont choisies comme étant la position initiale  $x_0$  et la vitesse initiale  $v_0$ . Alors, la solution est :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad . \quad (4.21)$$

À nouveau (voir la note 7), se donner la position  $x_0$  au départ et une *autre* position  $x_1 \neq x_0$  à  $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$  conduirait à un système impossible : en deux instants séparés d'une période, l'équation impose que la position reprenne la *même* valeur. Si la vitesse initiale est nulle, la solution est simplement :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad . \quad (4.22)$$

Donnons une autre façon (plus physique) d'intégrer l'équation (4.18), mettant en évidence la notion de *constante du mouvement* (intégrale première dans le jargon mathématique). À cet effet, multiplions membre à membre l'équation par  $\dot{x}$  :

$$\dot{x} \ddot{x} + \omega_0^2 x \dot{x} = 0 \quad ; \quad (4.23)$$

le premier terme est la dérivée  $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{x}^2)$ , le second est la dérivée de  $\frac{1}{2}x^2$ . (4.23) est donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right) = 0 \quad (4.24)$$

et s'intègre en :

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 = \text{constante} \quad . \quad \iff \quad \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = \text{constante} \quad . \quad (4.25)$$

La deuxième constante s'identifie immédiatement comme l'énergie mécanique totale  $E$ , somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, et (4.25) traduit la conservation de l'énergie mécanique d'un système isolé. Quel que soit l'instant  $t$ , la combinaison au premier membre a la même valeur, fixée une fois pour toutes par les conditions initiales :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(0) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2(0) \equiv E \quad . \quad (4.26)$$

<sup>6</sup>On pourrait aussi se donner deux positions à deux instants différents, et en déduire la vitesse initiale pour que la trajectoire passe par ces deux points choisis à l'avance.

<sup>7</sup>Étant donné que la solution est périodique, de période  $\frac{2\pi}{\alpha}$ , se donner deux valeurs de la fonction séparées d'une période ne constitue pas deux informations distinctes ! Quand elles sont séparées d'une demi-période, cela ne convient pas non plus en raison de l'invariance de l'équation (4.14) dans le changement  $x \rightarrow -x$  ("renversement du temps").

L'énergie est ce que l'on appelle une *constante du mouvement* ; avec les conditions initiales utilisées ci-dessus pour écrire (4.22) ( $x(0) = x_0, v_0 = 0$ ), (6.9) se réduit à :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2(0) . \quad (4.27)$$

(6.9) permet de fait d'intégrer l'équation du mouvement. En effet, on a maintenant :

$$\dot{x}^2 + \omega_0^2x^2 = \frac{2E}{m} \iff \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2x^2} . \quad (4.28)$$

Cette équation s'intègre immédiatement (c'est une équation à variables séparées) : en supposant  $x_0 > 0$ , la vitesse est négative au début du mouvement et c'est le signe  $-$  qu'il faut choisir tant que  $t$  n'est pas trop grand<sup>8</sup> :

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2x^2} \iff dt = -\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2x^2}} \iff t = -\frac{1}{\omega_0} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}} + C . \quad (4.29)$$

L'intégrale est élémentaire ; on pose  $x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin \phi$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ), d'où :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - x^2}} = \int \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}} = \int d\phi = \phi = \arcsin \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2E}} x . \quad (4.30)$$

D'où  $x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin(C - \omega_0 t)$ . Il suffit maintenant de caler la constante d'intégration avec les conditions initiales ; choissant  $x(0) = x_0, v(0) = 0$  (l'oscillateur est lâché sans vitesse initiale), alors  $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2$ ,  $0 = \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos C$ , et finalement  $x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \cos \omega_0 t \equiv x_0 \cos \omega_0 t$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_0}$ ). Le calcul au-delà d'une demi-période se conduit de la même façon en raisonnant avec les bons signes, et redonne finalement la même expression pour  $x(t)$ .

Il est intéressant d'examiner la variation des différentes contributions à l'énergie totale. Selon (4.21), on a en général :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2(x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t)^2 \quad , \quad E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m(-\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t)^2 . \quad (4.31)$$

Ces deux fonctions oscillent – mais leur somme est évidemment une constante (c'est l'énergie mécanique totale). Pour se faire une idée de ce qu'elles valent, et de leur importance respective, on peut calculer leur moyenne sur une période  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  du mouvement :

$$\bar{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_{\text{pot}}(t) dt , \quad \bar{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{T} \int_0^T E_{\text{cin}}(t) dt . \quad (4.32)$$

Le report des deux expressions (4.31) fait apparaître d'abord les moyennes sur une période de  $\sin^2 \omega_0 t$  et  $\cos^2 \omega_0 t$ , qui valent chacune  $\frac{1}{2}$  ; quant au double produit  $2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$ , sa moyenne est nulle (c'est un sinus qui oscille à  $2\omega_0$ ). En définitive, on trouve que les deux moyennes sont égales :

$$\bar{E}_{\text{pot}} = \bar{E}_{\text{cin}} = \frac{1}{4}m\omega_0^2 \left[ x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \right] . \quad (4.33)$$

En raison de ce fait, on dit qu'il y a *équipartition* de l'énergie.

<sup>8</sup>Plus précisément tant que  $\omega_0 t \leq \pi$  : au bout d'une demi-période, la vitesse change de signe.

## 4.2 Introduction de l'amortissement

L'oscillateur étudié précédemment est une vue de l'esprit pour le physicien : le mouvement obtenu est périodique et, en tant que tel, ne s'arrête jamais. En pratique, il y a toujours de l'amortissement (le pendule frotte dans l'air, le vide parfait dans une cloche n'existe pas), qui vient peu à peu faire perdre à l'oscillateur son énergie mécanique initiale (dissipation d'énergie). Le résultat est que, si l'amortissement est faible, l'amplitude des oscillations décroît peu à peu<sup>9</sup> ; si au contraire l'amortissement est violent, il n'y a pas d'oscillations du tout : l'oscillateur revient (lentement) à sa position d'équilibre, sans jamais la dépasser (pendule lâché dans un bain d'huile). L'existence d'un amortissement est parfois un inconvénient (dissipation, donc perte d'énergie mécanique récupérable), mais est une heureuse et cruciale nécessité dans les systèmes de mesure (un galvanomètre doit être suffisamment amorti sinon l'aiguille est folle et on ne peut pas lire sur le cadran), et dans les systèmes de régulation (un *feed-back* trop rapide engendre des oscillations (à-coups), soit très exactement le contraire du but recherché).

Une façon simple de traduire la perte d'énergie – et qui reflète l'origine physique du phénomène d'amortissement – est d'introduire une force de frottement.

### 4.2.1 Frottement fluide

La force de frottement la plus simple (que l'on peut justifier aux faibles vitesses pour un objet se déplaçant dans un fluide visqueux) est proportionnelle à la vitesse (frottement<sup>10</sup> *fluide*, pour cette raison) :

$$F_{\text{frottement}} = -\alpha v . \quad (4.34)$$

Ceci étant admis, l'équation fondamentale est (ressort de constante de raideur  $k$ ) :

$$m\ddot{x} = -\alpha v - kx \iff \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (4.35)$$

où  $\tau = \frac{m}{\alpha}$  est le temps déjà introduit au chapitre précédent. Une force de frottement fluide conserve un aspect essentiel des choses : l'équation différentielle reste *linéaire*, et sa solution générale se construit comme précédemment, avec seulement quelques petites complications algébriques. La limite du frottement nul s'obtient formellement en prenant la limite  $\tau \rightarrow \infty$ .

Avant de résoudre cette équation, revenons au circuit  $LC$  série, décrit par :

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 . \quad (4.36)$$

Il s'agit à nouveau d'une équation idéale, au sens où il y a toujours une résistance  $R$  quelque part, ne serait-ce que dans les fils de connexion. Une équation plus réaliste est donc :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0 , \quad (4.37)$$

donnant finalement pour le circuit  $RLC$  :

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 . \quad (4.38)$$

<sup>9</sup>Autres exemples : l'explication classique de l'instabilité électrodynamique du modèle planétaire de l'atome, lente décroissance de l'orbite de certains satellites pâteux de Jupiter, si proches que l'effet de marée est important (auquel on attribue aussi certaines formes de volcanisme).

<sup>10</sup>Ce type de frottement se distingue nettement du frottement *solide* (qui donne d'ailleurs lieu à des phénomènes remarquables) : l'expérience quotidienne montre que pour mettre en mouvement un solide reposant sur un autre, il faut que la force dépasse un certain seuil : dans ces conditions, la force de frottement n'est sûrement pas proportionnelle à la vitesse, puisque'elle est non-nulle même si la vitesse est nulle !

L'équivalent du terme de frottement de (4.35) est le terme contenant la résistance  $R$ . On peut dès lors compléter l'identification (4.5) par :

$$R \longleftrightarrow \alpha , \quad \frac{L}{R} \equiv \tau . \quad (4.39)$$

Toujours pour les mêmes raisons ( $(e^x)^{(p)} \propto e^x$ ), on pose à nouveau que les solutions de (4.35) sont de la forme la forme  $e^{\lambda t}$  ;  $\lambda$  satisfait maintenant (comparer avec (4.19)) :

$$\lambda^2 + \frac{1}{\tau} \lambda + \omega_0^2 = 0 , \quad (4.40)$$

dont les solutions sont :

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} - \frac{1}{2\tau} . \quad (4.41)$$

Dans la limite  $\tau$  infini (temps d'amortissement infiniment long, *i. e.* pas de frottement du tout),  $\lambda_{\pm}$  tend vers  $\pm i\omega_0$  comme il se doit.

À nouveau, la solution générale est une combinaison linéaire quelconque des deux exponentielles correspondantes :

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left( C_+ e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} t} + C_- e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} t} \right) , \quad (4.42)$$

où, de toute évidence,  $C = C_+$ , de sorte que  $x(t) = 2e^{-\frac{t}{2\tau}} \Re C_+ e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} t}$ . Choisissons maintenant des conditions initiales ; pour faire simple, on suppose qu'au départ la bille est lâchée de l'abscisse  $x_0$  sans vitesse initiale, d'où :

$$C_+ + C_- = x_0 , \quad \left( -\frac{1}{2\tau} + i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \right) C_+ + \left( -\frac{1}{2\tau} - i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \right) C_- = 0 . \quad (4.43)$$

La résolution de ce système donne<sup>11</sup> :

$$C_+ = \frac{x_0}{2} \left( 1 - \frac{i}{\sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1}} \right) , \quad C_- = \frac{x_0}{2} \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1}} \right) , \quad (4.45)$$

Finalement :

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \left( \cos \tilde{\omega}_0 t + \frac{1}{\sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1}} \sin \tilde{\omega}_0 t \right) , \quad \tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} . \quad (4.46)$$

C'est une combinaison linéaire de deux termes oscillants déphasés de  $\frac{\pi}{2}$  dans les bonnes unités, et amortis par le facteur exponentiel s'éteignant sur l'échelle de temps<sup>12</sup>  $2\tau$ . Cette expression est valide  $\forall \omega_0\tau$ , mais si  $2\omega_0\tau < 1$ , on peut préférer la forme équivalente :

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tilde{\tau}}} \left( \cosh \frac{t}{2\tilde{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (2\omega_0\tau)^2}} \sinh \frac{t}{2\tilde{\tau}} \right) , \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (2\tau\omega_0)^2}} . \quad (4.47)$$

Deux cas-limites méritent d'être analysés :

<sup>11</sup> $C_+$  s'écrit aussi :

$$C_+ = \frac{x_0}{2} \frac{2\omega_0\tau}{\sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1}} e^{-i\phi} , \quad (4.44)$$

avec  $\sin \phi = \frac{1}{2\omega_0\tau}$ ,  $\phi > 0$  quand  $2\omega_0\tau > 1$ . Ces expressions se prolongent par continuité au cas  $2\omega_0\tau < 1$ .

<sup>12</sup>Comme on le verra ci-dessous,  $\tau$  n'est la bonne échelle de temps d'extinction que dans le régime sous-amorti.

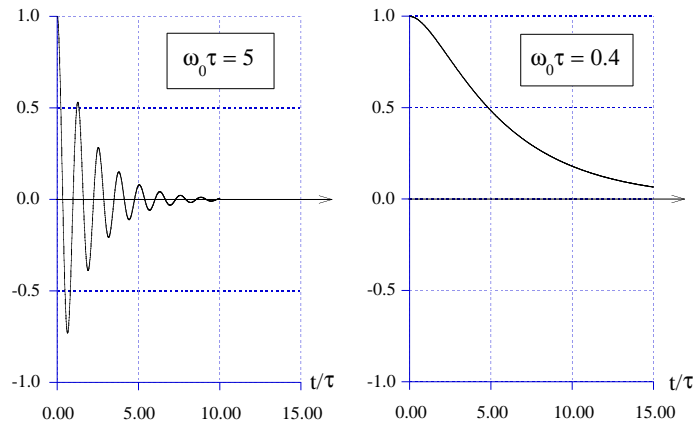


Figure 4.1: Variation de  $\frac{x(t)}{x_0}$  en fonction de  $\frac{t}{\tau}$  dans les régimes sous-amorti (à gauche) et sur-amorti (à droite). On note que le temps caractéristique d'amortissement est nettement plus grand pour le régime sur-amorti.

- Frottement faible,  $\omega_0\tau \gg 1$ . Alors :

$$x(t) \simeq x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ \cos\left(1 - \frac{1}{8\omega_0^2\tau^2}\right)\omega_0 t + \frac{1}{2\omega_0\tau} \sin\left(1 - \frac{1}{8\omega_0^2\tau^2}\right)\omega_0 t \right]. \quad (4.48)$$

La fréquence d'oscillation  $\tilde{\omega}_0$  est très voisine de  $\omega_0$  et il se produit un grand nombre d'oscillations puisque  $T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0} \ll \tau$  : c'est le régime dit sous-amorti. Dans la limite  $\tau$  infini, on retrouve bien l'oscillation perpétuelle de l'oscillateur idéal.

- Frottement fort,  $\omega_0\tau \ll 1$ . Alors :

$$x(t) \simeq x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ \cosh\left(1 - \frac{\omega_0^2\tau^2}{2}\right)\frac{t}{2\tau} + \left(1 - \frac{\omega_0^2\tau^2}{2}\right) \sinh\left(1 - \frac{\omega_0^2\tau^2}{2}\right)\frac{t}{2\tau} \right]. \quad (4.49)$$

Maintenant, il n'y a plus d'oscillation du tout (seules des fonctions hyperboliques apparaissent). L'absence d'oscillation traduit le fait que l'inertie joue un rôle mineur et que, la vitesse restant toujours faible (à cause de l'importance du frottement), la particule ne peut sur sa lancée dépasser son point d'équilibre avant de repartir dans l'autre sens. Plus le frottement est fort, plus le mouvement se ralentit : à la limite d'un frottement infini, l'oscillateur est figé et ne bouge plus du tout (on peut dire que le temps de retour à la position d'équilibre est infini).

Le peu d'importance de l'inertie se confirme en notant que si  $\omega_0\tau \ll 1$ , l'expression (4.49) donne :

$$x(t) \simeq x_0 e^{-\omega_0^2\tau t}, \quad (4.50)$$

un résultat que l'on peut obtenir directement de l'équation (4.35) en l'intégrant après y avoir fait brutalement  $m = 0$ . L'expression (4.50) donne un simple déclin exponentiel, caractérisé par le temps  $\frac{1}{\omega_0^2\tau} = \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}\tau \gg \tau$ .

La valeur  $2\omega_0\tau = 1$  sépare ces deux régimes. Dans ce cas, les deux racines  $\lambda_{\pm}$  sont égales et l'expression de  $x(t)$  se simplifie en<sup>13</sup> :

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \left( 1 + \frac{t}{2\tau} \right). \quad (4.51)$$

Une échelle de temps caractéristique du mouvement est visiblement  $\tau$  quand l'amortissement est très faible ; quand l'amortissement est fort, ce temps caractéristique est beaucoup plus grand que  $\tau$  : quand on plonge le pendule dans un bain d'huile, il met très longtemps avant de presque s'arrêter. La croissance de l'échelle de temps pertinente est déjà visible sur la figure 4.1.

<sup>13</sup>Ce résultat peut s'obtenir en faisant formellement tendre vers zéro la différence  $\lambda_+ - \lambda_-$ , tout le reste étant maintenu constant.

### 4.2.2 Notion de relaxation. Oubli des conditions initiales

Les résultats précédents montrent un fait majeur : dès qu'un amortissement est présent, aussi petit soit-il, l'évolution de la coordonnée (et de la vitesse) est *irréversible*. Techniquement, ceci vient de la présence dans l'équation fondamentale (4.35) d'une puissance *impaire* de la vitesse, qui brise l'invariance par renversement du temps. En tout cas, partant d'un état dynamique quelconque, position et vitesse évoluent vers un état final, en oscillant si le frottement est faible, de façon monotone dans le cas contraire : c'est ce que l'on appelle la *relaxation* du système, phase d'évolution entre un état initial (hors d'équilibre) vers un état final d'équilibre (ici, le repos complet).

Il est facile de mettre en évidence algébriquement, pour l'oscillateur harmonique, le lien direct entre frottement et irréversibilité. Les deux grandeurs  $\lambda_{\pm}$  sont les solutions de l'équation du second degré (4.40), qui est à coefficients réels, d'où  $\lambda_{-} = \lambda_{+}^{*}$ . Par ailleurs, la somme de ces racines est égale à  $-\tau < 0$  : chacune des racines a donc pour partie réelle  $-\frac{1}{2\tau} < 0$  ; le report dans les exponentielles  $e^{\lambda t}$  produit inexorablement des facteurs s'amortissant dans le temps. Le résultat est donc toujours :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \quad . \quad (4.52)$$

La phase de relaxation est notamment caractérisée par la nature des lois temporelles (ici, essentiellement des exponentielles), et globalement par un temps  $\tau_{\text{relax}}$  donnant le temps au bout duquel le système est presque à l'équilibre.

La définition précise de  $\tau_{\text{relax}}$  est un peu une affaire de goût, mais une bonne façon de faire est de regarder l'énergie mécanique de l'oscillateur,  $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ , qui serait constante s'il n'y avait pas de frottement. Comme celle-ci tend vers zéro, on peut dire que le système a presque complètement relaxé quand cette énergie a beaucoup décré en valeur relative.

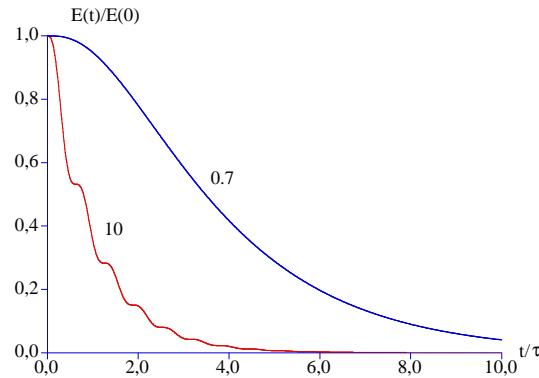


Figure 4.2: Variation de l'énergie de l'oscillateur amorti en fonction de  $\frac{t}{\tau}$  (voir (4.57)). Chaque courbe est indexée par la valeur de  $\omega_0\tau$ .

En multipliant membre à membre l'équation fondamentale  $m\ddot{x} + kx = -\alpha v$  par  $v = \dot{x}$ , on obtient :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = -\alpha v^2 \quad ; \quad (4.53)$$

le premier membre est la dérivée de  $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \equiv E$ , énergie mécanique totale, d'où :

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2 \quad , \quad (4.54)$$

égalité montrant sans surprise que la variation de l'énergie mécanique totale n'est autre travail de la force de frottement,  $dE = -\alpha v dx = -\alpha v^2 dt$ . En intégrant entre 0 et  $t$  :

$$E(t) - E(0) = -\alpha \int_0^t v^2(t') dt' \quad ; \quad (4.55)$$

l'intégrale est positive : on voit bien que l'énergie est monotone décroissante (ce qui saute d'ailleurs aux yeux sur (4.54)).

Selon (4.46), la vitesse est :

$$v(t) = -\frac{2\omega_0^2\tau x_0}{\sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1}} e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin \sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1} \frac{t}{2\tau} ; \quad (4.56)$$

après le report de  $v^2$  dans (4.55), un calcul un peu fastidieux donne :

$$E(t) = \frac{E(0)}{(2\omega_0\tau)^2 - 1} \left[ (2\omega_0\tau)^2 - \cos \sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1} \frac{t}{\tau} + \sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1} \sin \sqrt{(2\omega_0\tau)^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} . \quad (4.57)$$

La fonction  $E(t)$  est tracée sur la fig. 4.2 dans les deux cas de frottement (fort et faible).

L'énergie est une quantité positive, par conséquent l'aire sous la courbe  $\frac{E(t)}{E(0)}$  est une bonne mesure du temps pendant lequel la bille oscille avec une amplitude notable. C'est pourquoi on peut raisonnablement définir le temps de relaxation comme  $\tau_{\text{relax}} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{E(t)}{E(0)} dt$  ; partant de (4.57), le calcul donne :

$$\tau_{\text{relax}} = \tau \left( 1 + \frac{1}{2(\omega_0\tau)^2} \right) \quad (4.58)$$

Avec cette définition, le temps de relaxation est une fonction monotone, et est d'autant plus long que le frottement est fort. Dans les deux cas extrêmes, on a :

$$\tau_{\text{relax}} \simeq \begin{cases} \tau & \text{si } \omega_0\tau \gg 1 \quad (\text{très sous-amorti}) \\ \frac{1}{2\omega_0^2\tau} \gg \tau & \text{si } \omega_0\tau \ll 1 \quad (\text{très sur-amorti}) \end{cases} \quad (4.59)$$

$\tau_{\text{relax}}$  diverge dans la limite du frottement infiniment fort (la bille est figée). Dans tous les cas, l'énergie relaxe deux fois plus vite que  $x$  et  $\dot{x}$  puisque  $E$  est quadratique par rapport à ces grandeurs.

Dans le régime sous-amorti ( $2\omega_0\tau > 1$ ), le mouvement n'est plus strictement périodique, puisque l'amplitude des oscillations décroît dans le temps. Néanmoins, dans le cas très sous-amorti ( $2\omega_0\tau \gg 1$ ), d'une part le mouvement s'amortit très lentement, d'autre part l'intervalle de temps séparant deux *maxima* est très voisin de la période "nue"  $T$ . Cela a donc un sens de s'intéresser à la perte d'énergie par "période", qui est relativement faible, et peut se calculer comme suit. Par définition de la valeur moyenne d'une fonction, on a :

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dE}{dt'} dt' = \frac{1}{T} [E(t+T) - E(t)] . \quad (4.60)$$

Physiquement, comme  $T \ll \tau$ , cette moyenne constitue un lissage de la dérivée sur l'échelle de temps courte : c'est un cas très simple où cette opération élimine de fait les hautes fréquences. L'intégrale se calcule facilement à partir de (4.56) et on trouve :

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = -\frac{1}{2\tau} m\omega_0^2 x_0^2 , \quad (4.61)$$

d'où, selon la deuxième égalité (4.60) :

$$[E(t+T) - E(t)] = -T \frac{1}{2\tau} m\omega_0^2 x_0^2 \iff \frac{E(t) - E(t+T)}{E(0)} = \frac{2\pi}{\omega_0\tau} \equiv \frac{T}{\tau} \ll 1 . \quad (4.62)$$

La perte relative d'énergie par "période" est bien très petite, comme il se doit, et de surcroît ne dépend pas de l'instant  $t$ . Relativement à l'échelle de temps  $\tau$ , la quantité  $\frac{E(t+T) - E(t)}{T}$  peut être considérée comme une *dérivée discrète* ; d'après (4.62), elle est constante, avec l'échelle de temps  $\tau$ . Dans ce régime très sous-amorti, on peut donc écrire schématiquement :

$$E(t) \simeq e^{-\frac{t}{\tau}} E(0) . \quad (4.63)$$

Il est usuel de définir le *facteur de qualité*,  $Q$ , comme<sup>14</sup> :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie initiale}}{\text{énergie dissipée par période}} . \quad (4.64)$$

<sup>14</sup>La définition de  $Q$  varie d'un auteur à l'autre, notamment par des variations autour du facteur  $2\pi$ .



Dans le régime très sous-amorti ( $\omega_0\tau \gg 1$ ), on a donc :

$$Q \simeq \omega_0\tau = 2\pi\frac{\tau}{T} \gg 1 ; \quad (4.65)$$

comme dans ce régime on a aussi  $\tau_{\text{relax}} \simeq \tau$ , on voit que :

$$Q \simeq 2\pi \times \text{nombre d'oscillations pendant le temps de relaxation} . \quad (4.66)$$

Le facteur de qualité dépend énormément de l'oscillateur physique considéré. Pour un circuit *RLC*, obtenir  $Q \sim 100$  avec des composants ordinaires exige déjà beaucoup de soin ; pour un *tuner* FM dans la bande usuelle (88↔108 MHz), une bonne sélectivité<sup>15</sup> exige  $Q \gtrsim 3000$ . Enfin, en considérant l'atome comme un oscillateur ordinaire, une durée de vie de  $10^{-10}$  s associée à une transition dans l'optique donne  $Q \sim 6 \times 10^5$ .

Une autre chose est remarquable, même si elle paraît ici triviale : l'état final ne dépend pas de l'état de départ : quelles que soient la vitesse et la position au départ, l'état final est toujours le même. Ceci est sans doute le cas le plus simple d'un phénomène majeur : l'oubli des conditions initiales, un fait essentiel pour que la notion de *régime forcé* ait vraiment un sens (voir section 4.3).

### 4.3 Susceptibilité $\chi$

Très souvent, l'oscillateur n'est pas livré à lui-même après avoir été écarté de l'équilibre, mais est soumis à une excitation extérieure (source) à partir d'un certain instant que l'on peut toujours prendre comme origine des temps. Alors, l'équation du mouvement à  $t > 0$  devient inhomogène, la force extérieure  $f(t)$  figurant au second membre pour la clarté :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = f(t) \quad (t > 0) \quad \iff \quad \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2x = \sigma(t) \quad (t > 0, \sigma = \frac{f}{m}) . \quad (4.67)$$

La solution générale de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation inhomogène et d'une solution particulière de l'équation complète :

$$x_{\text{gén}}(t) = x_{\text{hom gén}}(t) + x_{\text{part}}(t) . \quad (4.68)$$

$x_{\text{hom gén}}(t)$  est connue, c'est une combinaison linéaire arbitraire des  $e^{\lambda_{\pm}t}$  :

$$x_{\text{hom gén}}(t) = a_+e^{\lambda_+t} + a_-e^{\lambda_-t} . \quad (4.69)$$

Pour trouver une solution particulière, des méthodes formelles existent, permettant de traiter abstraitemment le cas général d'une source quelconque. Dans la suite, on se borne au cas où  $\sigma$  est une perturbation périodique de pulsation  $\omega$ , en considérant d'abord le cas d'une source ne contenant qu'une fréquence fondamentale  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ , puis celui d'une source contenant toutes les harmoniques  $n\nu$ .

#### Exemple 1 : source sinusoïdale (harmonique)

On choisit ici plus précisément<sup>16</sup> :

$$\sigma(t) = A \cos \omega t \quad (t > 0, A \in \mathbb{R}) . \quad (4.70)$$

Il n'est alors pas difficile de trouver une solution particulière. Clairement, en l'absence du terme de frottement, une solution du genre  $B \cos \omega t$  convient puisque les dérivées paires redonnent un cosinus. D'un autre côté, toute

<sup>15</sup>La sélectivité demande une largeur en fréquence  $\delta\nu \lesssim 0.2$  MHz, soit  $\tau \sim \frac{1}{\delta\nu} \gtrsim 4 \times 10^{-6}$  s, soit  $Q \gtrsim 2\pi \times 100 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-6} \simeq 3000$ .

<sup>16</sup>On peut toujours supposer  $\omega > 0$ . Par ailleurs,  $A \in \mathbb{R}$  est homogène à  $LT^{-2}$ .

dérivée impaire donne un terme en sinus. Au total, on devine qu'une combinaison linéaire à coefficients non égaux des exponentielles  $e^{\pm i\omega t}$  doit convenir. On pose donc :

$$x_{\text{part}}(t) = c_+ e^{+i\omega t} + c_- e^{-i\omega t} , \quad (4.71)$$

avec bien sûr  $c_-^* = c_+$ , de sorte que :

$$x_{\text{part}}(t) = 2\Re(c_+ e^{+i\omega t}) . \quad (4.72)$$

Le report dans (4.67) donne :

$$-\omega^2(c_+ e^{+i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}) + \frac{1}{\tau}(i\omega c_+ e^{+i\omega t} - i\omega c_- e^{-i\omega t}) + \omega_0^2(c_+ e^{+i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}) = \frac{A}{2}(e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t}) . \quad (4.73)$$

L'identification des exponentielles donne :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)c_+ + i\frac{\omega}{\tau}c_+ = \frac{A}{2} , \quad (\omega_0^2 - \omega^2)c_- - i\frac{\omega}{\tau}c_- = \frac{A}{2} , \quad (4.74)$$

soit :

$$c_+ = \frac{A}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} , \quad c_- = \frac{A}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}} . \quad (4.75)$$

La solution particulière qui en résulte est donc :

$$x_{\text{part}}(t) = A \Re\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} e^{+i\omega t}\right) . \quad (4.76)$$

C'est une fonction oscillante de pulsation  $\omega$ . Ainsi, à  $t > 0$  (c'est-à-dire après le début de l'application de la source), la solution générale de (4.67) est :

$$x(t) = a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- e^{\lambda_- t} + A \Re\left(\frac{i}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\frac{\omega}{\tau}} e^{+i\omega t}\right) . \quad (4.77)$$

Les constantes  $a_{\pm}$  sont toujours indéterminées, et on pourrait les obtenir en se référant à des conditions initiales prescrites par ailleurs. En fait, comme toujours pour une équation linéaire inhomogène, la solution générale (4.77) se compose de la somme de deux termes :

1. la solution particulière, la combinaison linéaire des  $e^{\pm i\omega t}$  qui, elle, oscille tant que la source est présente (c'est un régime *entretenu* ou *forcé*). Par construction, les conditions initiales en sont absentes
2. la solution générale de l'équation homogène associée, combinaison linéaire des  $e^{\lambda_{\pm} t}$ , qui s'amortit *exponentiellement* avec une échelle de temps caractéristique  $\tau_{\text{relax}}$ . C'est typiquement ce que l'on appelle un régime *transitoire*. Comme les conditions initiales sont forcément quelque part, elles ne peuvent figurer que dans ces termes transitoires

Il en résulte que pour  $t \gg \tau_{\text{relax}}$ , les termes transitoires sont exponentiellement petits, et que l'on a simplement :

$$x(t) \simeq x_{\text{part}}(t) = A \Re\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} e^{+i\omega t}\right) \equiv A \Re[\chi(\omega) e^{i\omega t}] \quad \forall t \gg \tau_{\text{relax}} , \quad (4.78)$$

où  $\chi$  est par définition la *susceptibilité* de l'oscillateur :

$$\chi(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} , \quad (4.79)$$

que l'on peut écrire comme<sup>17</sup> :

$$\chi(\omega) = |\chi(\omega)| e^{-i\phi} , \quad (4.80)$$

<sup>17</sup> $\chi$  est bien homogène à  $T^2$  comme il se doit.

avec<sup>18</sup> :

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}, \quad \phi(\omega) = \begin{cases} \text{Arctg} \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)} & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \pi - \text{Arctg} \frac{\omega}{\tau(\omega^2 - \omega_0^2)} & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}. \quad (4.81)$$

Bien que dans le contexte physique en cours, on puisse se borner à supposer  $\omega > 0$ , rien n'interdit de considérer la fonction  $\chi(\omega)$  comme définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Ceci admis, on voit que :

$$\chi(\omega)^* = \chi(-\omega). \quad (4.82)$$

Cette propriété résulte du fait que les coefficients  $c_{\pm}$  définis en (4.71) ne sont rien d'autre que les coefficients de Fourier de  $x_{\text{part}}$  (les deux seuls à être non-nuls). Comme on l'a vu précédemment, la réalité de  $x_{\text{part}}$  impose  $c_- = c_+^*$ . Par ailleurs, (4.75) dit que :

$$c_+ = \frac{A}{2}\chi(\omega), \quad c_- = \frac{A}{2}\chi(-\omega), \quad (4.83)$$

d'où la symétrie de conjugaison (4.82).

Selon (4.78), la solution forcée est :

$$x_{\text{part}}(t) = A \Re[\chi(\omega) e^{-i\phi} e^{i\omega t}] = A|\chi(\omega)| \cos[\omega t - \phi(\omega)]. \quad (4.84)$$

en définitive, après un régime transitoire de durée  $\sim \tau_{\text{relax}}$ , le mouvement de l'oscillateur est :

$$x(t) \simeq A|\chi(\omega)| \cos[\omega t - \phi(\omega)] \quad \forall t \gg \tau_{\text{relax}}; \quad (4.85)$$

par définition, il s'agit du régime forcé, ou entretenu, qui ne dépend pas des conditions initiales. Comme on l'a vu précédemment (voir notamment (4.58)), le temps d'extinction du régime transitoire, mesuré à l'aune de la période propre  $T$  de l'oscillateur non-amorti, est d'autant plus court que le frottement est faible ; c'est donc essentiellement dans le cas très sous-amorti que la notion de régime forcé est pertinente physiquement. On a alors plus précisément :

$$x(t) \simeq A|\chi(\omega)| \cos[\omega t - \phi(\omega)] \quad \forall t \gg \tau \quad (\omega_0 \tau \gg 1), \quad (4.86)$$

et :

$$v(t) \simeq -A\omega|\chi(\omega)| \sin[\omega t - \phi(\omega)] \quad \forall t \gg \tau \quad (\omega_0 \tau \gg 1), \quad (4.87)$$

La terminologie *régime forcé* parle d'elle-même : la fréquence d'oscillation de la bille est égale à celle de la source, qui impose l'oscillateur à suivre son mouvement ; l'amplitude de ce mouvement est décrite par la valeur de  $|\chi(\omega)|$ , mouvement en outre déphasé (décalé dans le temps) de  $\phi(\omega)$ .

## Exemple 2 : source périodique quelconque

Le traitement précédent se généralise au cas d'une source  $T$ -périodique,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , mais à part ceci quelconque, et fournit un autre exemple du découplage des fréquences rencontré au chapitre précédent. En effet, soit le développement de Fourier de la source :

$$\sigma(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_n e^{in\omega t}. \quad (4.88)$$

Tout comme avant, on se persuade qu'il existe forcément une solution particulière de même période, dont on peut *a priori* écrire le développement de Fourier :

$$x_{\text{part}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{in\omega t}. \quad (4.89)$$

Le report dans (4.67) donne :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \left[ -n^2 \omega^2 + \frac{in\omega}{\tau} + \omega_0^2 \right] e^{in\omega t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_n e^{in\omega t}, \quad (4.90)$$

<sup>18</sup>L'argument de  $\chi$  est continu en  $\omega_0$ .

et, par identification des  $e^{in\omega t}$  :

$$x_n = \frac{\sigma_n}{-n^2\omega^2 + \frac{in\omega}{\tau} + \omega_0^2} \equiv \chi(n\omega)\sigma_n ; \quad (4.91)$$

la dernière égalité vient de la définition (4.79) de la susceptibilité. Finalement, l'introduction d'une source contenant tous les harmoniques d'une même fréquence restituée, composante de Fourier à composante, la même relation que pour une simple source harmonique (en  $\cos\omega t$  ou  $\sin\omega t$ ).

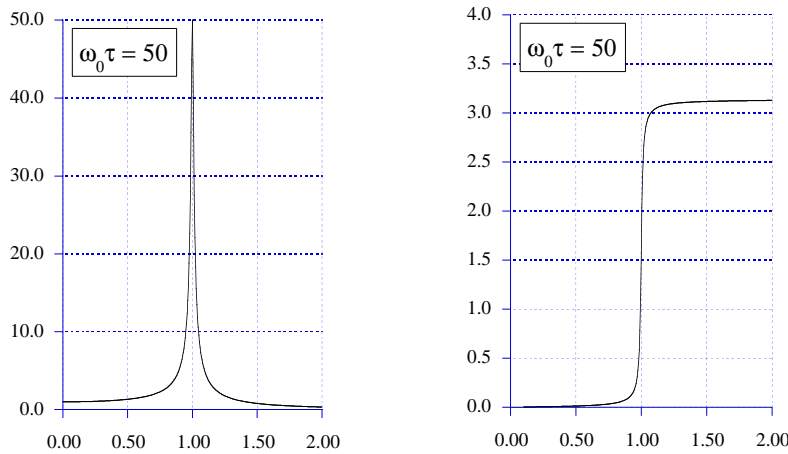


Figure 4.3: Cas sous-amorti : module et argument de  $\chi(\omega)$  en fonction de la pulsation de la source. L'abscisse est  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , l'ordonnée est  $\omega_0^2\chi$  (se souvenir qu'ici  $\chi(\omega)$  est homogène à  $T^2$  (voir note 17)).

Il est clair que dans tous les cas  $\chi$  est une fonction de la pulsation  $\omega$  de la source d'excitation, et décrit l'aptitude de l'oscillateur à réagir à une telle sollicitation (d'où la terminologie) ; on dit aussi que  $\chi$  décrit la *réponse* du système. C'est une fonction à valeurs complexes ; si son module est grand, le système est très réactif (l'amplitude de  $x_{\text{part}}(t)$  est grande), s'il est petit, l'oscillateur est peu sensible à l'excitation. L'argument  $-\phi$  de  $\chi$  introduit en outre un déphasage entre excitation et réponse du système.

Pour discuter qualitativement l'allure de la variation du module et de l'argument de  $\chi(\omega)$  en fonction de la pulsation de la source, on les réécrit comme suit ( $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ) :

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + \frac{x^2}{(\omega_0\tau)^2}}}, \quad (4.92)$$

et :

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \text{Arctg} \frac{1}{\omega_0\tau} \frac{x}{1-x^2} & \text{si } \omega < \omega_0 \iff x < 1 \\ \pi - \text{Arctg} \frac{1}{\omega_0\tau} \frac{x}{x^2-1} & \text{si } \omega > \omega_0 \iff x > 1 \end{cases}. \quad (4.93)$$

On note d'abord que :

$$|\chi(0)| = \frac{1}{\omega_0^2}, \quad |\chi(\omega_0)| = \frac{\tau}{\omega_0}, \quad |\chi(\infty)| = 0 ; \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(\omega_0\pm) = \frac{\pi}{2}, \quad \phi(\infty) = \pi. \quad (4.94)$$

Dans le cas très sous-amorti ( $\omega_0\tau \gg 1$ ), le terme  $x^2$  dans la racine carrée du dénominateur de  $|\chi(\omega)|$  est quasiment invisible, sauf lorsque l'écart  $|x - 1| \lesssim \frac{1}{\omega_0\tau}$  : alors  $\omega_0^2|\chi(\omega_0)| = \omega_0\tau \gg 1$ . Autrement dit, le graphe du module de  $\chi$  est une courbe très haute et très étroite : c'est typiquement une *résonance*. Sa largeur en

pulsation<sup>19</sup> est  $\delta\omega \sim \frac{1}{\tau} \ll \omega_0$ . Au voisinage de la résonance, ( $\omega \sim \omega_0$ ), on a à peu près :

$$|\chi(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2} \simeq \frac{1}{4\omega_0^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{4\tau^2}} \quad (\omega \simeq \omega_0) ; \quad (4.95)$$

l'allure de  $|\chi(\omega)|^2$  est donc essentiellement celle d'une *lorentzienne* de l'argeur  $\frac{1}{\tau}$ .

L'angle  $\phi$  varie très vite (aussi sur un intervalle en pulsation de l'ordre de  $\sim \frac{1}{\tau}$ ), allant de 0 à  $\pi$  en passant par  $\frac{\pi}{2}$  à la résonance : alors, excitation et réponse sont déphasées d'un quart de période. Enfin, dans la limite où il n'y a pas de frottement du tout, la courbe de  $\omega_0^2 |\chi(\omega_0)|$  est infiniment fine et le maximum est infini : drôle de courbe, drôle de fonction !

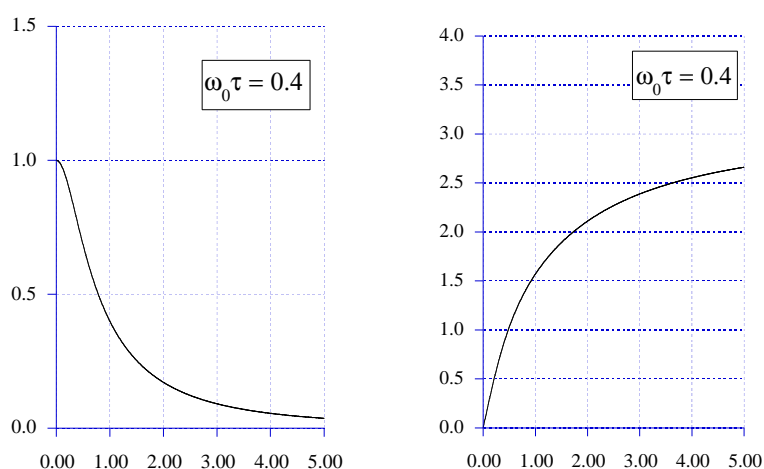


Figure 4.4: *idem* à fig 4.3 dans le cas suramorti. Noter les échelles très différentes pour l'ordonnée de  $\omega_0^2 |\chi(\omega)|$  entre cette figure et celle de la fig. 4.3

À l'opposé, dans le cas très sur-amorti ( $\omega_0\tau \ll 1$ ), c'est au contraire le terme en  $x^2$  qui est le plus important au dénominateur, sauf dans le voisinage immédiat de l'origine. Il en résulte que loin de l'origine ( $x \lesssim \omega_0\tau$ ), on a à peu près  $|\chi(\omega)| \simeq \frac{\tau}{\omega}$ , de sorte que le graphe est une fonction *lentement* décroissante (plutôt plate).

À nouveau les conditions initiales ne jouent aucun rôle dans le régime entretenu : seulement présentes dans le régime transitoire, elles s'effacent d'elles-mêmes au bout du temps<sup>20</sup>  $\tau_{\text{relax}}$ . Pour les systèmes linéaires amortis, le régime forcé ne dépend que de la source, en aucune façon de l'état précis du système à l'instant où elle commence à être appliquée. Cette propriété remarquable est une sorte de miracle : très souvent, on ne connaît pas les conditions initiales, et on est incapable de les préciser ! Cette ignorance n'interdit cependant pas d'en apprendre (beaucoup) sur le système par l'analyse du seul régime forcé.

## 4.4 Absorption d'énergie : rôle de $\Im \chi$

La source qui excite l'oscillateur est une sonde permettant d'obtenir des informations sur la dynamique de celui-ci. En pratique, l'objectif majeur est de *mesurer* la susceptibilité en fonction de la fréquence, puisque c'est

<sup>19</sup> Avec cette définition de la largeur, le facteur de qualité est simplement  $Q \simeq \frac{\omega_0}{\delta\omega}$  (voir (4.65)).

<sup>20</sup> Clairement, la nature *exponentielle* du déclin des transitoires joue un rôle crucial.

finalement la susceptibilité qui contient les caractéristiques de la dynamique propre de l'oscillateur, entièrement spécifiée ici par deux quantités : la pulsation propre  $\omega_0$  et le temps  $\tau$ . Une telle information s'obtient aisément en mesurant l'énergie absorbée par l'oscillateur, en vertu du résultat important qui va être établi maintenant : la puissance absorbée par l'oscillateur est proportionnelle à la partie imaginaire de la susceptibilité.

Le mécanisme est le suivant : la source  $\sigma$  est une force (par unité de masse,  $\sigma = \frac{f}{m}$ , voir (4.67)), qui fait varier l'énergie mécanique de l'oscillateur, lequel cède l'énergie ainsi emmagasinée au milieu extérieur origine du frottement. La variation d'énergie  $E$  de l'oscillateur est égale au travail  $W$  de la force extérieure<sup>21</sup>  $f(t) = m\sigma(t)$ . Entre deux instants  $t$  et  $t + dt$ , on a ainsi :

$$dE = dW = m\sigma(t)dx = m\sigma(t)\dot{x}dt . \quad (4.96)$$

Plaçons-nous dans le cas sous-amorti, le plus utile physiquement. Soit  $t_1$  un instant très postérieur à  $\tau_{\text{relax}} \simeq \tau$ , auquel cas le régime transitoire est éteint ; alors, pour une source  $\sigma(t) = A \cos \omega t$ , la variation d'énergie entre  $t_1$  et  $t$  est :

$$E(t) - E(t_1) \simeq m \int_{t_1}^t \sigma(t') A |\chi(\omega)| [-\omega \sin(\omega t' - \phi)] dt' = -m\omega A^2 |\chi(\omega)| \int_{t_1}^t \cos \omega t' \sin(\omega t' - \phi) dt' . \quad (4.97)$$

L'intégrale est :

$$\int_{t_1}^t (\cos \omega t' \sin \omega t' \cos \phi - \cos^2 \omega t' \sin \phi) dt' = \frac{1}{2} \int_{t_1}^t [\sin 2\omega t' \cos \phi - (1 + \cos 2\omega t') \sin \phi] dt' . \quad (4.98)$$

Supposons maintenant  $t - t_1 \gg \frac{2\pi}{\omega} \equiv T_{\text{source}}$ , période de la source ; alors tous les termes oscillants, de moyenne nulle sur un nombre strictement entier de périodes, donnent une contribution très petite, comparée au terme constant qui "diverge" comme la différence  $t - t_1$  :

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^t [\sin 2\omega t' \cos \phi - (1 + \cos 2\omega t') \sin \phi] dt' \simeq -\frac{1}{2}(t - t_1) \sin \phi . \quad (4.99)$$

Il en résulte :

$$E(t) - E(t_1) \simeq +\frac{1}{2}m\omega A^2(t - t_1)|\chi(\omega)| \sin \phi . \quad (4.100)$$

Ainsi, la puissance moyenne absorbée sur le long intervalle d'application de  $\sigma$ ,  $\bar{\mathcal{P}} = \frac{E(t) - E(t_1)}{t - t_1}$  est<sup>22, 23</sup> *indépendante* de la durée écoulée  $t - t_1$  :

$$\bar{\mathcal{P}} \simeq \frac{1}{2}m\omega A^2 |\chi(\omega)| \sin \phi \equiv -\frac{1}{2}m\omega A^2 \Im \chi(\omega) , \quad (4.101)$$

montrant la relation simple entre puissance absorbée et partie imaginaire de la susceptibilité<sup>24</sup>. On note que, selon (4.79) :

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{2\tau} m\omega^2 A^2 \frac{1}{[\omega_0^2 - \omega^2] + (\frac{\omega}{\tau})^2} > 0 ; \quad (4.102)$$

La puissance (moyenne)  $\bar{\mathcal{P}}$  est positive : il s'agit bien d'une puissance *absorbée* par l'oscillateur.

La mesure de la puissance absorbée est ainsi un moyen de déterminer  $\Im \chi$ , et c'est aussi une grandeur que l'on peut facilement mesurer expérimentalement. Ceci étant fait sur un grand intervalle de fréquence<sup>25</sup>, la partie réelle de  $\chi$  peut à son tour être obtenue grâce à des relations générales traduisant le principe de causalité (relations dites de Kramers - Kronig).

<sup>21</sup>Premier Principe pour un système purement mécanique !

<sup>22</sup>voir (4.80).

<sup>23</sup> $\chi$  est homogène à  $T^2$ ,  $A$  à  $LT^{-2}$ . Au total, le second membre de (4.101) est homogène à  $ML^2T^{-3}$ , qui est bien une puissance.

<sup>24</sup>Dans la littérature, il est fréquent de noter  $\chi''$  la partie imaginaire de  $\chi$ , d'où la formule  $\bar{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2}m\omega A^2 \chi''$ . Ne pas confondre ce symbole avec la *dérivée seconde* de  $\chi$  !

<sup>25</sup>Cette nécessité vient du fait que les relations de Kramers - Kronig sont de nature intégrale : par exemple, la partie réelle s'exprime comme une certaine intégrale contenant la partie imaginaire, intégrale qui va de  $-\infty$  à  $+\infty$  sur la variable  $\omega$ .

## 4.5 Oscillateurs couplés

L'oscillateur harmonique étant le prototype de l'oscillateur linéaire, et modélisant les petites oscillations près d'un point d'équilibre stable, il est naturel de se poser la question de la dynamique de plusieurs oscillateurs. Si les oscillateurs ne sont pas couplés entre eux, le problème est trivial : chacun d'entre eux peut être traité indépendamment des autres, et tout ce qui a été vu précédemment suffit à répondre à toutes les questions.

Le cas intéressant est celui où les oscillateurs sont couplés les uns aux autres (on dit qu'ils sont *en interaction*). Le système simple venant à l'esprit est celui de billes reliées les unes aux autres par l'intermédiaire de ressorts, avec des montages en série ou en parallèle (dans le premier cas, il s'agit d'une chaîne de boules et de ressorts).

### 4.5.1 Cas de deux oscillateurs

De façon assez évidente, le plus simple de ces problèmes est celui de deux masses identiques soumises chacune à un ressort (chaque masse a donc un mouvement harmonique), et reliées l'une à l'autre par un troisième ressort de constante de raideur différente (voir fig. 4.5).

Désignons par  $a$  la distance entre les deux masses quand elles sont à l'équilibre, et prenons l'origine au milieu des deux positions d'équilibre. La masse de droite, d'abscisse  $x_2$ , est soumise à une première force de la part de "son" ressort, égale à  $-K(x_2 - \frac{a}{2})$  ; en outre, si  $x_1$  est l'abscisse de la masse de gauche, celle-ci exerce sur sa partenaire une force égale à  $-k(x_2 - x_1 - a)$  : il s'agit toujours d'une force de rappel et, si  $x_2 - x_1 > a$ , cette force est dirigée vers la gauche. Au total, l'équation fondamentale de la dynamique pour la masse 2 est :

$$m\ddot{x}_2 = -K(x_2 - \frac{a}{2}) - k[(x_2 - \frac{a}{2}) - (x_1 - (-\frac{a}{2}))] . \quad (4.103)$$

L'équation pour la masse 1 se trouve de la même façon (il suffit en fait d'échanger  $x_1$  et  $x_2$  et d'inverser  $a$  en  $-a$ ) :

$$m\ddot{x}_1 = -K(x_1 + \frac{a}{2}) - k(x_1 - x_2 + a) . \quad (4.104)$$

Ce qui est utile, ce sont les écarts aux positions d'équilibre ; posant  $X_1 = x_1 + \frac{a}{2}$  et  $X_2 = x_2 - \frac{a}{2}$ , et introduisant les deux fréquences caractéristiques :

$$k = m\omega_0^2 \quad K = m\Omega_0^2 , \quad (4.105)$$

on obtient le système :

$$\begin{cases} \ddot{X}_1 = -(\Omega_0^2 + \omega_0^2)X_1 + \omega_0^2 X_2 \\ \ddot{X}_2 = -(\Omega_0^2 + \omega_0^2)X_2 + \omega_0^2 X_1 \end{cases} . \quad (4.106)$$

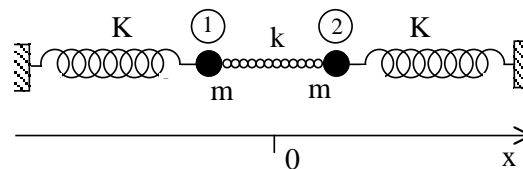


Figure 4.5: Deux masses et trois ressorts constituent deux oscillateurs couplés. Les ressorts de droite et de gauche sont forcément attachés quelque part ; leur longueur d'équilibre ne joue aucun rôle (la symétrie du dessin n'est due qu'à un souci d'esthétique (!) : seules importent les *positions* d'équilibre des deux masses.

Avant de résoudre ce système, remarquons qu'il peut aussi être déduit plus systématiquement en introduisant l'énergie potentielle du système des deux masses en interaction. Tous les oscillateurs étant harmoniques,

tous les termes sont du genre  $\frac{1}{2}kx^2$  ; très précisément, celle-ci s'écrit :

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}K(x_1 + \frac{a}{2})^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - \frac{a}{2})^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2 = \frac{1}{2}KX_1^2 + \frac{1}{2}KX_2^2 + \frac{1}{2}k(X_2 - X_1)^2 \equiv V(X_1, X_2) , \quad (4.107)$$

soit :

$$V(X_1, X_2) = \frac{1}{2}m(\Omega_0^2 + \omega_0^2)X_1^2 + \frac{1}{2}m(\Omega_0^2 + \omega_0^2)X_2^2 - m\omega_0^2X_1X_2 . \quad (4.108)$$

La force sur la masse  $m_n$  est  $-\frac{\partial V}{\partial X_n}$ , de sorte que le système ci-dessus peut aussi se déduire de :

$$m\ddot{X}_n = -\frac{\partial V}{\partial X_n} ; \quad (4.109)$$

il est facile de vérifier qu'il en est bien ainsi.

La difficulté technique du système (4.106) tient précisément au fait que les deux variables  $X_i$  sont couplées entre elles. Un peu de réflexion révèle toutefois l'existence de deux combinaisons remarquables  $\xi_\sigma$ ,  $\sigma = \pm$ , qui sont la somme et la différence des  $X_i$  :

$$\xi_+ = X_1 + X_2 , \quad \xi_- = X_1 - X_2 ; \quad (4.110)$$

en effet, en faisant simplement la somme et la différence membre à membre des équations du système (4.106), on voit que :

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_+ = -\Omega_0^2 \xi_+ \\ \ddot{\xi}_- = -(\Omega_0^2 + 2\omega_0^2) \xi_- \end{cases} . \quad (4.111)$$

On constate maintenant que les deux variables  $\xi_\sigma$  sont *découplées* : dans l'équation de chacune, on ne retrouve pas l'autre ! Cette simplification ne doit pas finalement surprendre : après tout,  $\frac{\xi_+}{2}$  est l'abscisse du centre de masse,  $\xi_-$  donne la coordonnée relative des deux masses ; il s'agit bien physiquement des variables naturelles du système.

Dès lors, l'intégration est immédiate (il s'agit à nouveau d'oscillateurs harmoniques), et donne :

$$\xi_+ = A_+ \cos \Omega_0 t + B_+ \sin \Omega_0 t , \quad \xi_- = A_- \cos \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2} t + B_- \sin \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2} t . \quad (4.112)$$

Le problème est maintenant formellement résolu, il n'y a plus qu'à revenir vers les variables  $x_1$  et  $x_2$ . Le point important est l'apparition de deux pulsations caractéristiques  $\omega_\pm$  :

$$\omega_+ = \Omega_0 , \quad \omega_- = \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2} . \quad (4.113)$$

Pour obtenir les écarts à l'équilibre des deux masses, il suffit maintenant de revenir aux variables  $X_i$  en utilisant :

$$X_1 = \frac{1}{2}(\xi_+ + \xi_-) , \quad X_2 = \frac{1}{2}(\xi_+ - \xi_-) \quad (4.114)$$

Les constantes  $A_\pm$  et  $B_\pm$  sont fixées par les conditions initiales. Pour faire simple, supposons qu'au départ, la masse de droite est écartée de  $\delta$ , l'autre étant maintenue en  $x = -\frac{a}{2}$ , et qu'on lâche tout (pas de vitesses initiales) ; on trouve alors sans peine :

$$A_+ = \delta , \quad A_- = -\delta , \quad B_+ = B_- = 0 . \quad (4.115)$$

Alors :

$$x_1(t) = -\frac{a}{2} + \frac{\delta}{2}(\cos \Omega_0 t - \cos \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2} t) , \quad x_2(t) = \frac{a}{2} + \frac{\delta}{2}(\cos \Omega_0 t + \cos \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2} t) . \quad (4.116)$$

Il est intéressant d'examiner deux cas particuliers :



- $\omega_0 \ll \Omega_0$ , correspondant au cas où le ressort central est très mou devant les deux autres, ce qui clairement correspond à une situation de couplage *faible* entre les deux masses. On peut d'abord transformer les deux expressions (4.116) en faisant apparaître un produit de lignes trigonométriques :

$$x_1(t) = -\frac{a}{2} - \delta \sin \frac{\Omega_0 - \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2}}{2} t \sin \frac{\Omega_0 + \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2}}{2} t, \quad (4.117)$$

$$x_2(t) = +\frac{a}{2} + \delta \cos \frac{\Omega_0 - \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2}}{2} t \cos \frac{\Omega_0 + \sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2}}{2} t; \quad (4.118)$$

ensuite on développe le radical  $\sqrt{\Omega_0^2 + 2\omega_0^2} \simeq \Omega_0(1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega_0^2})$ , ce qui donne :

$$x_1(t) \simeq -\frac{a}{2} + \delta \sin \frac{\omega_0^2}{2\Omega_0} t \sin \Omega_0 t, \quad x_2(t) = +\frac{a}{2} + \delta \cos \frac{\omega_0^2}{2\Omega_0} t \cos \Omega_0 t \quad (4.119)$$

Ces expressions montrent que chaque masse oscille à la fréquence  $\Omega_0$  (rapide) avec une lente modulation en amplitude à la fréquence  $\frac{\omega_0^2}{2\Omega_0} \ll \Omega_0$  (battements). Le couplage met peu à peu en mouvement la masse de gauche, initialement immobile. Dans la limite du couplage nul ( $\omega_0 = 0$ ),  $x_2(t) = +\frac{a}{2} + \delta \cos \Omega_0 t$ ,  $x_1(t) = -\frac{a}{2}$  : avec les conditions initiales choisies, seule la masse de droite oscille

- $\omega_0 \gg \Omega_0$ , correspondant au cas où le ressort central est très dur devant les deux autres (couplage *fort*). Alors, les deux expressions (4.116) donnent directement :

$$x_1(t) \simeq -\frac{a}{2} + \frac{\delta}{2}(\cos \Omega_0 t - \cos \sqrt{2}\omega_0 t), \quad x_2(t) \simeq \frac{a}{2} + \frac{\delta}{2}(\cos \Omega_0 t + \cos \sqrt{2}\omega_0 t). \quad (4.120)$$

Chaque masse oscille rapidement à  $\sqrt{2}\omega_0$  autour d'un point d'équilibre d'abscisse  $\pm\frac{a}{2} + \frac{\delta}{2} \cos \Omega_0 t$  qui dérive lentement à la petite fréquence  $\Omega_0$

La figure 4.6 montre le mouvement des deux masses quand l'écart initial de  $m_1$  est égal au 1/10<sup>ème</sup> de la distance d'équilibre  $a$ .

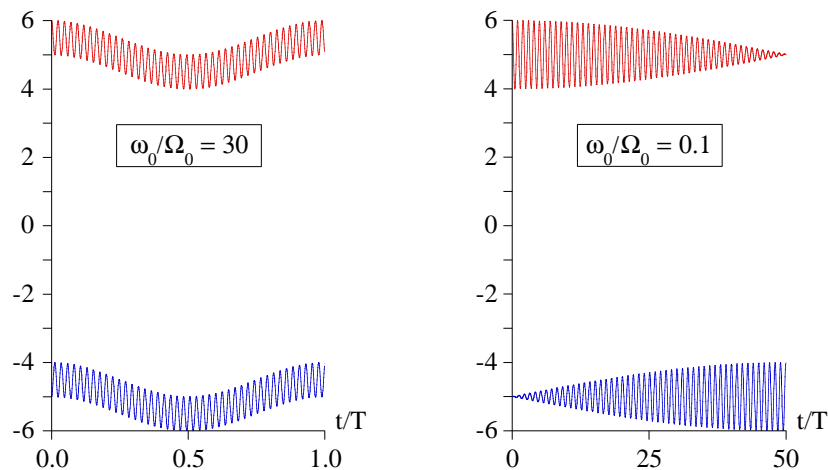


Figure 4.6: Abscisses des deux masses couplées (voir (4.116)). Les abscisses d'équilibre sont  $\pm 5$ , l'écart initial de la masse 2 est  $\delta = 1$ .  $T$  est la période  $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ . À gauche, ressort central dur (observer la lente oscillation du point d'équilibre) ; à droite, ressort central mou (observer les battements).

### 4.5.2 Notion de mode propre. Généralisation à $N$ oscillateurs

Les deux combinaisons  $\xi_{\pm}$  sont remarquables et portent le nom de *modes propres*, une notion qui se généralise à un système possédant un nombre quelconque de degrés de liberté, et dont on peut maintenant donner une définition plus formelle.

Revenons au système (4.106), qui est linéaire, et dont les solutions peuvent être cherchées sous la forme  $X_n = C_n e^{i\omega t}$ . Cette substitution donne, après simplification par  $e^{i\omega t}$  :

$$\begin{cases} -\omega^2 C_1 = -(\Omega_0^2 + \omega_0^2)C_1 + \omega_0^2 C_2 \\ -\omega^2 C_2 = -(\Omega_0^2 + \omega_0^2)C_2 + \omega_0^2 C_1 \end{cases} \iff \begin{cases} [\omega^2 - (\Omega_0^2 + \omega_0^2)]C_1 + \omega_0^2 C_2 = 0 \\ \omega_0^2 C_1 + [\omega^2 - (\Omega_0^2 + \omega_0^2)]C_2 = 0 \end{cases} . \quad (4.121)$$

Ce dernier système est linéaire et homogène, et n'a de solution non triviale que si le déterminant des inconnues est nul, soit :

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - (\Omega_0^2 + \omega_0^2) & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - (\Omega_0^2 + \omega_0^2) \end{vmatrix} = 0 . \quad (4.122)$$

Ceci constitue une équation pour  $\omega$ , qui donne les deux pulsations  $\omega_{\pm}$  trouvées plus haut (voir (4.113)). De surcroît, (4.121) peut de récrire sous forme matricielle :

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\Omega_0^2 + \omega_0^2) & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -(\Omega_0^2 + \omega_0^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} . \quad (4.123)$$

La matrice de droite est souvent appelée *matrice dynamique*,  $\mathbf{M}$ . En tout cas, on réalise que les  $\omega_{\pm}^2$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{M}$ , et que les  $\xi_{\pm}$  sont les composantes des vecteurs propres de  $\mathbf{M}$ .

Clairement, tout ceci se généralise à un nombre quelconque  $N$  de masses, la seule difficulté étant d'ordre technique (diagonaliser une matrice de grande taille, éventuellement infinie). Les valeurs propres donnent le spectre des (carrés) des pulsations, les composantes des vecteurs propres définissent les modes propres de vibration de la chaîne de boules et de ressorts. Le couple  $(\omega_{\sigma}, \xi_{\sigma})$  constitue le  $\sigma^{\text{ème}}$  mode propre du système ; clairement, il y a  $N$  modes propres de vibration, autant que de masses, c'est-à-dire autant que d'écart à l'équilibre  $X_n(t)$  à trouver.

L'écriture systématique du système dynamique ne pose aucune difficulté dès que l'on a proprement écrit l'énergie potentielle  $V(X_1, X_2, \dots, X_N)$  ; il suffit alors d'écrire explicitement :

$$\ddot{X}_n = -\frac{\partial V}{\partial X_n} \quad (n = 1, 2, \dots, N) ; \quad (4.124)$$

la matrice dynamique  $\mathbf{M}$  se construit alors d'elle-même au second membre, après avoir substitué  $X_n \rightarrow C_n e^{i\omega t}$ . Ce système contient  $N$  équations, autant que d'inconnues  $X_n$ .

Compte tenu de la proportionnalité entre  $X_n$  et  $C_n$ , on voit que les éléments  $M_{nn'}$  de  $\mathbf{M}$  sont de fait donnés par :

$$\mathbf{M} = \{M_{nn'}\}_{nn'}, \quad M_{nn'} = -\frac{\partial^2 V}{\partial X_n \partial X_{n'}} \quad (n, n' = 1, 2, \dots, N) . \quad (4.125)$$

C'est une matrice symétrique réelle, donc toujours diagonalisable. Lorsque les oscillateurs ne sont pas couplés entre eux,  $V$  est une simple *somme* de termes  $\frac{1}{2}kX_n^2$  :

$$V(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2}kX_n^2 \iff \text{oscillateurs indépendants} ; \quad (4.126)$$

alors, tous les éléments non-diagonaux de  $\mathbf{M}$  sont nuls : en vertu de la forme *additive* de  $V$ , seul le terme en  $X_n$  survit à la première dérivation par rapport à  $X_n$ .

# Chapitre 5

## Introduction à la dynamique des systèmes non-linéaires

*Le but de ce chapitre est de survoler le monde des systèmes non-linéaires en introduisant quelques notions fondamentales et en les illustrant par des exemples simples*

### 5.1 Richesse et spécificités des systèmes non-linéaires

#### 5.1.1 Introduction

Un système non-linéaire est un système régi par des équations non-linéaires où, par définition, la grandeur d'intérêt apparaît dans des expressions algébriques qui ne sont pas du premier degré. Ces équations peuvent être de nature très variée : algébrique, différentielle, intégrale, aux dérivées partielles, aux différences, etc. Quelques exemples :

- oscillateur anharmonique (ressort non parfait), où la force de rappel croît plus vite que l'écart  $x$  à la position d'équilibre. Par exemple :

$$m\ddot{x} = -kx - Ax^3 \quad (A > 0) . \quad (5.1)$$

L'inconnue est  $x$  et figure au second membre au troisième degré. L'énergie potentielle de la particule est :

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{A}{4}x^4} \quad (5.2)$$

Si  $k$  est positif, la situation n'est pas fondamentalement différente de l'oscillateur ordinaire. En revanche, si  $k$  est négatif, il existe deux positions d'équilibre stable ; on parle alors de *double puits*

- particule en chute libre avec frottement quadratique en vitesse. L'équation pour la vitesse  $v = \dot{z}$  ( $z =$  altitude, orientée positivement vers le haut) est :

$$m\dot{v} = -mg - \alpha(\operatorname{sgn}v)v^2 \quad (g > 0, \alpha > 0) , \quad (5.3)$$

où  $\operatorname{sgn}v$  est la fonction signe de  $v$  et assure que la force de frottement est bien toujours en sens contraire de la vitesse. L'inconnue  $v$  est au second degré au second membre. Une variante : une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  soumise à un champ électrique parallèle à  $Ox$ , de module  $\mathcal{E}$  :

$$m\dot{v} = q\mathcal{E} - \alpha(\operatorname{sgn}v)v^2 \quad \iff \quad \dot{v} = \gamma - k(\operatorname{sgn}v)v^2 \quad \left(k = \frac{\alpha}{m}, \gamma = \frac{q\mathcal{E}}{m}\right) , \quad (5.4)$$

où on peut supposer  $q > 0$  sans perdre de généralité.

La présence de la fonction  $\operatorname{sgnv}$  complique un peu les choses. Au prix d'une perte de sens physique lorsque  $v < 0$  (c'est-à-dire quand  $\vec{v}$  est en sens contraire de  $\vec{\mathcal{E}}$ ), on retiendra pour la suite l'équation plus simple  $\dot{f} = \gamma - k f^2$  ; en outre, en faisant le changement de variable  $\tau = kt$ , on obtient :

$$\boxed{\frac{df}{d\tau} = a - f^2, \quad a = \frac{\gamma}{k}} \quad (5.5)$$

Le changement d'inconnue ( $f$  au lieu de  $v$ ) rappelle ce glissement de sens ; dans une telle équation,  $a$  est un paramètre, souvent appelé *paramètre de contrôle*, dont les valeurs, comme on le verra, conditionne la nature des solutions. Le mouvement décrit par (5.5) fera l'objet de retours successifs pour illustrer les notions introduites peu à peu.

- pendule simple (bille de masse  $m$  fixée au bout d'une tige de longueur  $l$  et de masse négligeable). Sans faire l'hypothèse des petites oscillations, l'équation fondamentale de la Dynamique donne projetée sur la tangente est :

$$-ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta \quad \iff \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0} \quad (5.6)$$

Ici, l'inconnue  $\theta$  apparaît dans un sinus, d'où la non-linéarité ; on retrouve l'oscillateur harmonique quand  $\theta \ll \pi$  et alors  $\sin \theta \simeq \theta$  : l'équation redevient linéaire.

- diffusion de particules en interaction attractive, un fait que l'on peut traduire phénoménologiquement en posant une constante de diffusion dépendant de la concentration  $c(x, t)$ , d'autant plus petite que la concentration est élevée (compétition diffusion/agrégation). La modélisation la plus simple consiste à poser  $D(c) = (1 - c)D_0$ ,  $D_0$  étant la constante de diffusion "nue". Dès lors, l'équation de la diffusion prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} c(x, t) = D_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - c) \frac{\partial}{\partial x} c \right) \quad (D_0 > 0), \quad (5.7)$$

la non-linéarité est présente au second membre : l'inconnue  $c$  y figure quadratiquement, avec l'intervention de ses dérivées

- croissance de populations en milieu fermé, où l'excès de population peut causer la famine faute de ressources suffisantes<sup>1</sup>. Si on s'intéresse à décrire l'évolution d'une génération à l'autre, le temps devient une variable discrète, et l'inconnue est un nombre, le nombre  $N_n$  d'individus vivants à la  $n^{\text{ème}}$  génération. Typiquement, pour un taux de fertilité constant, la population augmente exponentiellement. Inversement, la tendance à la baisse de la population en cas de démographie galopante peut être modélisée par un terme  $-bN_n^2$ . Au total, l'équation d'évolution est<sup>2</sup> :

$$\boxed{N_{n+1} = aN_n - bN_n^2 \iff N_{n+1} - N_n = (a - 1)N_n - bN_n^2} \quad (5.8)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels positifs. Comme le montre la forme de droite,  $a - 1$  est le taux de fertilité : visiblement<sup>3</sup>, la situation intéressante est celle où  $a > 1$  (inflation), auquel cas il y a effectivement compétition entre croissance et extinction due à la famine.

Il ne s'agit que de quelques exemples. En fait, les systèmes non-linéaires se rencontrent dans beaucoup de disciplines des sciences dites exactes (mathématiques, mécanique, physique, chimie, biologie, ...). Leur apparition dans les sciences humaines (sociologie, dynamique des marchés boursiers, ...) est plus récente et propose parfois des descriptions intéressantes, à défaut d'explication au vrai sens du terme. Leur présence imprègne aussi le quotidien : on aime bien savoir s'il faut ou non prendre son parapluie !

<sup>1</sup>Le problème des gros poissons qui mangent les petits.

<sup>2</sup>Le terme quadratique ne doit pas donner lieu à un contre-sens, et notamment faire croire que les individus se mangent entre eux (ce que suggère un terme de paires). En réalité, l'incorporation de  $-bN_n^2$  est la façon la plus simple d'introduire une tendance à la baisse de la population quand le nombre d'individus augmente. La version en temps continu de (5.8) est  $\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$  représente (en champ moyen) l'évolution de la densité d'une espèce chimique croissant par génération spontanée et décroissant par annihilation mutuelle de deux molécules.

<sup>3</sup>Si  $a < 1$ , on a  $N_{n+1} - N_n < 0$  : la population ne peut que décroître et il ne se passe rien de remarquable (elle tend d'ailleurs vers zéro pour  $n \rightarrow \infty$ ).

Il n'est pas très hasardeux de dire que les systèmes non-linéaires sont partout, leur version linéarisée ne représentant qu'une toute petite part de la réalité qu'ils décrivent. Le pendule simple a visiblement une dynamique très riche potentiellement : par exemple, en la lançant suffisamment fort, on peut faire tourner la bille autour du point d'attache de la tige. Le régime linéarisé ne peut rendre compte que des petites oscillations, même pas d'un phénomène évident comme l'allongement de la période d'oscillation quand l'amplitude augmente<sup>4</sup>.

S'ils sont en un sens omniprésents, les systèmes non-linéaires sont en général d'une extrême difficulté et sont parfois un défi à l'intuition élémentaire. D'une part, presque toutes les habitudes mentales forgées par la manipulation des systèmes linéaires doivent être revues, notamment parce qu'une modification d'apparence anodine peut avoir des conséquences spectaculaires. D'autre part, alors que l'on dispose de théorèmes généraux concernant l'existence et l'unicité des solutions d'une équation linéaire, aucun cadre général n'existe pour les équations non-linéaires<sup>5</sup>. Cette énorme difficulté technique a motivé l'étude intensive de systèmes modèles simples qui, s'ils ne "collent" pas toujours à une réalité immédiate, permettent de mettre à jour des scénarios typiques dont on espère qu'ils contiennent une certaine forme d'universalité. Ils ont permis en tout cas de dégager de nouvelles idées importantes, totalement absentes dans un cadre linéaire, maintenant brièvement présentées.

Il est devenu d'usage de parler de *systèmes dynamiques* pour qualifier généralement les problèmes décrits par des équations non-linéaires<sup>6</sup> – autant dire que tout système est dynamique...

### 5.1.2 Stabilité

Le plus souvent, on s'intéresse au régime *permanent*, c'est-à-dire à l'état (dynamique) du système à long terme, une fois éteints les éventuels transitoires : le régime forcé étudié au chapitre précédent est un exemple de régime permanent. Un tel régime peut être statique ou au contraire dépendant du temps. L'une des questions importantes est la suivante : ce régime est-il sensible ou non à l'adjonction d'une petite perturbation ? Si oui, on parle de régime *stable*, sinon le régime est dit *instable*.

Cette question est méthodologiquement cruciale, car toute description quantitative passe par la définition d'un *modèle* où l'on espère avoir fait le bon tri entre l'essentiel et l'accessoire, ce dernier étant en définitive purement et simplement omis (négligé) dans les équations écrites avec plus ou moins de peine. En d'autres termes, si le régime est stable, il rendra compte de l'expérience, s'il est instable, les petits effets négligés finiront par se manifester dans la vie réelle, invalidant la première description théorique trop simpliste : le désaccord peut aller de prédictions quantitatives grossièrement fausses, jusqu'à la disparition de solutions prédites et l'apparition d'autres solutions complètement différentes. Ce phénomène *petites causes, grands effets* est parfois aussi appelé *effet papillon*.

### 5.1.3 Notion de bifurcation

Le fait est que les solutions d'une équation non-linéaire peuvent changer radicalement, voire disparaître, lorsqu'un paramètre (dit *de contrôle*) varie un tout petit peu. On parle alors de *bifurcation*.

L'équation (5.5) permet de préciser les choses dans un cas très simple. Soit à examiner la solution statique  $f_s$  de cette équation, caractérisée par le fait que  $\frac{df_s}{d\tau} = 0$ , soit :

$$0 = a - f_s^2 . \quad (5.9)$$

<sup>4</sup>Quand l'amplitude augmente, le pendule monte plus haut, la vitesse décroît moins vite ( $\sin \theta < \theta$ ), la période s'allonge. D'où la recherche d'un(e !) pendule ne présentant pas cet inconvénient, découvert par Ch. Huygens (pendule cycloïdal).

<sup>5</sup>Pour certaines d'entre elles, heureusement, les mathématiciens ont pu énoncer des résultats forts et importants. Par exemple, c'est pour ses travaux sur l'équation de Boltzmann que Jean-Christophe Yoccoz a reçu la médaille Fields il y a quelques années.

<sup>6</sup>"*Dynamical system* is now used as a synonym of non-linear system when the nonlinear equations represent evolution of a solution with time or some variable like time." (P.G. Drazin).

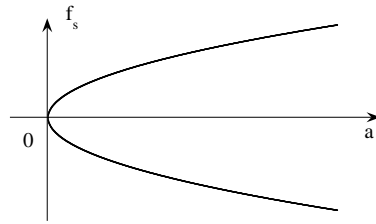


Figure 5.1: États stationnaires de (5.5) (voir (5.9)).

Cette équation a deux racines  $f_s = \pm\sqrt{a}$  si  $a > 0$ , et n’a pas de solution réelle dans le cas contraire. Ainsi, la solution change qualitativement lorsque  $a = 0$  : le changement de signe de  $a$  provoque une *bifurcation* d’un cas où il existe un état stationnaire (en fait, deux) à un autre où il n’y en a pas (quand on exige que la solution soit réelle).

La bifurcation ci-dessus est sans la plus simple que l’on peut concevoir. Il existe en réalité une très grande variété de bifurcations, donnant lieu à une véritable zoologie ; pour ne prendre qu’un autre exemple, on décrit maintenant ce que l’on appelle la *bifurcation de Hopf*. Le système dynamique servant d’illustration ne prétend pas faire référence à une situation physique donnée et n’est considéré que comme le prototype théorique, désincarné physiquement, de système donnant lieu à une bifurcation de ce type.

Les équations dynamiques portent sur deux quantités réelles  $x(t)$  et  $y(t)$  et ont la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} = -y + (a - x^2 - y^2)x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = x + (a - x^2 - y^2)y \quad (a \in \mathbb{R}) \quad . \quad (5.10)$$

En introduisant le nombre complexe  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , ce système est équivalent à :

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = iz + (a - |z|^2)z} \quad (5.11)$$

Le mouvement se déroule ainsi dans le plan complexe suivant une certaine trajectoire paramétrée par le “temps”  $t$ . Le fait que le système possède deux degrés de liberté ouvre considérablement l’ensemble des états permanents possibles<sup>7</sup>.

Compte tenu de la symétrie du système, déjà perceptible sur (5.10), le plus commode est d’utiliser la représentation polaire de  $z$  et d’introduire  $z = r e^{i\theta}$ . En reportant dans (5.11), on trouve :

$$\dot{r} e^{i\theta} + ir\dot{\theta} e^{i\theta} = ir e^{i\theta} + (a - r^2) r e^{i\theta} \quad . \quad (5.12)$$

$e^{i\theta}$  n’étant jamais nul, on peut l’oublier ; après séparation des parties réelle et imaginaire, il vient :

$$\dot{r} = (a - r^2) r \quad , \quad r\dot{\theta} = r \quad . \quad (5.13)$$

Comme précédemment, la notion de bifurcation arrive dès l’examen des états stationnaires. Un premier tel état est  $r_s = 0$ . Le mettant à part une fois pour toutes, le système se simplifie en :

$$\dot{r} = (a - r^2) r \quad , \quad \dot{\theta} = 1 \quad ; \quad (5.14)$$

<sup>7</sup>Le passage de une à deux dimensions est toujours un enrichissement. Par exemple, lorsqu’une certaine quantité est conservée (probabilité, charge, ...), il existe toujours un courant associé. À une dimension les états stationnaires ne peuvent correspondre qu’à un courant nul, sinon on aurait tôt ou tard une accumulation infinie de la dite quantité. Au contraire, dès que l’on passe à deux dimensions, la possibilité s’ouvre de courants permanents *en boucle* : les états permanents ne correspondent plus forcément à un courant nul. C’est bien ce qui se passe ici pour  $a$  positif, indépendamment de l’existence d’une grandeur conservée.

on a donc immédiatement  $\theta(t) = t + \theta_0$  : tous les mouvements se font à vitesse angulaire constante. Par ailleurs, sans devoir écrire la solution complète en détail<sup>8</sup>, l'équation pour  $r$  montre immédiatement que si  $a$  est positif, il existe une solution permanente caractérisée par  $r_s = \sqrt{a}$ . Cette solution n'existe pas si  $a < 0$  : en  $a = 0$  se produit une bifurcation. Pour  $a < 0$ , le seul état permanent est  $r_s = 0$  ; pour  $a > 0$ , deux états existent :  $r_{s1} = 0$ , toujours là, et  $r_{s2} = \sqrt{a}$ , donnant un cercle parcouru à vitesse constante, appelé *cycle limite*.

Une bifurcation est souvent associée à une brisure de symétrie, une autre notion importante dont le sens est précisé ci-après.

### 5.1.4 Brisure de symétrie

La *brisure de symétrie* est un mécanisme par lequel les solutions d'une équation ont chacune une symétrie inférieure à celle "attendue".

Par exemple, soit un barreau parfaitement cylindrique (ou réputé tel !) soumis à une compression croissante sur chacune de ses deux faces circulaires. Sans avoir jamais fait l'expérience, on pourrait croire que le barreau se déforme symétriquement sous l'écrasement. Il n'en est rien : en général, au-delà d'un certain seuil de contrainte, le barreau flèche et prend une forme n'ayant plus la symétrie cylindrique.

Autre exemple : l'anneau glissant librement sur un cerceau de rayon  $R$  tournant autour de son axe vertical<sup>9</sup>, un système qui a de nouveau une symétrie cylindrique autour de l'axe de rotation. Quand la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  est faible, la position d'équilibre de l'anneau est en bas ( $\theta_{\text{eq}} = 0$ ), et est invariante par rotation : elle a la même symétrie que le problème posé. En revanche, au-delà d'un certain seuil  $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$ , la position d'équilibre de l'anneau n'est plus nulle mais vaut  $\theta_{\text{eq}} = \arccos \frac{g}{R\omega^2} \neq 0$  : elle n'est plus invariante – mais toutes les positions possibles s'échangent les unes les autres : l'ensemble des solutions reste globalement invariant.

De même, le potentiel (5.2) est pair : il ne change pas si on change  $x$  en  $-x$ , cette invariance est par définition une symétrie.  $V(x)$  a une seule solution d'équilibre (au sens mécanique du terme),  $x = 0$ , lorsque  $k > 0$  ; en revanche, si  $k$  est négatif, le terme dominant près de l'origine est le terme quadratique  $kx^2$ , qui est donc négatif : la position  $x = 0$  est encore une position d'équilibre, mais elle est sûrement instable ! Comme tôt ou tard, le terme en  $x^4$  finit par l'emporter, on peut affirmer sans calcul qu'il existe une (deux !) position(s) d'équilibre stable caractérisées par les abscisses  $\pm x_0$  ; le calcul donne  $x_0 = \sqrt{\frac{-k}{A}}$  :

$$x_{\text{eq stable}} = \begin{cases} 0 & \forall k > 0 \\ \pm x_0 & \forall k < 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Si l'ensemble des deux positions d'équilibre  $\{-x_0, +x_0\}$  est globalement invariant dans la symétrie du problème, chacune d'entre elles ne l'est plus individuellement (elles s'échangent l'une l'autre). Ainsi, chaque solution a une symétrie plus basse que celle de la fonction qui gouverne le problème, ici  $V(x)$ .

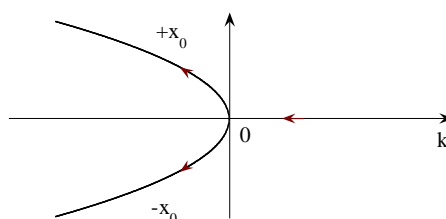


Figure 5.2: Illustration de la bifurcation des solutions d'équilibre du potentiel (5.2) quand  $k$  traverse la valeur zéro (bifurcation diapason).

<sup>8</sup> donnée ci-après, voir (5.32).

<sup>9</sup> Pour voir ce qui se passe, projeter les forces (poids et force centrifuge) sur la tangente au cerceau.

Ici encore on peut parler de bifurcation en  $k = 0$ , une terminologie bien illustrée par le dessin donnant la variation de l'ensemble des solutions en fonction de  $k$  (voir fig. 5.2) quand  $k$  décroît.

Il est légitime de se demander comment le système choisit entre plusieurs états équivalents. Répondre à cette question est difficile, dans la mesure où, en pratique, on est précisément dans l'incapacité de dire de quel côté il va tomber. Dans le cas du double puits (5.2) où  $k$  est négatif, il n'y a pas de doute que si la bille est déposée avec infiniment de douceur au sommet de potentiel situé en  $x = 0$  (qui est une position d'équilibre), et si rien d'autre n'existe, elle va y rester. D'un autre côté, la moindre brise (non incluse dans le modèle) va la faire basculer d'un côté ou de l'autre (même un expert en météo est incapable de prévoir la direction des petites brises). À nouveau, une petite cause va produire un grand effet. Pour le barreau cylindrique, nul ne prétendrait que la contrainte exercée par la presse est *rigoureusement* à symétrie cylindrique, ni que le barreau ne contient pas ici et là des défauts, éventuellement à un niveau microscopique<sup>10</sup>, qui peuvent déterminer la direction de fléchage.

## 5.2 Singularités spontanées d'une équation différentielle non-linéaire

La distinction linéaire – non-linéaire est absolument fondamentale. Pour des équations différentielles linéaires, on sait que l'ensemble des solutions peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, ce qui permet d'énoncer de nombreux théorèmes concernant notamment l'existence et l'unicité des solutions. Pour les équations non-linéaires, la situation est nettement plus difficile, moins confortable, parfois même un peu acrobatique.

Ces deux types d'équations se rattachent en effet à des mondes très différents : les équations linéaires décrivent des phénomènes très banals, ne conduisant à aucune vraie surprise. Au contraire, les équations non-linéaires contiennent une richesse incommensurable, et engendrent parfois des solutions exotiques, présentant de surcroît une extrême variabilité par rapport à des changements *a priori* anodins. Il est utile de marquer la différence spectaculaire sur un exemple très simple.

L'équation linéaire :

$$f' + \frac{f}{x-1} = 0 \quad (5.16)$$

a pour solution<sup>11</sup>  $f(x) = \frac{f(0)}{1-x}$ , où  $f(0)$  est la valeur prescrite à l'avance.  $f(0)$  est un simple facteur qui ne change en rien la forme de la solution, et notamment n'affecte pas ses anomalies, ici la divergence en  $x = 1$  – la simple vision de l'équation (5.16) permet d'ailleurs de deviner que  $x = 1$  est un point particulier, où il se passe quelque chose de remarquable.

Par contraste, soit l'équation non-linéaire :

$$f' = f^2 \quad (5.17)$$

Si on choisit  $f(0) = 1$ , la solution est :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} . \quad (5.18)$$

Ainsi, en prenant  $f(0) = 1$  dans les deux cas, les deux équations (5.16) et (5.17) ont exactement la même solution. Notons que, au contraire de ce qui se passe pour (5.16), la simple considération de (5.17) ne permet pas de soupçonner que  $x = 1$  est un point particulier ; or une divergence apparaît spontanément dans la solution (c'est pourquoi on parle de *singularité spontanée*). Maintenant, choisissons une autre condition initiale, par exemple  $f(0) = 2$  ; la solution est alors  $\frac{2}{1-2x}$  : elle a encore une divergence, mais elle se produit maintenant en  $x = \frac{1}{2}$  ! Ce simple changement de condition initiale<sup>12</sup> a profondément modifié la solution...

<sup>10</sup>Une fracture macroscopique peut résulter d'une *avalanche* de défauts *microscopiques*.

<sup>11</sup>obtenue par intégration immédiate !

<sup>12</sup>D'une façon générale, pour une équation linéaire du premier ordre  $f' = \Phi_{\text{lin}}(f, z)$ , avec la condition  $f(a) = A$ , la solution existe et est une fonction analytique dans le voisinage de  $a$  pourvu que  $\Phi_{\text{lin}}(Z, z)$  soit une fonction analytique vis-à-vis de chacun de ses arguments en  $Z = A$  et  $z = a$ . Rien de tel ne peut être affirmé pour une équation non-linéaire, pour laquelle domaine d'analyticité et rayon de convergence des solutions sont en général imprévisibles en raison précisément de la possibilité d'apparition spontanée de singularités.



### 5.3 Analyse de stabilité linéaire

Soit une équation autonome du premier ordre, que l'on peut toujours écrire comme :

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \Phi(f; \{\lambda_i\}_i)} \quad (5.19)$$

$\Phi$  ne contient pas explicitement le temps  $t$  (on parle alors de système *autonome*). Les  $\{\lambda_i\}_i$  sont des paramètres, et  $\Phi$  est une fonction (non-linéaire) de la fonction inconnue  $f$ . On appelle généralement *point d'équilibre* (ou *solution stationnaire*, ou *point critique*) une solution constante  $\forall t$  ; si  $f_s$  est une telle solution, elle satisfait :

$$0 = \Phi(f_s; \{\lambda_i\}_i) . \quad (5.20)$$

Pour (5.5), les points d'équilibre ont déjà été donnés (voir (5.9) et la discussion qui suit).

Comme déjà indiqué, une question importante est la *stabilité* de ces états d'équilibre, puisqu'elle conditionne leur pertinence vis-à-vis des problèmes réels. Bien évidemment, il est hors de question en général de pouvoir résoudre exactement l'équation (ce qui donnerait la réponse), mais on peut néanmoins apprendre beaucoup sur la stabilité des points critiques en analysant une solution très voisine de  $f_s$ , ce qui autorise *a priori* à effectuer un développement de la fonction  $\Phi$  autour de  $f_s$ , et à ne conserver qu'un ordre donné du développement. Quand on s'arrête à l'ordre 1 par rapport à l'écart, on dit que l'on effectue une analyse de stabilité *linéaire*.

Soit donc  $f = f_s + \delta f$ , où  $\delta f$  est supposé "petit" – en un sens à préciser éventuellement. En supposant la fonction  $\Phi$  douée de toutes les propriétés souhaitables, un développement de Taylor autour de  $f_s$  transforme (5.19) en :

$$\frac{d}{dt}(f_s + \delta f) = \Phi(f_s; \{\lambda_i\}_i) + \delta f \left( \frac{\partial \Phi}{\partial f} \right)_{f_s} + \dots \iff \frac{d}{dt} \delta f = \delta f \left( \frac{\partial \Phi}{\partial f} \right)_{f_s} + \dots , \quad (5.21)$$

où (5.20) a été prise en compte. Si on laisse tomber tous les termes au-delà du premier ordre, il reste une équation très simple pour  $\delta f$  :

$$\frac{d}{dt} \delta f = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial f} \right)_{f_s} \delta f \equiv \rho \delta f \iff \delta f(t) = \delta f(0) e^{\rho t} , \quad (5.22)$$

que l'on peut intégrer et interpréter immédiatement. Si  $\rho > 0$ , le petit écart initial augmente exponentiellement : toute perturbation, aussi petite soit-elle, écarte le système de l'état  $f_s$ , qui est de ce fait *linéairement instable*. Au contraire, si  $\rho < 0$ , le système perturbé revient en  $f_s$  et l'état est *linéairement stable*. Les mêmes enseignements peuvent être tirés dans le cas où  $\rho$  est complexe : il y a stabilité (*resp.* instabilité) si la partie réelle est négative (*resp.* positive) ; si  $\Re \rho = 0$ , l'écart  $\delta f(t)$  reste constant en module : son affixe tourne dans le plan complexe à vitesse constante autour du point d'affixe  $f_s$ .

Ces conclusions n'ont évidemment de sens que si  $\delta f$  est faible : l'analyse de stabilité linéaire ne peut évidemment rien dire si la perturbation initiale est forte, ou quand l'écart a commencé à diverger, auquel cas l'analyse *linéaire* ne peut rien raconter sur la suite de l'histoire.

Par exemple, revenant à (5.5), les solutions stationnaires sont données par (5.9). Pour conduire l'analyse de stabilité linéaire, on écrit  $f = f_s + \delta f$ , avec  $f_s = \pm\sqrt{a}$  quand  $a > 0$ , soit<sup>13</sup> :

$$\frac{d}{d\tau}(f_s + \delta f) = a - (f_s + \delta f)^2 \iff \frac{d}{d\tau} \delta f = -2f_s \delta f - (\delta f)^2 , \quad (5.23)$$

où (5.9) a été pris en compte. Jusqu'à présent, aucune approximation n'a été faite. On rentre dans le cadre strictement linéaire en oubliant  $(\delta f)^2$  au second membre, d'où :

$$\frac{d}{d\tau} \delta f = -2f_s \delta f ; \quad (5.24)$$

<sup>13</sup>Ici, point besoin de calculer  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial f} \right)_{f_s}$  tant les choses sont simples !

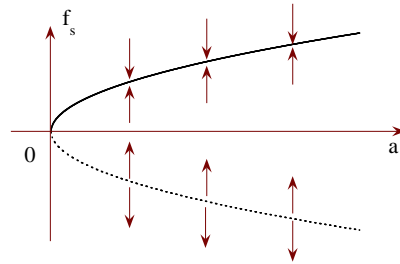


Figure 5.3: Solutions stationnaires de (5.5) ; les flèches symbolisent la stabilité de la branche positive (trait plein) et l'instabilité de la branche négative (pointillés).

(5.24) s'intègre immédiatement et donne :

$$\delta f(\tau) = \delta f(0)e^{-2f_s\tau} , \quad (5.25)$$

où  $\delta f(0)$  est le petit écart initial de  $f(\tau)$ . Ainsi, tout dépend ici du signe de  $f_s$  : si  $f_s > 0$ , l'écart donné initialement s'éteint exponentiellement au cours du temps, et le point d'équilibre est stable. Au contraire, si  $f_s < 0$ , l'écart initial augmente exponentiellement, et ce fait sert de signal d'alarme permettant de conclure que l'état stationnaire en question est instable (voir fig. 5.3). Bien évidemment, on ne peut rien dire d'autre que conclure à l'instabilité, ce qui n'est déjà pas si mal : clairement, comme l'écart devient de plus en plus grand au fur et à mesure que le temps passe, le cadre linéaire devient très vite invalide, et on ne sait pas ce qui va se passer réellement.

Si  $a < 0$ ,  $f_s$  est imaginaire pur :  $f_s = \pm i\sqrt{-a}$  ; alors (5.24) donne :

$$\delta f(\tau) = \delta f(0)e^{\mp 2i\sqrt{-a}\tau} , \quad (5.26)$$

et le point associé à  $\delta f(\tau)$  tourne autour de  $\pm i\sqrt{-a}$  à la vitesse constante  $\mp 2i\sqrt{-a}$ .

L'analyse de stabilité linéaire ci-dessus suppose évidemment  $a \neq 0$ , qui est le point remarquable où les branches stable et instable se rejoignent (point tournant, point de stabilité marginale) : il y a des valeurs de  $a$  arbitrairement proches qui donnent soit une solution stable, soit une solution instable. Pour en savoir plus, il suffit de résoudre l'équation en  $a = 0$  :

$$\dot{f}_{\text{marg}} = -f_{\text{marg}}^2 \iff f_{\text{marg}}(\tau) = \frac{f_0}{1 + f_0\tau} , \quad (5.27)$$

$f_0$  étant la valeur initiale de  $f(\tau)$ . Cette solution est très différente selon que  $f_0$  est positif ou négatif. Dans le premier cas,  $f(\tau)$  décroît comme  $\frac{1}{\tau}$  et s'annule à  $\tau$  infini. Au contraire, si  $f_0$  est négatif,  $f(\tau)$  décroît toujours, mais diverge à  $-\infty$  au temps *fini* égal à  $\frac{1}{(-f_0)}$ . Une fois encore, un changement de condition initiale modifie radicalement la solution, et de surcroît la valeur de la singularité dépend explicitement de cette valeur initiale (comme on en a déjà vu un exemple dans la sous-section 5.2). Ainsi, c'est finalement l'état initial qui conditionne la nature de l'état à long terme – tout le contraire d'une situation où il y a oublié des conditions initiales !

Pour terminer, donnons la solution de l'équation (5.5), qui est assez simple pour pouvoir être intégrée exactement<sup>14</sup>. On trouve<sup>15</sup> :

$$a > 0 : f(\tau) = \frac{f_0 + \sqrt{a} \tanh(\sqrt{a}\tau)}{1 + \frac{f_0}{\sqrt{a}} \tanh(\sqrt{a}\tau)} , \quad a < 0 : f(\tau) = \frac{f_0 - \sqrt{-a} \tan(\sqrt{-a}\tau)}{1 + \frac{f_0}{\sqrt{-a}} \tan(\sqrt{-a}\tau)} \quad (5.28)$$

<sup>14</sup>L'équation est très simple : du premier ordre et à variables séparées (à faire en TD/TP ?)

<sup>15</sup>Cette expression reproduit bien (5.27) quand  $a \rightarrow 0$  à gauche ou à droite.

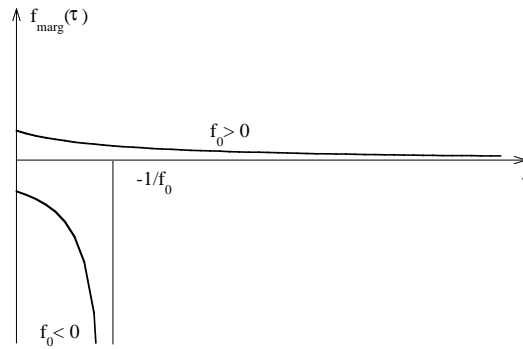


Figure 5.4: Solution stationnaire  $f_{\text{marg}}(\tau)$  de (5.5) dans le cas marginal ( $a = 0$ , voir (5.27)). La solution à  $f_0 < 0$  diverge en  $t = -\frac{1}{f_0}$ . Noter l'extrême sensibilité de la solution au signe de  $f_0$ .

L'étude détaillée de cette fonction révèle une grande variété de comportements selon les valeurs de  $a$  et  $f_0$ . Pour  $a > 0$ ,  $f(\tau)$  est finie  $\forall \tau$  tant que  $f_0 > -\sqrt{a}$ ; dans le cas contraire,  $f(\tau)$  diverge en  $\tau = -\frac{1}{\sqrt{a}} \text{Arcth} \frac{\sqrt{a}}{f_0}$ . Si  $a < 0$ ,  $f(\tau)$  diverge en  $\tau = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \text{Arctg} \frac{\sqrt{-a}}{f_0}$  dès que  $f_0$  est négatif. L'extrême variabilité de la dynamique contenue dans une équation aussi simple que (5.5) en dit déjà long sur la grande richesse des régimes que les non-linéarités rendent possibles. Noter que l'expression pour  $a < 0$  se déduit tout naturellement de celle pour  $a > 0$  en définissant, si  $a$  est négatif,  $\sqrt{a} = i|a|$  et en utilisant  $\tanh ix = i \tan x$ .

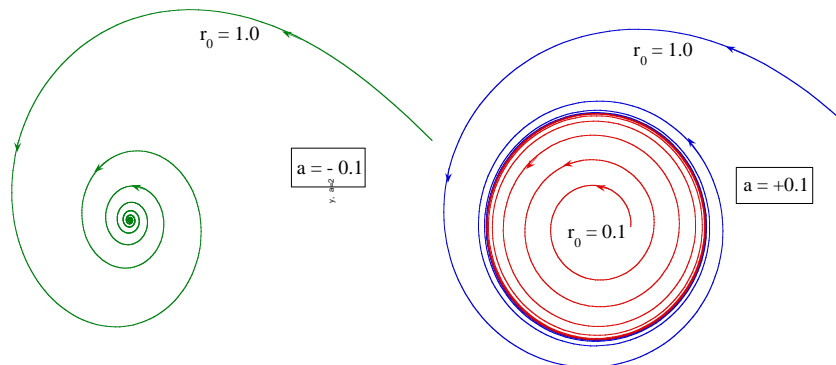


Figure 5.5: Trajectoires dans le plan  $xOy$  pour le système décrit par (5.29) servant d'illustration à la bifurcation de Hopf. Pour  $a < 0$ , toutes les trajectoires convergent vers le point fixe situé à l'origine (à gauche). Si  $a > 0$ , c'est le cycle-limite de rayon  $\sqrt{a}$  qui est stable (à droite).

Effectuons maintenant l'analyse de stabilité linéaire pour le système de Hopf introduit plus haut (voir (5.10)). Repartant de (5.14) pour  $r$  exclusivement (le sort de  $\theta(t)$  est réglé) et posant  $r = r_s + \delta r$  :

$$\dot{\delta r} = [a - (r_s + \delta r)^2] (r_s + \delta r) \iff \dot{\delta r} = (a - r_s^2) r_s + (a - 3r_s^2) \delta r + \mathcal{O}(\delta r^2) ; \quad (5.29)$$

le premier terme au second membre est toujours nul (comme il se doit) et il reste :

$$\dot{\delta r} = (a - 3r_s^2) \delta r + \mathcal{O}(\delta r^2) . \quad (5.30)$$

On a vu que si  $a < 0$ ,  $r_s = 0$ ; dans ce cas  $\delta r(t) = \delta r(0) e^{a\tau}$  :  $a$  étant négatif, ce point est stable. Si  $a > 0$ , les deux valeurs  $r_{s1} = 0$  et  $r_{s2} = \sqrt{a}$  sont possibles, donc  $a - 3r_s^2 = a, -2a$  et :

$$a > 0 : \quad \delta r(\tau) = \begin{cases} \delta r(0) e^{a\tau} & (r_{s1}) \\ \delta r(0) e^{-2a\tau} & (r_{s2}) \end{cases} \quad (5.31)$$

Comme  $a$  est positif, le point  $r_{s1} = 0$  est instable et  $r_{s2} = \sqrt{a}$  est stable.

Au total, l'état  $r_s = 0$  est linéairement stable si  $a < 0$ , instable si  $a > 0$ , auquel cas le cycle-limite est stable. Tout ceci se confirme en analysant la solution complète, obtenue facilement à partir de<sup>16</sup> (5.14) :

$$\frac{r(t)}{r_0} = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{r_0^2 + (a - r_0^2)e^{-2at}}} & \forall a \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1 + 2r_0^2 t}} & a = 0 \end{cases} \tag{5.32}$$

## 5.4 Portrait de phase

### 5.4.1 Présentation sur l'exemple simple de l'équation (5.5)

Le mouvement résultant d'une équation non-linéaire telle que (5.5) est susceptible d'une représentation permettant de s'en faire une idée assez précise, sans pour autant résoudre effectivement l'équation – ce qui est toujours assez difficile, quand c'est possible. En effet, cette équation solidarise les variations des deux quantités  $f$  et  $\frac{df}{d\tau}$  ; dès lors, si on introduit un plan repéré par  $XOY$  et que  $f$  est l'abscisse  $X$ ,  $\frac{df}{d\tau}$  l'ordonnée  $Y$ , (5.5) est l'équation cartésienne d'une certaine courbe dans le plan, ici précisément :

$$f \rightarrow X, \quad \frac{df}{d\tau} \rightarrow Y : (5.5) \iff \boxed{Y = a - X^2} \tag{5.33}$$

Cette courbe est une parabole dont la concavité est dirigée vers le bas, qui coupe l'axe des abscisses en  $\pm\sqrt{a}$  si  $a > 0$ , qui est tout en dessous dans le cas contraire. C'est le premier ingrédient pour tracer le *portrait de phase* associé à (5.5).

Par construction, le mouvement se déroule le long de cette courbe et il est possible de figurer sa nature selon le point de départ à  $\tau = 0$ , c'est-à-dire selon la condition initiale.

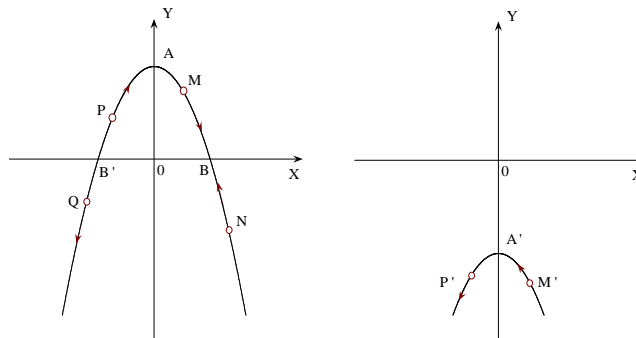


Figure 5.6: Portrait de phase pour l'équation (5.5) ; à gauche  $a > 0$ , à droite  $a < 0$ .

- $a > 0$

Prenons comme condition initiale  $0 < f_0 < \sqrt{a}$ , soit  $0 < X < \sqrt{a}$ , point M sur la fig. 5.6 à gauche. Alors  $Y$  est positif, c'est-à-dire que  $\frac{df}{d\tau}$  est positif, donc  $f$  augmente, le descendant au temps  $\tau$  du point M à l'instant 0 se dirige vers B, d'où la flèche.

<sup>16</sup>Le cas particulier  $a = 0$  peut se trouver en prenant la limite  $a \rightarrow 0$  de la solution à  $a$  fini – ou en résolvant directement l'équation après y avoir fait  $a = 0$ .

De même si on part de P, on a encore  $\frac{df}{d\tau} > 0$ , donc  $f$ , c'est-à-dire  $X$ , augmente et le point se dirige vers A, puis vers M puis vers B. Enfin, si on part de N,  $\frac{df}{d\tau} < 0$ , donc  $X \equiv f$  décroît et on se dirige encore vers B.

Au total, tous les points qui parviennent à rejoindre la branche de droite convergent au point B à un certain instant (ici infini). Inversement, on voit que le point P s'écarte de B', et il en va de même si on part de Q : le point B attire, le point B' repousse. B et B' sont les points stationnaires (puisque  $(\frac{df}{d\tau})_{B, B'} = 0$ ) ; B est stable, B' est instable. B est un *attracteur* (terminologie consacrée), B' est un "répulsor" (néologisme un peu barbare !)

- $a < 0$

Si on part de M',  $\frac{df}{d\tau} < 0$ , donc  $X \equiv f$  décroît : le descendant de M' se dirige vers A et, comme la dérivée est toujours négative, dépasse A et file à l'infini : lorsque  $a < 0$ , il n'existe pas d'état stationnaire (critique) réel.

Notons que si le portrait de phase permet d'en apprendre encore un peu plus sur la nature du mouvement, il ne dit rien sur la *chronologie* : par exemple, on ne peut dire combien de temps il faut au système pour, partant du point M (fig. 5.6), parvenir au point B. Une telle réponse ne peut s'obtenir, en général, que par la résolution complète de l'équation du mouvement.

Le mouvement du point représentatif sur le portrait de phase est parfois appelé *flot*.

### 5.4.2 Le pendule simple

L'exemple précédent est élémentaire. Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué, celui du pendule simple décrit par (5.6), avec l'objectif d'obtenir le plus de renseignements possible sur le mouvement, sans faire l'approximation des petites oscillations, et avec pratiquement aucun calcul. Cette équation – fortement non-linéaire (l'inconnue  $\theta$  est dans le sinus) – est du second ordre en temps pour l'angle  $\theta$ , mais on peut facilement écrire une combinaison n'impliquant que  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  ; en effet, en multipliant membre à membre par  $\dot{\theta}$ , il vient :

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta \iff ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = 0 ; \quad (5.34)$$

On reconnaît alors au premier membre la dérivée de  $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$ , quantité qui n'est rien d'autre que l'énergie mécanique totale. D'où :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \right] = 0 \iff \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = C^{\text{ste}} . \quad (5.35)$$

L'énergie est une constante du mouvement et vaut en particulier ce qu'elle valait au départ ; au total :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 - mgl\cos\theta_0 = E . \quad (5.36)$$

Ceci fixe une relation explicite entre  $\theta$  et sa dérivée  $\dot{\theta}$ , et à nouveau, on peut faire (tirer !) le portrait de phase. La substitution est maintenant  $\theta \rightarrow X$ ,  $\dot{\theta} \rightarrow Y$ , et il s'agit (presque) de ce que l'on appelle *l'espace des phases*, formé avec une coordonnée (l'angle) et sa dérivée par rapport au temps<sup>17</sup>. L'équation cartésienne est :

$$\boxed{Y^2 - 2\omega^2 \cos X = \frac{2E}{ml^2} \equiv C \quad (\omega^2 = \frac{g}{l})} \quad (5.37)$$

Ceci définit un réseau de courbes dans le plan, chacune étant paramétrée par la constante  $C$ . Ce réseau possède une symétrie de translation parallèlement à  $OX$ , puisque si  $X$  varie de entier  $\times 2\pi$ , l'expression au premier membre de (5.37) ne change pas. Il suffit donc d'examiner ce qui se passe dans une bande perpendiculaire à  $OX$  de largeur  $2\pi$  (par exemple  $[-\pi, +\pi]$ ) et de hauteur infinie. Pour simplifier la discussion, supposons que le

<sup>17</sup>En général, un plan de phase est essentiellement formé de  $q$  et de  $\dot{q}$ , ou plus exactement de  $q$  et de  $p = m\dot{q}$  (en coordonnées cartésiennes).

pendule étant au repos à la verticale ( $\theta = 0$ ), on lui donne une vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0$  ; à cet instant précis, (5.37) s'écrit  $\dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2 \times 1 = \frac{2E}{ml^2} \equiv C$ , d'où  $C = \dot{\theta}_0^2 - 2\omega^2$  ; l'équation cartésienne (5.37) prend alors la forme :

$$\sin^2 \frac{X}{2} + \frac{Y^2}{4\omega^2} = \nu^2, \quad \frac{Y}{2\omega} = \pm \sqrt{\nu^2 - \sin^2 \frac{X}{2}}, \quad (5.38)$$

où :

$$\nu = \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \quad (5.39)$$

mesure la vitesse angulaire initiale relativement à l'échelle naturelle que constitue  $\omega$ .  $\nu$  est donc un index de l'énergie totale, quand la position initiale est  $\theta = 0$  :  $\nu = \sqrt{\frac{E}{2mgl}}$ . (5.38) montre que si  $\nu \leq 1$ , l'amplitude maximale d'oscillation est fixée par l'angle  $\theta_{\max} = 2\text{Arcsin } \nu$ .

Dans le cas où la vitesse initiale est faible (plus précisément  $\dot{\theta}_0 \ll \omega$ ), le pendule reste inévitablement dans le régime des petites oscillations.  $X$  et  $Y$  étant petits, il est licite de faire un développement limité de (5.38), pour obtenir :

$$\frac{X^2}{4\nu^2} + \frac{[Y/(2\omega)]^2}{\nu^2} \simeq 1. \quad (5.40)$$

Dans le plan ( $X = \theta, \frac{Y}{2\omega} = \frac{\dot{\theta}}{2\omega}$ ), (5.40) définit une ellipse de demi-axes  $2\nu$  et  $\nu$ . La conclusion la plus importante à ce stade est que la trajectoire dans l'espace des phases est une courbe *fermée*, donnant un mouvement périodique en temps dans l'espace réel.

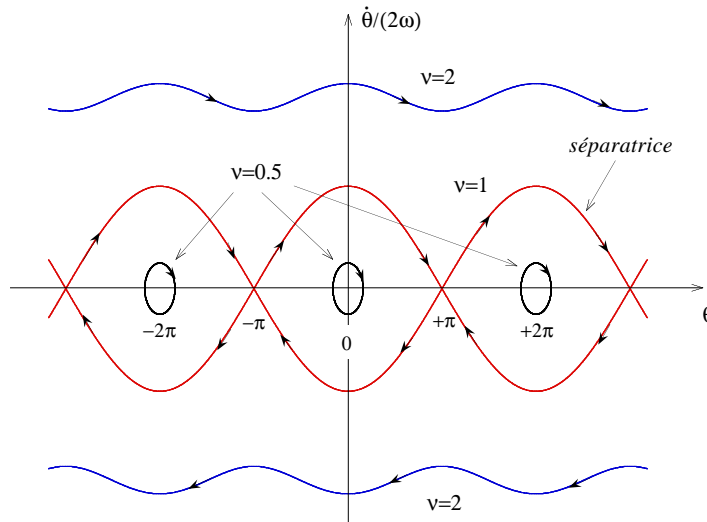


Figure 5.7: Portrait de phase du pendule simple.  $\nu$  (voir (5.39)) paramétrise chaque trajectoire de l'espace des phases. Les flèches montrent le sens du mouvement au cours du temps ; pour la clarté, les échelles ne sont pas les mêmes sur les deux axes (les petites ellipses coupent l'axe  $\theta$  aux points  $\pm 2\pi$ , l'axe  $\dot{\theta}/(2\omega)$  aux points  $\pm \nu$  : si les échelles étaient les mêmes, elles seraient aplaties *horizontalement*).

Augmentons maintenant la vitesse initiale : l'ellipse va se déformer (l'équation (5.40) est de moins en moins valide) et va grossir puisque à la fois la vitesse maximum et l'amplitude vont augmenter ; les sommets des différentes "ellipses" se rapprochent les uns des autres. Les trajectoires restent fermées, la bille ayant un mouvement pendulaire entre deux valeurs<sup>18</sup>  $\pm \theta_{\max}$ , toujours périodique, mais dont la période,  $T$  est plus difficile à calculer. On trouve que  $T$  est donnée par une certaine fonction spéciale, appelée fonction elliptique complète

<sup>18</sup> $\theta_{\max}$  s'obtient par  $2\omega^2(1 - \cos \theta_{\max}) = \dot{\theta}_0^2$ , soit  $\theta_{\max} = 2 \arcsin \frac{\dot{\theta}_0}{2\omega} \equiv 2 \arcsin \nu$ .

de première espèce<sup>19</sup>  $\mathbf{K}$  :

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K}\left(\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}\right). \quad (5.43)$$

Lorsque  $\nu$  atteint la valeur 1, l'équation cartésienne se simplifie en :

$$\nu = 1 : \quad \frac{Y}{(2\omega)} = \pm \left| \cos \frac{X}{2} \right|. \quad (5.44)$$

Ceci correspond au cas-limite où la bille arrive à la verticale avec une vitesse nulle (l'intégration de l'équation du mouvement montre que ceci se produit au bout d'un temps infini). Lorsque  $\nu = 1_-$ , la bille oscille entre  $-\pi_+$  et  $+\pi_-$  : c'est l'oscillation d'amplitude maximale, dont la période,  $T$ , en fait diverge.

Enfin, quand la vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0$  est supérieure à  $2\omega$  ( $\nu > 1$ ), le radical dans (5.38) ne peut plus s'annuler et  $\dot{\theta}$  conserve un signe constant : le pendule tourne autour du point d'attache toujours dans le même sens — celui qu'on lui a donné au départ, évidemment. Les ondulations des courbes ouvertes signifient que lorsque le pendule arrive en haut ( $\theta = (2k+1)\pi$ ), sa vitesse (angulaire) passe par un minimum, avant de redevenir maximum lors du nouveau passage en bas ( $\theta = (2k+2)\pi$ ).

La courbe d'équation (5.44) délimite donc deux parties du plan : à l'intérieur (petite énergie), toutes les trajectoires sont fermées et représentent un mouvement périodique. À l'extérieur (grande énergie), les trajectoires sont ouvertes et le mouvement n'est plus périodique. Pour cette raison, la courbe (5.44) s'appelle *séparatrice*. On note que deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se recouper<sup>20</sup> : si tel était le cas, un même jeu de conditions initiales distinctes engendrerait deux mouvements différents ! Ce serait physiquement absurde, et est de fait impossible (l'équation du mouvement a une et une seule solution quand les deux conditions initiales sont fixées).

À nouveau on peut parler de bifurcation en  $\nu = 1$ . Pour  $\nu < 1$ , les trajectoires dans l'espace des phases sont périodiques et fermées et présentent une symétrie au sens où aucun sens de rotation n'est privilégié. Pour  $\nu > 1$ , les trajectoires sont ouvertes, ne sont plus périodiques et, de surcroît, le pendule garde pour toujours le souvenir de la condition initiale<sup>21</sup>.

◆ *Remarque*

Pour le pendule non-amorti, il n'existe pas d'état stationnaire (critique), indépendant du temps au sens où lorsque  $\theta = 0$ , le mouvement ne s'arrête pas pour autant. Physiquement, ceci résulte de l'*inertie* de la bille, qui lui permet de continuer sur sa lancée ; techniquement, c'est parce que l'équation est du second ordre pour  $\theta$ , au contraire de (5.5) qui est du premier ordre pour  $f$  et  $\dot{f}$ . Très schématiquement, on peut dire que plus l'ordre de l'équation est grand, plus le mouvement garde la mémoire de ce qu'il était peu avant — et c'est bien la masse qui est en facteur de la dérivée d'ordre le plus élevé. ◆

Bien évidemment, en présence d'amortissement, toute l'analyse doit être reprise, mais on devine ce qui se passe. Par exemple si l'amortissement est faible, les trajectoires fermées vont devenir des spirales convergent

<sup>19</sup> $\mathbf{K}$  est l'intégrale :

$$\mathbf{K}(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \phi}} \quad (5.41)$$

Quand l'amplitude d'oscillation tend vers  $\pi$ ,  $\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}$  tend vers 1, donc  $m$  tend vers 1 :  $\mathbf{K}$  diverge alors logarithmiquement, et la période tend vers l'infini. Pour  $\nu = 1$  strictement, il faut un temps infini à la bille pour rejoindre la position d'équilibre instable.

À l'inverse, le développement de  $\mathbf{K}$  pour  $m \ll 1$  ( $\theta_{\max} \ll \pi$ ) donne les premières corrections d'asynchronicité :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \left( 1 + \frac{1}{16}\theta_{\max}^2 + \dots \right) \quad (5.42)$$

<sup>20</sup>Sauf en un point d'équilibre.

<sup>21</sup>Ce n'est pas le cas pour le mouvement pendulaire relatif à  $\nu < 1$ . En effet, un observateur qui arrive après le lancement de la bille est bien incapable de dire qu'elle était précisément la condition initiale : il peut seulement savoir, en mesurant l'énergie mécanique, combien vaut la combinaison  $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 - mgl \cos \theta_0$ .

vers  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = 0$ . Les trajectoires ouvertes, elles, vont peu à peu se rapprocher de la séparatrice et, une fois celle-ci franchie, spiraler vers le centre. La vision précédente reste correcte pour les temps  $t$  très petits devant le temps de relaxation.

## 5.5 Systèmes à deux variables

Les exemples précédents concernaient exclusivement des systèmes à un degré de liberté (abscisse  $x$ , position angulaire  $\theta$ ). L'augmentation des degrés de liberté complique quelque peu l'algèbre, mais permet de traiter des systèmes dynamiques modèles plus riches. Dans cette section, on présente deux modèles contenant un plus grand nombre de degrés de liberté ; le premier contient d'emblée deux variables, le second est beaucoup plus complexe mais, avec des hypothèses raisonnables, peut être effectivement simplifié pour déboucher sur deux degrés de liberté seulement.

### 5.5.1 Le modèle proie - prédateur (Lotka - Volterra)

Le plus simple des systèmes dynamiques à deux dimensions est sans doute le modèle proie - prédateur, défini par Lotka en 1920, et proposé indépendamment par Volterra en 1926 (*“Théorie mathématique de la lutte pour la vie”*) pour expliquer les variations cycliques des prises de poisson dans l'Adriatique<sup>22</sup>.

L'idée est de décrire deux populations en interaction, les unes (les gros poissons, population notée  $P(t)$ ) se nourrissant des autres (les petits poissons, population  $p(t)$ ). En l'absence d'interaction entre les deux espèces, les gros poissons disparaissent faute de nourriture tandis que les petits poissons pullulent (on admet que les réserves de plancton sont inépuisables). L'interaction la plus simple consiste à poser un terme proportionnel au produit  $pP$ , et c'est ce qui introduit la non-linéarité. C'est aussi admettre que la décroissance des proies est proportionnelle au nombre de prédateurs, et que la croissance des prédateurs est proportionnelle au nombre de proies disponibles. En fin de compte, le modèle de Lotka - Volterra est défini par le système d'équations :

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = \gamma p - apP, \quad \frac{dP}{dt} = -\Gamma P + ApP} \quad (5.45)$$

où les quatre constantes  $\gamma$ ,  $\Gamma$ ,  $a$  et  $A$  sont positives, toutes homogènes à l'inverse d'un temps.  $\gamma$  serait le taux de croissance des petits poissons s'ils n'étaient des proies,  $\Gamma$  le taux d'extinction des gros poissons affamés par l'absence de nourriture. Les deux constantes non-diagonales  $a$  et  $A$  décrivent l'interaction (les gros mangent les petits), et sont *a priori* différentes. Bien sûr, les populations sont supposées toujours suffisamment élevées<sup>23</sup> pour pouvoir être traitées comme des fonctions continues (sans aucun doute, les nombres de poissons sont des entiers naturels !), et les questions posées par le traitement continu de variables discrètes sont mises ici de côté.

On ne peut pas ici tracer commodément le portrait de phase, l'espace des phases étant de dimension égale à 4 :  $p$ ,  $\dot{p}$ ,  $P$  et  $\dot{P}$ . Comme on va le voir, il est néanmoins possible de se faire une idée précise des trajectoires, sans pour autant résoudre explicitement les équations.

Remarquons d'abord que le système (5.45), admet des solutions “triviales” :

$$p = P = 0 ; \quad p = 0, \quad P = P(0)e^{-\Gamma t} \quad P = 0, \quad p(t) = p(0)e^{+\gamma t} \quad (5.46)$$

En l'absence de nourriture ( $p = 0$ ), la population des gros poissons s'éteint (la durée de vie moyenne est  $\Gamma^{-1}$ ) ; s'il n'y a pas de prédateurs ( $P = 0$ ), la population des petits poissons croît exponentiellement et gagne un facteur  $e$  à chaque intervalle de temps  $\gamma^{-1}$ .

<sup>22</sup>Il semble toutefois que la première description mathématique de la dynamique des populations est due à Leonhard Euler (1760).

<sup>23</sup>Quand les deux fonctions  $P(t)$  et  $p(t)$  prennent des valeurs  $\gg 1$ , la variation d'une unité (le moins que le puisse faire s'agissant de nombres entiers !) peut être traitée comme un “infiniment petit”, d'où le traitement avec des accroissements différentiels, l'usage de dérivées, etc.



Dans le cas général, quand  $t$  varie de  $0$  à  $+\infty$ , les solutions (5.46) délimitent les frontières de  $\mathbb{R}_+^2$  ; compte tenu de l'unicité des solutions d'un système tel que (5.45), et de l'impossibilité de croisement des trajectoires issues de conditions initiales différentes, toute trajectoire partant dans le quadrant positif  $y$  restera à tout temps : le sens physique attribué à  $p$  et  $P$  cantonne donc toute l'étude à  $\mathbb{R}_+^2$ .

Il est facile de trouver les points fixes, notés  $p^*$  et  $P^*$  ; ils satisfont :

$$0 = \gamma p^* - ap^*P^* , \quad 0 = -\Gamma P^* + Ap^*P^* \iff (p^*, P^*) = (0, 0) , \left(\frac{\Gamma}{A}, \frac{\gamma}{a}\right) . \quad (5.47)$$

Ce point représente aux états stationnaires où les deux populations cohabitent harmonieusement dans l'équilibre.

Ceci étant acquis, il est utile de récrire le système (5.45) en  $y$  faisant figurer les coordonnées du point fixe non-nul ; compte tenu de (5.47), il vient :

$$\frac{dp}{dt} = ap(P^* - P) , \quad \frac{dP}{dt} = AP(p - p^*) . \quad (5.48)$$

La linéarisation autour du point fixe non-nul procède comme d'habitude ; on pose :

$$p = p^* + \delta p , \quad P = P^* + \delta P ; \quad (5.49)$$

le report dans les équations dynamiques en ne retenant que les termes linéaires dans les écarts donne :

$$\dot{\delta p} = -ap^*\delta P , \quad \dot{\delta P} = AP^*\delta p , \quad (5.50)$$

qui donne ( $\omega^2 = \gamma\Gamma$ ) :

$$\ddot{\delta p} = -\omega^2\delta p \iff \delta p(t) = \delta p(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \dot{\delta p}(0) \sin \omega t , \quad (5.51)$$

$$\ddot{\delta P} = -\omega^2\delta P \iff \delta P(t) = \delta P(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \dot{\delta P}(0) \sin \omega t . \quad (5.52)$$

Comme  $\dot{\delta p}(0) = -ap^*\delta P(0)$ ,  $\dot{\delta P}(0) = AP^*\delta(0)$ , il vient :

$$\delta p(t) = \delta p(0) \cos \omega t - \sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma} \frac{a}{A}} \delta P(0) \sin \omega t , \quad \delta P(t) = \delta P(0) \cos \omega t + \sqrt{\frac{\gamma}{\Gamma} \frac{A}{a}} \delta p(0) \sin \omega t . \quad (5.53)$$

Ces équations sont les équations paramétriques d'une ellipse (qui dégénère en un segment de droite si l'un des écarts est nul au départ). Ici, les écarts autour des points fixes ne croissent ni ne décroissent dans le temps mais oscillent indéfiniment, les trajectoires sont donc cycliques ; s'il y a bien des cycles, ce ne sont pas des cycles-limites au sens de ceux trouvés à propos de la bifurcation de Hopf (section 5.3, fig. 5.5). La période des cycles,  $\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma\Gamma}}$  est la moyenne harmonique des "périodes" d'extinction ou de croissance<sup>24</sup> de chacune des populations évoluant indépendamment de l'autre.

Comme mentionné plus haut, le portrait de phase complet exigerait des dessins dans un espace à 4 dimensions (!). Cependant, on peut se faire une idée des trajectoires en traçant le champ de vitesse (la vitesse a pour composante  $\dot{p}$  et  $\dot{P}$ ), représenté par des petites flèches tangentes aux trajectoires. L'écriture (5.48) montre immédiatement que  $\dot{p} > 0$  si  $P < P^*$ , négatif autrement, et que  $\dot{P} > 0$  si  $p < p^*$  et négatif autrement. La direction du vecteur vitesse dans les quatre quadrants autour du point fixe en résulte de suite et montre que les trajectoires s'enroulent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour du point fixe. On peut en outre montrer que ces trajectoires sont *fermées*, d'où il résulte que le mouvement est périodique. La fig. 5.8 donne un dessin précis des trajectoires, obtenu en portant  $p(t)$  et  $P(t)$  le long des axes de coordonnées, et en indiquant le vecteur vitesse sur une grille de points choisie un peu arbitrairement.

<sup>24</sup>au sens de *période radioactive*.

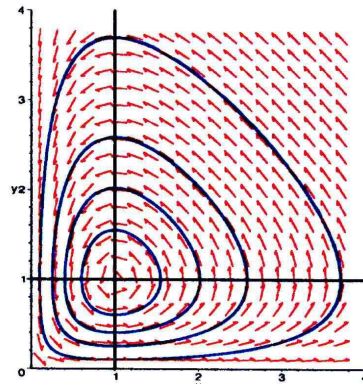


Figure 5.8: Champ de vitesse et trajectoires pour le modèle de Lotka - Volterra.

Pour finir, montrons qu’il existe une constante du mouvement. En posant  $\xi = \ln p$  et  $\varpi = \ln P$ , (5.45) s’écrit :

$$\frac{d\xi}{dt} = \gamma - ae^{\varpi} , \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\Gamma + Ae^{\xi} , \tag{5.54}$$

Essayons d’identifier ceci avec des équations de Hamilton, en cherchant un “Hamiltonien”  $H(\xi, \varpi)$  tel que  $\dot{\xi} = \partial_{\varpi} H$  et  $\dot{\varpi} = -\partial_{\xi} H$  – alors, la dérivée  $\frac{dH}{dt} \equiv \frac{\partial H}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial H}{\partial \varpi} \dot{\varpi}$  sera nulle par construction le long des trajectoires. De ceci et (5.54) on déduit d’abord  $H = \Gamma \xi - Ae^{\xi} + h(\varpi)$ , puis  $h' = \gamma - ae^{\varpi}$  d’où finalement :

$$H(\xi, \varpi) = \Gamma \xi + \gamma \varpi - Ae^{\xi} - ae^{\varpi} + K \iff \tilde{H}(p, P) = \Gamma \ln p + \gamma \ln P - Ap - aP + K , \tag{5.55}$$

où  $K$  est une constante qui ne jouera aucun rôle dans la suite. Par définition, la quantité  $\tilde{H}(p(t), P(t))$  est une *intégrale première* qui ne change pas au cours du temps : le mouvement a donc lieu sur la courbe d’équation cartésienne  $\tilde{H}(p, P) = \tilde{H}(p(0), P(0))$ , soit<sup>25</sup> :

$$\Gamma \ln p + \gamma \ln P - Ap - aP = \Gamma \ln p_0 + \gamma \ln P_0 - Ap_0 - aP_0 , \tag{5.56}$$

en notant simplement  $p_0$  et  $P_0$  les valeurs initiales. On peut ainsi récrire comme suit l’équation cartésienne de la trajectoire issue de  $p_0, P_0$  :

$$\Gamma \ln \frac{p}{p_0} + \gamma \ln \frac{P}{P_0} = A(p - p_0) + a(P - P_0) . \tag{5.57}$$

### 5.5.2 La réaction oscillante de Belousov-Zhabotinskii

Il s’agit d’une réaction chimique fort complexe, mettant en jeu en fait plusieurs équations cinétiques couplées<sup>26</sup>. Le caractère remarquable de cette réaction réside en ceci : une fois les réactifs mis en présence, et après un certain temps d’apparente inactivité, des oscillations de couleur entre rouge et bleu se produisent, des structures apparaissent sous forme de fronts. Au bout d’un certain temps, la réaction oscillante s’arrête et le système trouve un état d’équilibre.

La description détaillée repose sur l’écriture d’équations cinétiques décrivant la variation temporelle des concentrations des différents réactants. Par exemple, pour une réaction du genre :



<sup>25</sup>La constante  $K$  disparaît à ce stade.

<sup>26</sup>Pour les détails, voir *An Analysis of the Belousov-Zhabotinskii Reaction*, par Casey R. Gray (Calhoun High School, Port Lavaca, TX 77979 and The High School Summer Science Research Program, Department of Mathematics), disponible à [www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2002/vol13-n1/paper1/v3n1-1](http://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2002/vol13-n1/paper1/v3n1-1)

on écrit que les concentrations ( $c_X$  pour  $X, \dots$ ) satisfont :

$$\frac{dc_X}{dt} = k_{AB}c_Ac_B, \quad (5.59)$$

où  $k_{AB}$  est la constante de réaction. Les concentrations  $c_A$  et  $c_B$  satisfont de même d'autres équations cinétiques traduisant les mécanismes chimiques d'apparition et de disparition des espèces. Au total, on obtient un système d'équations non-linéaires, les non-linéarités étant présentes dans les produits de concentrations (par exemple  $c_Ac_B$  dans (5.59)).



Figure 5.9: Structures et couleurs de la réaction de Belousov-Zhabotinski (figure extraite de la référence donnée dans la note 26).

Pour la réaction BZ, un premier dégrossissage permet de se limiter à trois équations non linéaires, qu'il est en outre possible de simplifier compte tenu des valeurs numériques des diverses constantes de réaction. Il en résulte un système à deux variables, qui s'écrit comme suit :

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x(1-x) + \frac{f(q-x)}{q+x} y \equiv g(x, y) \quad (5.60)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y \quad (5.61)$$

$x$  et  $y$  désignent les concentrations de deux certains réactants,  $\varepsilon$ ,  $f$  et  $q$  sont des paramètres dont les valeurs numériques sont connues ;  $f$  est un nombre d'ordre 1, au contraire  $\varepsilon$  et  $q$  sont petits devant 1.

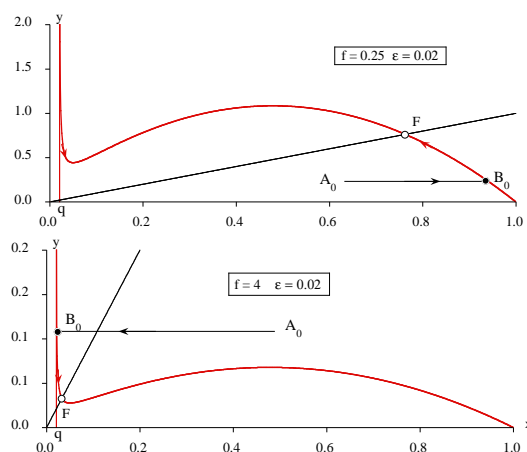


Figure 5.10: Cas où  $f$  est petit ou grand : courbes où les vitesses  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  s'annulent, et trajectoires schématiques prenant en compte le fait que  $\varepsilon \ll 1$ . Le point fixe n'étant pas entre les deux extrema, il n'apparaît pas d'oscillations de relaxation.

Le fait que  $\varepsilon$  soit très petit devant 1 permet de saisir les grands traits de la dynamique, au moins qualitativement. En effet, compte tenu de ceci, le second membre de (5.60) a envie de rester petit ; quand ce

n'est pas possible, alors la dérivée  $\frac{dx}{dt}$  doit prendre de grandes valeurs puisque  $\varepsilon \ll 1$ . On peut donc prévoir une variation *intermittente* de la concentration  $x$  : des périodes de quasi-repos séparées par des variations brutales. Là se tient l'origine des oscillations, qui ne ressemblent en rien aux oscillations d'un système du genre pendule, et que l'on appelle *oscillations de relaxation*.

Cette analyse intuitive peut être précisée en examinant dans le plan  $(x, y)$  les courbes où les deux seconds membres de (5.60) et (5.61) sont *strictement* nuls. Ces courbes sont tracées sur les figs. 5.10 et 5.11. La courbe sur laquelle  $\dot{x} = 0$  diverge en  $x = q \ll 1$ , a un minimum, puis un maximum et rejoint l'axe des abscisses en  $x = 1$  ; au-dessus de cette courbe,  $\dot{x} < 0$ , au-dessous,  $\dot{x} > 0$ . La dérivée  $\dot{y}$  s'annule sur la première bissectrice, est négative au-dessus, positive au-dessous. Comme les dérivées s'annulent sur ces courbes, le vecteur vitesse est soit horizontal, soit vertical à leur traversée, mais cette propriété n'est pas très visible quand  $\varepsilon \ll 1$ , ce qui est le cas ici. Dans tous les cas, il y a un point fixe, F, où le vecteur vitesse  $(\dot{x}, \dot{y})$  s'annule.

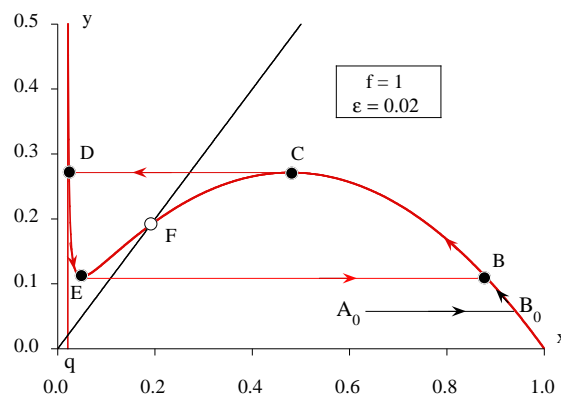


Figure 5.11: Identique à la fig. 5.10 avec  $f = 1$ .

Le mouvement est qualitativement différent selon que le point fixe F est situé entre les extrema (fig. 5.11) ou non (fig. 5.10). Dans ce dernier cas, et quand  $f$  est petit, (fig. 5.10 en haut) l'allure schématique des trajectoires s'obtient comme suit. Le système part d'un certain point  $A_0$ , où les deux concentrations  $x$  et  $y$  sont des nombres d'ordre 1, et alors, par (5.61), il en va de même pour la vitesse  $\dot{y}$ . Le second membre de (5.60) est lui aussi d'ordre 1, d'où  $\dot{x} \sim \frac{1}{\varepsilon}$  : le mouvement de  $x$  est donc beaucoup plus rapide que celui de  $y$ , ce qui se traduit par un arc de trajectoire pratiquement horizontal,  $A_0B_0$ . Une fois le point  $B_0$  atteint (où la vitesse est en fait verticale, mais ce n'est pas visible sur le dessin puisque  $\varepsilon \ll 1$ ), que fait la trajectoire ? En ajustant convenablement les paramètres, il est possible de faire en sorte que la dérivée  $\dot{x}$  soit finie, mais telle que la trajectoire reste en fait très proche de la courbe  $\dot{x} = 0$ . En effet, supposons que  $\dot{x} \sim \varepsilon^\lambda$ , avec  $\lambda > -1$ .  $x$  varie puisque sa dérivée n'est pas nulle (et elle est en fait négative puisque l'on est arrivé en  $B_0$  à la verticale), mais, le premier membre de (5.60) est d'ordre  $\varepsilon^{\lambda+1}$ , donc très petit : il en est de même pour le second membre, de sorte que la trajectoire est très voisine de la courbe  $\dot{x} = 0$ . Dès lors, le système se dirige vers le point fixe F ; il n'y arrive pas directement, mais s'enroule rapidement autour et le mouvement, de fait s'arrête. La même histoire se produit si  $f$  est grand (fig. 5.10 en bas) : dans ces deux cas le système relaxe de façon très banale.

Le mouvement change radicalement lorsque le point fixe est situé entre les deux *extrema* (fig. 5.11), ce qui se produit pour  $f$  voisin de 1. Les mêmes arguments que ci-dessus montrent que, partant de  $A_0$ , la trajectoire est le segment (presque) horizontal  $A_0B_0$ , puis monte en restant à proximité de l'arc AC. Au point C, on a à la fois  $\dot{x} = 0$  et  $\frac{dy}{dx} = 0$ , ce qui signifie que  $y$  va varier infiniment moins vite que  $x$  : il en résulte que la trajectoire va filer à toute vitesse vers le point D, presque à l'horizontale (à nouveau,  $x$  et  $y$  sont d'ordre 1, donc la dérivée  $\dot{x}$  est très grande). Arrivé en D, le système redescend de D vers E ; au minimum en E, le même phénomène qu'en C se produit, et la trajectoire file vers D. Au total, le mouvement est cyclique (pas tout à fait), les concentrations  $x$  et  $y$  présentant des variations rapides (montée puis descente) survenant à intervalles réguliers (voir fig. 5.12).

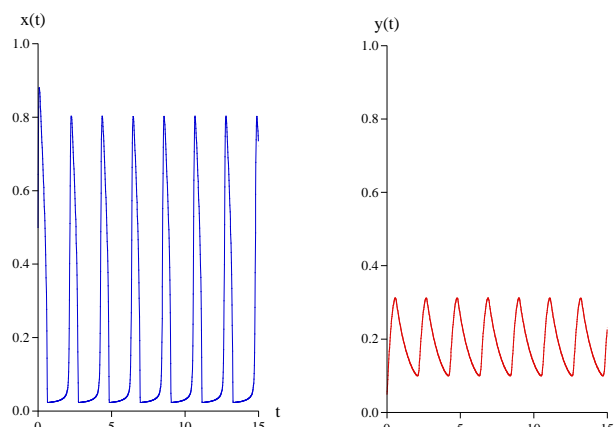


Figure 5.12: Variations typiques des concentrations  $x(t)$  et  $y(t)$  dans le régime d'oscillations de relaxation ( $\varepsilon = 0.02$ ,  $q = 0.02$ ,  $f = 1$ ,  $x(0) = 0.5$ ,  $y(0) = 0.05$ ).

Les courbes de la fig. 5.12 sont les résultats de l'intégration numérique de (5.60) et (5.61). La comparaison de ces courbes avec les cycles approximatifs représentés sur la fig. 5.11 montre que l'accord est satisfaisant.

## 5.6 Variables discrètes. Applications récursives (itérations)

### 5.6.1 Variables discrètes *vs* variables continues

Les exemples détaillés ci-dessus pour illustrer quelques notions importantes concernaient des variables exprimables comme fonctions continues du paramètre  $t$ . Tout en maintenant l'interprétation de  $t$  comme le temps, les choses se présentent souvent autrement. Par exemple, on peut décider d'observer un phénomène à intervalles réguliers, à des instants  $t_n = n\Delta t$ , où  $\Delta t$  est fini (autrement dit, on *stroboscope* le phénomène), comme c'est le cas quand on observe une population en considérant les générations successives, ou des variations annuelles.

En fait, en Physique, il en va toujours ainsi lors de toute mesure : que le paramètre soit le temps ou tout autre grandeur  $x$ , la résolution est toujours finie ; s'agissant de mesurer une grandeur  $f$  qui, idéalement, est supposée être une certaine fonction de la variable  $x$  ( $f \equiv f(x)$ ), ce que l'on mesure en fait est une suite de valeurs  $f_n$  pour des valeurs discrètes  $x_n$  appartenant à une certaine grille, par exemple  $x_n = n\Delta x$ . On peut admettre raisonnablement (sauf si l'expérience rate complètement son objectif !) que  $f_n$  est une sorte de valeur moyenne de la fonction inconnue  $f(x)$  sur l'intervalle  $[x_n - \frac{\Delta x}{2}, x_n + \frac{\Delta x}{2}]$  ; si  $f$  est à variation lente, on a même envie d'aller jusqu'à l'identification pure et simple et écrire  $f(x = x_n) = f_n$ . En définitive, en Physique, ce sont donc les variables discrètes qui apparaissent en premier, leur "continuation" relevant d'un saut conceptuel qui est la règle dans le domaine classique (non-quantique).

En réalité, le même type de question se pose dans d'autres contextes. Par exemple, s'agissant de résoudre numériquement une équation (différentielle, intégro-différentielle, aux dérivées partielles, ...) avec un ordinateur, force est d'introduire une grille de points pour approximer les variables continues, ce qui pose d'ailleurs de sérieuses questions lorsque les équations ne sont pas linéaires (voir – notamment ! – la Remarque ci-dessous p. 121). Bien sûr, on a envie d'augmenter le nombre de *pixels*, mais d'une part il y a toujours un coût à payer (temps de calcul, ...) , d'autre part la question (grave) de l'adéquation d'un formalisme discret à représenter le continu reste toujours posée.

En pratique, on rencontre le plus souvent deux sortes d'équations. Les unes sont *différentielles*, au sens

où elles mettent en jeu une fonction et les valeurs de cette fonction en des points infiniment proches<sup>27</sup>. Les autres sont *aux différences*, dans la mesure où on y trouve une fonction prise pour des valeurs de sa variable situées à distance *finie* les unes des autres. Une relation de récurrence est le type même d'équation aux différences.

Il est possible d'établir les règles d'un jeu permettant d'associer de façon biunivoque une équation aux différences à une équation différentielle, et inversement. Étant donné une fonction  $f(x)$ , convenons d'appeler  $f_n$  les valeurs prises par cette fonction aux points  $x_n = n\Delta x$ , où  $\Delta x$  est un intervalle fixe choisi une fois pour toutes. Alors, la *dérivée discrète*,  $Df_n$  peut se définir comme :

$$\boxed{Df_n \stackrel{\text{déf}}{=} f_{n+1} - f_n} \quad (5.62)$$

Ceci étant posé, la dérivée seconde discrète est :

$$D^2 f_n = f_{n+2} - f_{n+1} - (f_{n+1} - f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n . \quad (5.63)$$

et ainsi de suite. Pour la dérivée d'ordre  $p$  :

$$\boxed{D^p f_n = \sum_{q=0}^p (-1)^q C_p^q f_{n+p-q}} \quad (5.64)$$

Dès lors, la correspondance entre équations différentielle et aux différences se fait avec le “dictionnaire” :

$$n \longleftrightarrow x, \quad f_n \longleftrightarrow f(x), \quad Df_n \equiv f_{n+1} - f_n \longleftrightarrow f'(x), \quad D^2 f_n \equiv f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n \longleftrightarrow f''(x) \dots \quad (5.65)$$

Pour tout dire, ce jeu de transition entre formalismes discret et continu est l'un des favoris du Physicien. Par exemple, c'est lui qui permet, partant d'une chaîne de boules et de ressorts obéissant aux équations<sup>28</sup> :

$$\boxed{m\ddot{u}_n(t) = -k(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})} \quad (5.66)$$

d'obtenir dans la “limite continue” :

$$\boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (5.67)$$

où la valeur de  $u(x, t)$  est l'écart à l'équilibre à l'instant  $t$  de la bille ponctuelle située en  $x$ . (5.67) est l'équation de propagation des ondes des déplacements le long de la chaîne. Notons qu'on reste ici dans un cadre strictement linéaire, où aucun canular n'est à craindre du fait du passage au continu. Par ailleurs, le choix du continu est justifié quand on décide de regarder la chaîne de loin, c'est-à-dire lorsque la distance d'équilibre  $a$  entre deux boules voisines est hors de portée de l'expérience, ou tout simplement non pertinente vis-à-vis de la question théorique posée.

De la même façon, pour décrire une réaction chimique en champ moyen<sup>29</sup> où une espèce (concentration  $C$ ) se crée par parthénogénèse et s'auto-détruit, on écrit en temps continu :

$$\frac{dC}{dt} = aC(t) - bC^2(t) \quad (a, b > 0) . \quad (5.68)$$

Dans une perception stroboscopique du temps, seule la concentration  $c_n$  à des instants  $n\Delta t$  est pertinente ; la version discrète de (5.68) est :

$$c_{n+1} - c_n = \alpha c_n - \beta c_n^2 \iff c_{n+1} = (\alpha + 1)c_n - \beta c_n^2 . \quad (5.69)$$

Si la règle du jeu est fixée – et établit donc une relation biunivoque entre les deux types d'équations –, rien toutefois ne permet de dire *a priori* que la fonction  $C(t)$  déduite de (5.68) coïncide ponctuellement avec la

<sup>27</sup>La discussion écarte le cas des équations intégrales. Il existe aussi des équations qui sont à la fois différentielles et aux différences, par exemple  $f'(x) - \lambda f(x - x_0) = 0$ .

<sup>28</sup> $u_n$  est l'écart à la position d'équilibre  $x_{\text{eq}n} = na$  de la  $n^{\text{ème}}$  boule.

<sup>29</sup>Une équation de ce type a été introduite par Verhulst vers 1830 pour décrire l'évolution d'une population dont le taux de fertilité décroît quand le nombre d'individus augmente, en conséquence de la limitation des ressources. Pierre-François Verhulst (1804-1849) s'est intéressé (à la suite d'Euler) à la description mathématique de l'évolution des populations.

suite discrète des  $c_n$ , une fois établie la relation entre les couples de paramètres  $(a, b)$  et  $(\alpha, \beta)$ . L'exemple choisi est d'ailleurs une source de méditation (ou de perplexité, c'est comme on le sent), car précisément les deux versions, discrète et continu, ne sauraient ici constituer deux façons techniquement différentes d'exprimer le même problème : les résultats des deux formalismes sont si différents que ceux-ci ne sauraient être utilisés indifféremment pour décrire un même problème physique.

En effet, redéfinissant  $\tilde{c}_n = \frac{\beta}{\alpha+1}c_n$  et  $A = \alpha + 1$ , (5.69) s'écrit :

$$\tilde{c}_{n+1} = A\tilde{c}_n(1 - \tilde{c}_n) . \quad (5.70)$$

Cette récurrence très simple sera l'objet d'une étude détaillée par la suite (sous-section 5.6.3) ; en dépit de son extrême simplicité (on peut presque dire que c'est l'équation non-linéaire *minimale*), elle possède une richesse stupéfiante, justifiant qu'elle soit devenue depuis une trentaine d'années pour les systèmes dynamiques ce que la *Mouche du vinaigre* (nom savant : *Drosophile*) est pour la Biologie depuis très longtemps. Ceci étant affirmé par anticipation, on peut d'ores et déjà réaliser que les deux équations (5.68) et (5.70), en dépit de leur similitude, sont de nature très différentes ; la solution de (5.68) est :

$$C(t) = \frac{e^{at}}{1 + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)} C(0) \quad (5.71)$$

et ne possède aucune propriété remarquable : quels que soient  $a$  et  $b$  positifs, la concentration tend vers la limite  $\frac{a}{b}$ , quelle que soit sa valeur initiale, limite pratiquement atteinte au bout de  $t \gtrsim \frac{1}{a}$ . Si l'équation continue est finalement très banale, sa version discrète (5.70) permet d'aller de surprise en surprise (voir section 5.6.3), au point de fournir l'un des scénarios standards de la transition vers le chaos déterministe. . .

On peut certes contester le lien de parenté défini par les règles (5.65)<sup>30</sup> et donc relativiser les différences spectaculaires entre équations différentielles et équations aux différences. Il n'en demeure pas moins vrai que, s'agissant d'équations non-linéaires, la transformation discret  $\longleftrightarrow$  continu n'est *jamais* anodine. Nul ne peut jamais affirmer la quasi-identité entre les valeurs moyennes d'une fonction sur un intervalle fini et la fonction elle-même. Après tout, on connaît des fonctions continues qui ne sont nulle part dérivables (e.g. fonction de Weierstrass), obtenues en tant que limite d'une suite de sommes partielles de fonctions continues dérivables ; toute approximation (série tronquée à un rang élevé) est encore une fonction continue dérivable, dont la dérivée est d'une extrême variabilité. Qui songerait, ayant "mesuré" cette dérivée, à assimiler les valeurs discrètes trouvées et la fonction elle-même ?!

◆ *Remarque*

Ainsi, alors que pour les équations linéaires, les versions discrète et continue donnent essentiellement les mêmes solutions, ceci n'est jamais assuré lorsque l'équation est non-linéaire : l'isomorphisme établi entre les unes et les autres grâce à (5.65) ne préjuge en rien des propriétés comparées des deux sortes d'équations.

En particulier, alors que les équations différentielles non-linéaires peuvent présenter des singularités spontanées (voir section 5.2), il n'en est rien pour les équations aux différences. Par exemple, soit l'équation  $f' = f^2 - f$ , avec  $f(0) = 2$  ; la solution est  $f(x) = \frac{2}{2-e^x}$ , qui diverge en  $x = \ln 2$ . D'après (5.65), l'équation aux différences correspondante est  $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n$ , avec  $a_0 = 2$ , et la solution est<sup>31</sup>  $a_n = 2^{2^n}$ , qui est finie partout. Le tracé précis de  $f(x)$  et des  $a_n$  montre que ces deux objets sont radicalement différents (voir fig. 5.13).

La plus grande prudence est donc de règle quand on substitue une équation à une autre. . . L'exemple I. détaillé dans la sous-section 5.6.3 s'en veut une illustration.

<sup>30</sup>Après tout, quand on fait par exemple un Runge - Kutta, le développement ne se limite pas à  $f(t + \Delta t) = f(t) + a\Delta t$  . . .

<sup>31</sup>On la trouve en posant  $b_n = \log_2 a_n$ .

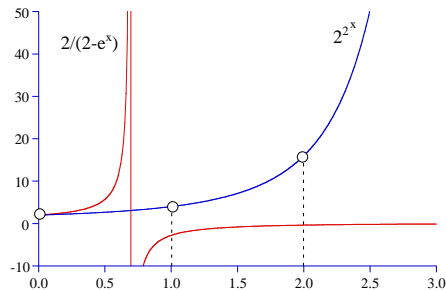


Figure 5.13: Comparaison des solutions de l'équation différentielle  $f' = f^2 - f$ , ( $f(0) = 2$ ) et de l'équation aux différences associée  $a_{n+1} = a_n^2$ , ( $a_0 = 2$ ) – voir texte.

## 5.6.2 Points fixes. Stabilité

Soit une application itérative :

$$\boxed{x_{n+1} = f(x_n)} \quad (5.72)$$

permettant d'engendrer une suite  $\{x_n\}$ , une fois connu un  $x_0$  de départ. Sauf mention contraire, la fonction  $f(x)$  est supposée posséder toutes les propriétés de continuité et de dérivabilité souhaitables ; on verra que les propriétés extraordinaires (et, pour tout dire, stupéfiantes) de certaines applications itératives ne tiennent nullement à l'exotisme de  $f(x)$ ...

Un *point fixe* d'une application itérative telle que (5.72) est le pendant de l'état statique pour une équation différentielle : c'est une valeur de  $x$  qui ne change pas quand on lui applique  $f$ , tout comme l'application différentielle produit une dérivée nulle. Pour un point fixe,  $x^*$ , on a donc par définition :

$$\boxed{x^* = f(x^*)} \quad (5.73)$$

À titre d'illustration, soit la<sup>32</sup> récursion linéaire introduite dans le ch. 1 comme exemple de suite :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad (5.74)$$

en choisissant<sup>33</sup>  $F_0 = F_1 = 1$ , ce qui assure automatiquement que tous les  $F_n$  sont positifs. Si on définit  $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ , les  $x_n$  satisfont :

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \iff x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad (5.75)$$

et sont les éléments d'une suite positive croissante. Pour trouver le(s) point(s) fixe(s), on écrit :

$$x^* = f(x^*) \iff x^* = 1 + \frac{1}{x^*} \iff x^{*2} - x^* - 1 = 0. \quad (5.76)$$

L'équation du second degré a pour racines  $x_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$  ; la racine positive est l'illustissime nombre d'or, usuellement noté  $\tau$  (*golden ratio*, ou parfois par abus *golden mean*) :

$$\boxed{\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618\dots} \quad (5.77)$$

est la limite de la suite  $x_n$  (l'autre racine est égale à  $-\frac{1}{\tau}$  ; négative, elle ne saurait être la limite de la suite positive définie ci-dessus).



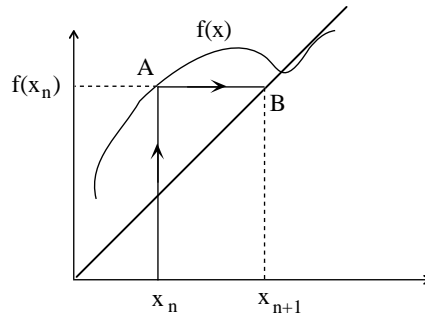


Figure 5.14: Construction géométrique de  $x_{n+1}$  à partir de  $x_n$ .

L'itération (5.72) a une illustration géométrique simple, montrant comment la suite des  $x_n$  se construit de proche en proche. En montant à la verticale du point d'abscisse  $x_n$ , on rencontre la courbe  $f(x)$  en un point A, dont l'ordonnée est par définition  $f(x_n)$ , soit  $x_{n+1}$ . En partant alors à l'horizontale du bon côté, on rencontre la première bissectrice en B, point dont l'ordonnée est égale par construction à  $x_{n+1}$  ; comme B est sur la première bissectrice, son abscisse est égale à son ordonnée : le point de l'axe  $Ox$  à la verticale de B a donc pour abscisse le terme suivant de la récurrence, soit  $x_{n+1}$ , et ainsi de suite. D'autres constructions sont données à titre d'exemple sur la fig. 5.15. À nouveau, la succession des  $x_n$  représente le *flot* de la récursion (5.72).

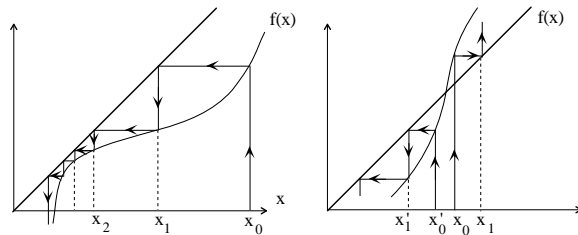


Figure 5.15: Deux exemples de suites récurrentes. À droite, deux “trajectoires” issues de deux points de départ distincts  $x_0$  et  $x'_0$ .

Les points fixes, quand ils existent, sont clairement les intersections de la courbe représentant  $f(x)$  avec la première bissectrice. La fig. 5.15 à gauche donne un exemple de suite sans point fixe ; à droite, il y en a bien un, d'abscisse  $x^*$ , mais toutes les trajectoires s'en écartent (sauf bien sûr celle partant précisément de  $x_0 = x^*$ ). À nouveau, la notion de *stabilité* apparaît naturellement, comme pour la bille déposée soit au sommet, soit en un creux de potentiel. Géométriquement, on devine que tout dépend de la valeur de la dérivée  $f'(x)$  calculée au point fixe, plus grande ou plus petite que 1 en module, mais ceci peut s'établir très simplement. Plaçons-nous au voisinage de  $x^*$  et posons  $x_n = x^* + \delta_n$ ,  $x_{n+1} = x^* + \delta_{n+1}$  où  $\delta_n$  est arbitrairement petit – et alors  $\delta_{n+1}$  l'est aussi si  $f(x)$  est dérivable à souhait (analytique est ce que l'on peut rêver de mieux). On a alors :

$$x_{n+1} = f(x_n) \iff x^* + \delta_{n+1} = f(x^* + \delta_n) = f(x^*) + \delta_n f'(x^*) + \mathcal{O}(\delta_n^2) ; \tag{5.78}$$

comme  $f(x^*) = x^*$ , il reste :

$$\delta_{n+1} = \delta_n f'(x^*) + \mathcal{O}(\delta_n^2) \iff \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = f'(x^*) + \mathcal{O}(\delta_n) . \tag{5.79}$$

<sup>32</sup>La suite de Fibonacci est unique (elle est définie par (5.74) avec  $F_0 = F_1 = 1$ ), mais il existe autant qu'on veut de séquences  $\{F_n\}$ , obtenues en variant les conditions initiales  $F_0$  et  $F_1$ .

<sup>33</sup>La récurrence (5.74) étant d'ordre deux, il faut deux conditions supplémentaires (“conditions initiales”).

Il en résulte que si  $|f'(x^*)| > 1$ , les écarts vont croître en valeur absolue et les  $x_n$  voisins de  $x^*$  vont s'éloigner du point fixe, soit en tournant autour, soit de façon uniforme ; un tel point fixe est donc instable. Au contraire, si  $|f'(x^*)| < 1$ , les  $\delta_n$  vont décroître en module et les  $x_n$  se rapprochent de  $x^*$ . Si  $0 < f'(x^*) < 1$ , les écarts décroissent et sont de même signe : la suite converge vers  $x^*$  de façon monotone, la trajectoire se dirige directement vers le point fixe ; si  $-1 < f'(x^*) < 0$ , les  $\delta_n$  alternent en signe, la trajectoire s'enroule autour du point fixe. Dans ces deux cas, le point fixe est stable (c'est un point *attracteur*). Enfin, si  $f'(x^*) = 1$ , il faut aller à l'ordre suivant et c'est le signe de  $f''(x^*)$  qui prévaut ; des petits dessins permettent de voir ce qui se passe dans les différents cas.

Il est bien clair que l'analyse ci-dessus est fondamentalement *linéaire* (on a négligé les termes  $\sim \delta_n^{p \geq 2}$ ) et permet seulement de conclure sur le comportement de la trajectoire *au voisinage* du point fixe : on ne sait rien de ce qui se passe à distance finie du point fixe.

### 5.6.3 Exemples d'applications itératives

#### I. Résolution numérique d'une relation fonctionnelle non-linéaire

On a déjà mentionné l'apparition naturelle des itérations lors de la résolution numérique d'équations à l'aide d'une machine. L'exemple<sup>34</sup> qui suit est une illustration spectaculaire du caractère parfois imprévisible (et déroutant) des équations non linéaires, et constitue un exemple de canular auquel peut conduire l'utilisation irréfléchie d'une itération numérique – même lorsque les équations sont finalement très simples, structurellement et dans leurs détails.

Soit à résoudre l'équation différentielle non-linéaire :

$$f'(x) = \frac{f(x)^2}{1 - xf(x)}, \quad f(0) = 1. \quad (5.80)$$

Commençons par chercher la solution sous la forme d'une série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n ; \quad (5.81)$$

un joli exercice permet de trouver les coefficients<sup>35</sup> :

$$c_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}, \quad (5.82)$$

et d'obtenir le rayon de convergence  $R$  de la série par la règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n x \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = ex \iff R = \frac{1}{e}. \quad (5.83)$$

On peut donc affirmer que  $f(x)$  possède une singularité (spontanée) à une distance  $\frac{1}{e}$  de l'origine, située sur l'axe réel puisque tout est réel ; pour l'instant on ne peut guère en dire davantage.

Ce problème peut être pris d'une tout autre façon en remarquant que la fonction  $f$  satisfait l'équation :

$$f(x) = e^{xf(x)}. \quad (5.84)$$

<sup>34</sup>Ce superbe exemple est dû à C.M. Bender et S.A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, ch4, exemple 2 (McGrawHill, 1984).

<sup>35</sup>S'agissant d'une équation non-linéaire, il est assez exceptionnel de savoir obtenir l'expression des coefficients de la série.

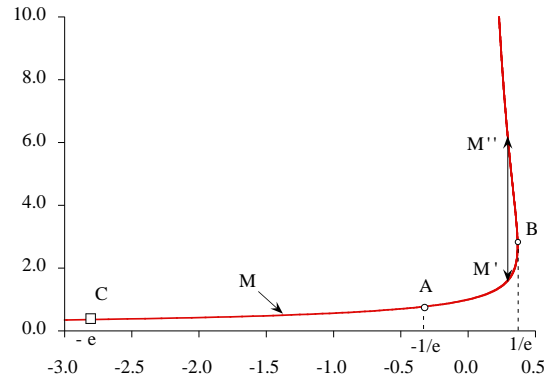


Figure 5.16: Solution de (5.80) ; noter que la fonction est bivaluée si  $x \in ]0, \frac{1}{e}]$ . La série entière (5.81) ne converge que dans l'intervalle  $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ . La singularité visible en  $x = \frac{1}{e}$  (pente infinie) est aussi le départ de la deuxième branche. Enfin, pour  $x < -e$ , la récurrence (5.85) est incapable de donner la solution.

En effet, de cette relation, on déduit  $f'(x) = [f(x) + xf'(x)]e^{xf(x)}$ , soit  $f'(x) = [f(x) + xf'(x)]f(x)$ , qui reproduit (5.80). Le réflexe usuel<sup>36</sup> pour résoudre une équation telle que (5.84) est de chercher  $f(x)$  en tant que limite de la suite  $f_n(x)$  définie par l'itération :

$$f_{n+1}(x) = e^{xf_n(x)} \equiv \Phi(f_n(x); x) . \tag{5.85}$$

En effet, si la limite existe, elle satisfait (5.84) en tant que point fixe d'une récursion. On va voir que pour  $-e \leq x \leq \frac{1}{e}$ , cette limite est bien la solution de (5.80). En revanche, si  $x < -e$ , la suite "a deux limites" (!?) – voir ci-dessous –, aucune ne satisfaisant (5.84), alors que l'équation fonctionnelle a bel et bien une solution  $\forall x \leq \frac{1}{e}$  : une résolution numérique exploitant (5.85) ne peut donc pas trouver  $f(x)$  complètement, même si l'observation des oscillations permet de signaler un problème – à résoudre d'une autre façon. La confiance aveugle dans une procédure numérique peut ainsi faire manquer la cible, passer à côté des solutions et conduire à des conclusions (partiellement) erronées.

Étudions maintenant plus précisément l'itération (5.85) suivant les méthodes expliquées plus haut. Ici, il s'agit de tracer la fonction  $\phi(y; x) = e^{xy} - y$  – où  $x$  joue le rôle d'un paramètre – en fonction de  $y$ , et d'examiner son intersection avec la première bissectrice. Visiblement, il convient de distinguer les deux cas  $x > 0$  et  $x < 0$ .

1.  $x > 0$

Dans ce cas, quand  $x$  décroît à partir d'une grande valeur, l'exponentielle  $e^{xy}$  s'incline vers la première bissectrice. Le contact se produit quand celle-ci devient la tangente à l'exponentielle, soit quand la fonction  $F$  définie comme  $F(y) \stackrel{\text{def}}{=} e^{xy} - y$  et sa dérivée  $F'(y)$  s'annulent simultanément. Il faut donc avoir à la fois  $e^{xy} - y = 0$  et  $xe^{xy} - 1 = 0$ , soit  $xy = 1$  et  $y = e$ , qui donne  $x = \frac{1}{e}$ . D'où :

- (a)  $x > \frac{1}{e}$  : il n'y a pas de point fixe, ce que l'on interprète pour l'instant comme l'inexistence de  $f(x)$  pour  $x > \frac{1}{e}$
- (b)  $0 < x < \frac{1}{e}$  : il y a deux points fixes ( $M'$  et  $M''$  sur la fig. 5.17). On voit géométriquement que la pente (toujours positive) est plus grande que 1 en  $M''$ , plus petite que 1 en  $M'$  ;  $M''$  est donc instable,  $M'$  est stable. L'itération (5.85) donne donc pour chaque  $x$  dans cet intervalle un certain point fixe  $f^*$  (abscisse de  $M'$ ), qui est la valeur de la solution  $f$  de (5.84) au point  $x$ . En revanche, elle ne peut fournir *aussi* la valeur associée à  $M''$  – la méthode itérative "rate" donc le fait que la fonction  $f(x)$  est bivaluée dans l'intervalle  $x \in [0, \frac{1}{e}]$ . . . On note également que pour tout point de départ

<sup>36</sup>Le lecteur avisé aura déjà réalisé que l'exercice est en un sens très académique : pour savoir à quoi ressemble la solution de (5.84), il suffit de l'inverser en prenant les logarithmes, ce qui donne  $x = \frac{\ln y}{y} \equiv \phi(y)$ . Le graphe de  $f(x) \equiv \phi^{-1}(x)$  s'obtient en prenant la courbe symétrique par rapport à la première bissectrice – voir fig. 5.16.

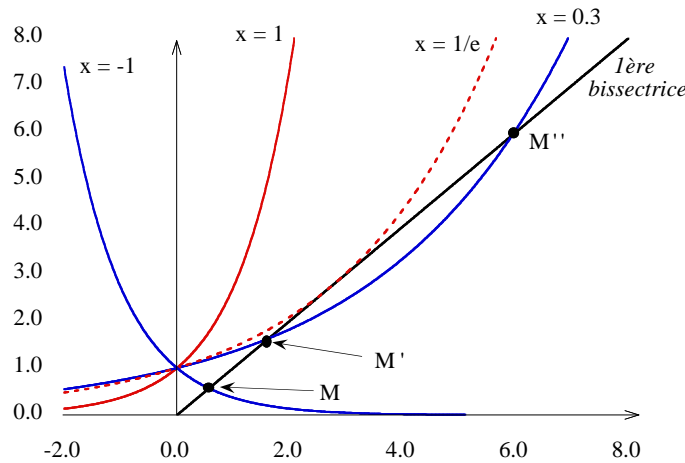


Figure 5.17: Lorsque  $x > \frac{1}{e} = 0.367794\dots$ , il n'y a pas d'intersection avec la première bissectrice. Pour  $0 < x < \frac{1}{e}$ , il existe deux points fixes, M' et M'' ; M' est stable, M'' est instable. Enfin, pour  $x < 0$ , il y a un point fixe, M, qui est stable tant que  $x > -e$ .

$f_0$  inférieur à l'abscisse de M'', l'itération converge vers la valeur  $f^*$  (abscisse de M') : ceci définit le bassin d'attraction de  $f^*$ , caractérisé par le fait que l'itération converge quelle que soit la condition initiale (ensemble des points pour lesquels il n'y a pas de sensibilité aux conditions initiales)

2.  $x < 0$

Pour  $x$  négatif, il y a toujours un point fixe, M sur la fig. 5.17. Ce point n'est stable que si la dérivée  $\frac{d}{dy}e^{xy}$  (visiblement négative) est plus petite que 1 en module. Au point fixe, on a  $e^{xf^*} = f^*$  ; la dérivée est  $xe^{xf^*}$  et vaut donc  $xf^*$  : le point devient instable si  $xf^* = -1$ , soit  $f^* = e^{-1}$ , c'est-à-dire  $x = -e$ .

Il en résulte que la récurrence (5.85) ne peut pas fournir la solution de la relation fonctionnelle (5.84) quand  $x < -e$  : l'algorithme devient totalement inefficace, et peut même faire induire en erreur (conclure qu'il n'y a pas de solution pour  $x < -e$  ?)

Ceci étant, si le point fixe devient instable à gauche de  $x = -e$ , on observe numériquement que la suite des  $f_n$  engendrée par (5.85) se met alors à osciller entre deux valeurs – en parlant de façon désinvolte, il apparaît que cette suite “a deux limites”. Ce phénomène remarquable (que l'on retrouvera dans toute sa splendeur à propos de l'application logistique) se comprend de la façon suivante.

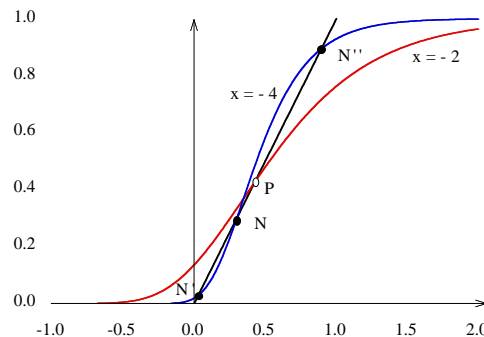


Figure 5.18: Points fixes de l'application itérée une fois, (5.86). Pour  $-e < x < 0$ , il y a un point fixe, P, qui est stable. Pour  $x < -e$ , trois points fixes apparaissent ; N est instable, N' et N'' sont stables. La récurrence produit à long terme une oscillation entre les deux valeurs associées à N' et N'' : l'algorithme ne converge pas.

Considérons l'application itérée une fois de plus, c'est-à-dire analysons la suite des  $\tilde{f}_n$  telle que :

$$\tilde{f}_{n+1}(x) = e^{x e^{x \tilde{f}_n(x)}}, \quad (5.86)$$

que l'on peut aussi définir comme :

$$f_{n+2}(x) = \Phi[\Phi(f_n(x); x); x] \equiv (\Phi \circ \Phi)(f_n(x); x). \quad (5.87)$$

On peut alors utiliser pour  $\Phi \circ \Phi$  les mêmes méthodes que précédemment (voir fig. 5.18). Cette figure montre que l'application itérée possède deux points fixes stables  $N'$  et  $N''$  dès que  $x$  devient inférieur à  $-e$ . Ceci explique pourquoi l'itération (5.85) ne converge pas, mais à long terme donne une oscillation entre deux valeurs (cycle d'ordre deux) – ici encore on peut parler de bifurcation, comme le schématise qualitativement le dessin de la fig. 5.19. Notons qu'aucun de ces deux points fixes ne satisfait l'équation fonctionnelle (5.84),... qui est pourtant celle que l'on cherche à résoudre !

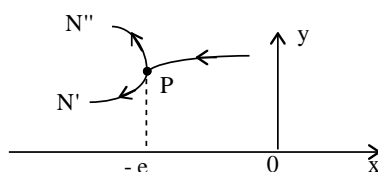


Figure 5.19: Bifurcation de la récurrence itérée (5.86).

## II. Itération logistique

À tout seigneur, tout honneur : comme dernier exemple d'application discrète, on analyse l'application dite *logistique* (*logistic map* en anglais), qui est la version discrète du modèle de Verhulst (voir p. 120), et s'écrit :

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \iff x_{n+1} = f(x_n), \quad f(x) = ax(1 - x) \quad (5.88)$$

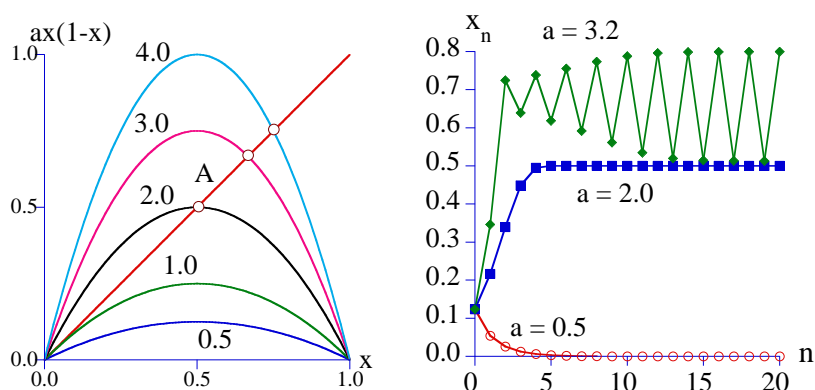


Figure 5.20: à gauche : graphe de l'application logistique  $f$  pour  $a = 0.5, 1, 2, 3, 4$ . À droite, trois exemples de "trajectoires" partant du même point  $x_0 = 0.1234567890$ , pour  $a = 0.5$ ,  $a = 2.0$  et  $a = 3.2$ .

C'est sans doute l'itération non-linéaire la plus simple que l'on puisse concevoir, la non-linéarité étant juste présente par le terme quadratique  $x_n^2$  – pourtant, on ira de surprise en surprise.  $a$  est supposé positif et  $x$  est pris

dans l'intervalle  $[0, 1]$ , et  $f$  est une application (non-inversible)  $[0, 1] \rightarrow [0, \frac{a}{4}]$  La fig. 5.20 donne (à gauche) l'allure de  $f$ , difficile de faire plus ordinaire ! Pourtant, sauf pour  $a = \pm 2$  et  $a = 4$ , on ne sait pas aujourd'hui écrire<sup>37</sup> $x_n$  en fonction de  $x_0$ ...

Comme toujours, il faut se donner une valeur de départ,  $x_0$ . Celle-ci étant fixée, on peut construire une trajectoire, comme indiqué sur la fig. 5.20 (à droite), évidemment paramétrée par  $a$  ; les deux exemples montrés ( $x_0 = 0.123456789$  et  $a = 0.5, 3.0$ ) lèvent une partie du voile : pour  $a$  petit, la trajectoire converge, pour  $a$  nettement plus grand, la trajectoire oscille.

Le plus souvent, on s'intéresse au comportement du système à long terme, entièrement conditionné par le nombre et la nature des points fixes  $x^*$ , qui sont les solutions de  $x^* = ax^*(1 - x^*)$ , soit  $x^* = 0$  ou  $a(1 - x^*) = 1$ . Le point fixe d'abscisse nulle, présent  $\forall a$ , est omis dans toute la suite (il n'a guère d'intérêt), et on retient seulement :

$$a(1 - x^*) = 1 \iff x_1^* = \frac{a - 1}{a} = 1 - \frac{1}{a} \tag{5.90}$$

Comme on ne considère que les valeurs de  $x$  dans  $[0, 1]$ , ce point fixe n'existe que si  $a > 1$  : une (première) bifurcation se produit donc en  $a = 1$  ; pour  $a \leq 1$ , le seul point fixe est le point fixe trivial  $x_0^* = 0$ , pour  $a \geq 1$ , un point fixe apparaît en  $x_1^*$  ; sur la fig. 5.20 (à gauche), on voit que son abscisse augmente avec  $a$ , la pente de  $f(x)$  en ce point étant d'abord positive ( $1 < a < 2$ ), puis nulle en  $a = 2$ , et enfin négative au-delà. Précisément,

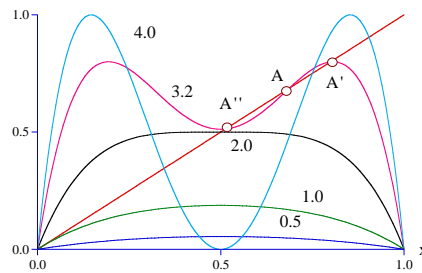


Figure 5.21: Application logistique  $f$  itérée,  $f \circ f$ . Les points fixes  $A'$  et  $A''$  sont stables,  $A$  est instable.

pour examiner la stabilité de  $x_1^*$ , on calcule  $f'(x_1^*)$  :

$$f'(x) = a(1 - 2x) \iff f'(x_1^*) = a(1 - 2\frac{a-1}{a}) = -a + 2 . \tag{5.91}$$

Quand  $1 < a < 2$ ,  $f'(x_1^*) > 0$ , et la condition de stabilité<sup>38</sup> s'énonce  $-a + 2 < 1$ , soit  $a > 1$ , ce qui est toujours vrai ici (d'ailleurs, on voit bien sur la fig. 5.20 que la tangente est toujours en dessous de la parallèle à la première bissectrice). Quand  $a > 2$ , la condition de stabilité s'écrit  $a - 2 < 1$ , soit  $a < 3$  : au total,  $x_1^*$  est stable si  $1 < a < 3$ , instable si  $a > 3$  – pour  $a = 3$ , l'analyse de stabilité (linéaire) ne permet pas de conclure.

Justement, pour  $a = 3.2$ , la fig. 5.20 (à droite) montre que, rapidement, les  $x_n$  se mettent à osciller entre deux valeurs ; le même scénario que celui rencontré dans l'exemple I. ci-dessus p. 124 semble se dessiner, et va se confirmer : l'oscillation entre deux valeurs atteste d'une convergence de la suite obtenue en composant  $f$  avec elle-même, ce qui relie directement  $x_n$  à  $x_{n+2}$  (fig. 5.21) :

$$x_{n+2} = f[f(x_n)] , \tag{5.92}$$

<sup>37</sup>Par exemple, pour  $a = 2$ , la solution est :

$$x_n = \frac{1}{2} [1 - e^{2^n \ln(1-2x_0)}] . \tag{5.89}$$

<sup>38</sup>qui est toujours  $|f'(x^*)| < 1$ .

ce qui implique la fonction  $f_2(x)$  :

$$x \longrightarrow f_2(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f[f(x)] \equiv (f \circ f)(x) = a[ax(1-x)][1-ax(1-x)] , \quad (5.93)$$

dont les points fixes sont les racines de :

$$x = a[ax(1-x)][1-ax(1-x)] \iff x \in \{x_2^*\} . \quad (5.94)$$

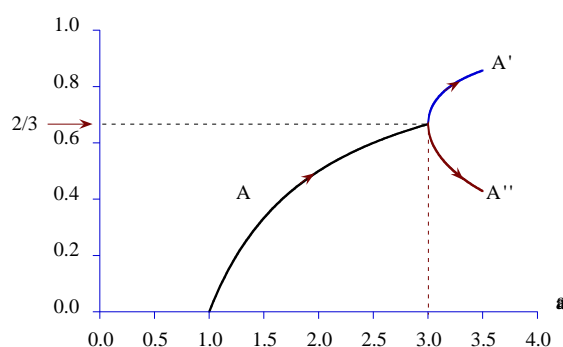


Figure 5.22: Début du schéma des bifurcations de l'application logistique.

Parmi ces points fixes de  $f_2(x)$ , on retrouve bien évidemment ceux de  $f(x)$ , soit  $x_1^* = 0, \frac{a-1}{a}$  ; (5.94) étant du quatrième degré, il existe deux autres solutions, que l'on trouve facilement en divisant les polynômes ; elles valent :

$$x_{2\pm}^* = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{a} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{3}{a}\right)} \right) \quad (5.95)$$

Ces nombres ne sont réels que si  $a \geq 3$  : sans préjuger de leur stabilité, une nouvelle bifurcation de produit donc en  $a = a_1 = 3$ , ce qui permet d'amorcer la représentation des bifurcations de l'application logistique (voir fig. 5.22).

À ce stade, on sait que le point  $x_1^* = 1 - \frac{1}{a}$  est stable pour  $a < 3$  ; visiblement, quel que soit le  $x_0 \in ]0, 1[$ , la suite converge vers  $x_1^*$  tant que  $a < 3 = a_1$  : pour cette raison  $]0, 1[$  est appelé le *bassin d'attraction* de  $x_1^*$ . Pour  $a > 3$  – jusqu'à une certaine valeur indéterminée pour l'instant –, deux points fixes stables existent, correspondant à une oscillation entre deux valeurs  $x_{2\pm}^*$  (ce que l'on appelle un  $2^1$ -cycle). Pour  $a \gtrsim a_1$ , les deux solutions  $x_{2\pm}^*$  données en (5.95) se comportent comme  $\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{a-a_1}$ , d'où les pentes verticales en  $a = a_1$ .

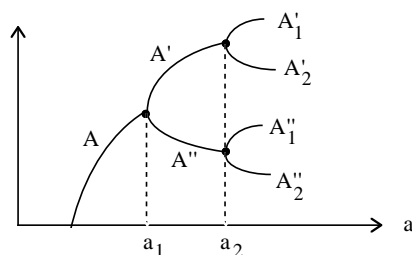


Figure 5.23: Schéma complété des premières bifurcations de l'application logistique ;  $a_1 = 3, a_2 = 1 + \sqrt{6} \simeq 3.45$ .

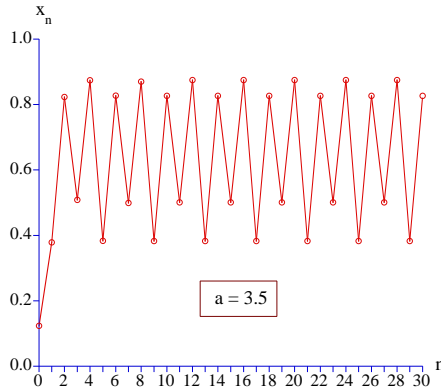


Figure 5.24: Un exemple de trajectoire, partant de  $x_0 = 0.123456789$  pour  $a > a_2$  : l’oscillation entre quatre valeurs est nettement visible.

La stabilité (linéaire) des  $x_{2\pm}^*$  s’analyse en situant  $f'_2(x_{2\pm}^*)$  en module par rapport à 1. On a :

$$f'_2(x) = a^2(1 - 2x)(1 - 2ax + 2ax^2) , \tag{5.96}$$

cependant que les  $x_{2\pm}$  satisfont (5.94), qui se récrit comme :

$$a^2x^{*2} - a(a + 1)x^* + a(a + 1) = 0 \iff ax_{\pm}^{*2} = (a + 1)x_{\pm}^* - (1 + \frac{1}{a}) . \tag{5.97}$$

Le calcul de  $f'_2(x_{2\pm}^*)$  se fait commodément en y substituant systématiquement  $ax_{\pm}^{*2}$  par le second membre ci-dessus à droite ; on trouve ainsi :

$$f'_2(x_{\pm}^*) = 4 + 2a - a^2 \equiv 5 - (a - 1)^2 , \tag{5.98}$$

qui, de façon remarquable, ne dépend pas de  $x_{\pm}^*$ , et prend donc la même valeur pour  $x_+^*$  et  $x_-^*$  : les deux branches stables A' et A'' perdront donc leur stabilité en même temps, quand  $a$  augmente. Comme  $a > 3$ ,  $5 - (a - 1)^2 < 1$  : seul compte l’examen du cas où  $f'_2(x_{\pm}^*)$  est négatif. Dans ce cas, la condition de stabilité est :

$$-f'_2(x_{\pm}^*) < 1 \iff -5 + (a - 1)^2 < 1 \iff a < 1 + \sqrt{6} \equiv a_2 = 3.449\,489\,743\dots , \tag{5.99}$$

Il est maintenant possible de compléter la fig. 5.22 : les deux branches A' et A'' s’arrêtent quand  $a = a_2$ , là où survient une nouvelle bifurcation diapason pour chacune d’entre elles : le schéma des bifurcations complété est tracé à la main sur la fig. 5.23. Juste au-dessus de  $a_2 = 1 + \sqrt{6}$ , apparaissent des cycles d’ordre  $2^2$  ( $2^2$ -cycles) : une fois le transitoire éteint, les  $x_n$ , oscillent entre 4 valeurs (voir fig. 5.24).

On devine que l’histoire va se répéter : la fig. 5.25 montre quelques itérées de  $f$ , et on voit bien en effet que rien ne peut arrêter la succession des bifurcations : plus  $r$  est élevé, plus  $f_r$  oscille, et se creuse quand  $a$  croît, augmentant *de facto* le nombre d’intersections avec la première bissectrice.

Il existe ainsi une suite croissante de nombres remarquables  $a_k$  en lesquels se produit, pour chaque branche déjà présente, une bifurcation faisant transiter au total d’un  $2^{k-1}$ -cycle à un  $2^k$ -cycle (une telle succession s’appelle une *cascade par doublement de période*). On sait écrire formellement l’ensemble des équations permettant de trouver les  $a_k$  successifs. Pour  $k$  petit, il est possible les résoudre exactement, mais la complexité augmente très vite avec  $k$ . Quoi qu’il en soit, une question importante vient à l’esprit : que fait la suite des  $a_k$  quand  $k \rightarrow \infty$  ? Si elle a une limite (finie), que se passe-t-il *après* ? On observe, en calculant les  $a_k$ , que la succession des doublements de période survient de plus en plus vite quand  $a$  augmente et il est possible de montrer que la suite des  $a_k$  a effectivement une limite, égale à  $a_{\infty} = 3.569\,945\,672\dots$ . Pour toutes les valeurs  $a < a_{\infty}$ , toutes les suites convergent vers une (des) valeurs *indépendantes des conditions initiales*.



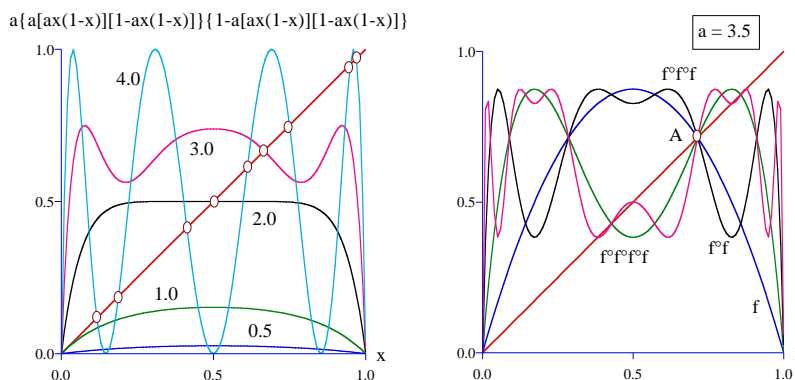


Figure 5.25: À gauche : application logistique itérée trois fois,  $f \circ f \circ f \circ f$ , pour différentes valeurs de  $a$ . À droite, comparaison de  $f$  et de ses premières itérées pour une valeur de  $a$ .

Au-delà de la limite  $a_\infty$ , le mouvement devient *chaotique*, un régime bien défini par des propriétés difficiles à décrire en termes simples, mais dont l'une est spectaculaire : la sensibilité aux conditions initiales. Il n'y a plus aucune oscillation d'aucune sorte, et des petites variations de l'état initial donnent des trajectoires qui s'écartent exponentiellement les unes des autres.

L'histoire ne s'arrête pas là pour autant : au milieu de cette complexité difficile à décrire, une fenêtre de régularité apparaît avec d'abord l'apparition de cycles de période 3 (pour  $a = 1 + 2\sqrt{2} = 3.828\,427\,125\dots$ ), point de départ d'une nouvelle séquence de doubléments de période (6, 12, ...) et de période 7, bifurquant en une nouvelle cascade (14, 28, ...), conduisant à nouveau vers un autre seuil où le régime redevient chaotique. Suivant une terminologie maintenant consacrée, ces cascades par doublement de période sont l'un des scénarios reconnus de *route vers le chaos*.

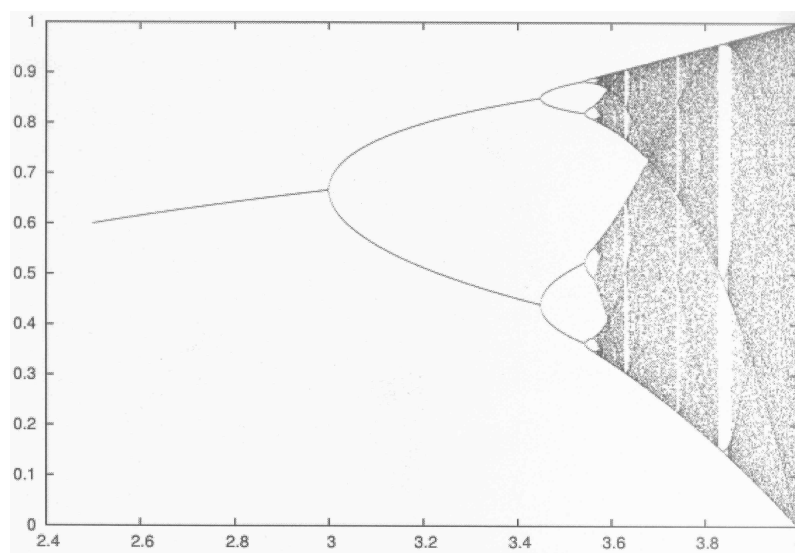


Figure 5.26: Carte des bifurcations de l'application logistique.

Au bout de cet exposé consacré à l'application logistique, aux propriétés pour le moins surprenantes, il n'est pas inutile de répéter que pour les systèmes non-linéaires, les versions discrète et continue possèdent en général des propriétés situées aux antipodes les unes des autres : la version continue de l'itération logistique a pour solution la fonction donnée en (5.71) qui, après coup, apparaît d'une banalité un peu triste.



## Chapitre 6

# Équations de conservation et de bilan

*Le but de ce chapitre est de présenter la notion de loi de conservation et de bilan, et d'en donner quelques exemples simples*

### 6.1 Conservation d'une grandeur physique

La Physique est une science construite sur l'affirmation d'un certain nombre de *principes*, admis (pas tous *une fois pour toutes*) sous la poussée des faits expérimentaux alliée à ce qu'il faut bien appeler le bon sens, faute de mieux (et c'est lui qui est parfois pris en défaut). À titre d'exemple, citons le principe de causalité (les effets sont postérieurs aux causes), ou le Second principe de la Thermodynamique, qui exprime la flèche du temps pour les systèmes macroscopiques, ou encore le principe de la conservation de l'énergie.

Les deux premiers principes cités ne contiennent aucune idée de conservation. Le premier est fondé sur le sens commun<sup>1</sup> et ne saurait souffrir aucune exception, à quelque échelle que ce soit. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que ce principe d'une rigidité absolue se traduit mathématiquement par le fait que la réponse d'un système à une sollicitation extérieure – le scénario-type de la cause et de l'effet – est décrite par des fonctions douées de propriétés remarquables (elles doivent être *analytiques*<sup>2</sup> dans des domaines précis du plan complexe).

Le Second principe est certes vrai (au sens où on n'en a jamais observé la moindre violation), mais recourt explicitement à la notion d'échelle de temps et ne vaut que pour les grands systèmes : l'irréversibilité proclamée signifie que le temps de retour au point de départ est si gigantesque (et d'ailleurs difficilement imaginable) que ce retour est déclaré physiquement *impossible*. D'un strict point de vue mécanique, le temps de retour au point de départ augmente exponentiellement avec le nombre de constituants élémentaires : pour un système macroscopique (contenant de l'ordre de  $10^{23}$  particules), ce temps est considéré comme infini. *Stricto sensu*, il est bien clair que rien ne s'oppose à considérer des systèmes de taille intermédiaire pour lesquels, en toute rigueur, on pourrait parler de violation du Second principe – sauf que précisément de tels systèmes ne sont pas dans son domaine d'application : le lien précis entre Thermodynamique et Mécanique statistique se fait après passage à la limite d'un système infini. Ceci étant précisé, le Second principe affirme que l'entropie d'un système isolé ne peut pas décroître, et n'est certes pas un principe de *conservation* !

Enfin, et *a contrario*, le principe de conservation de l'énergie d'un système affirme que, quoi qu'il arrive, une certaine grandeur physique – l'énergie – ne change pas et garde toujours la même valeur. Bien sûr, pour que ce principe s'applique, le système doit être placé dans des conditions bien déterminées, faisant de lui ce que

---

<sup>1</sup>et c'est bien pourquoi la force d'Abraham - Lorentz posait un problème de fond : même violé sur un temps très court (de l'ordre de  $10^{-23}$  s), ce principe était violé !

<sup>2</sup>Les fonctions analytiques sont des objets d'une extraordinaire robustesse : caractérisées par le fait qu'elles sont *une fois* dérivables, de cette simple (!) propriété découle immédiatement qu'elles sont *infiniment* dérivables – voir le cours de L3.

l'on appelle (définit comme ?) un système *isolé*. Par ailleurs, il n'est pas si facile que cela de définir l'énergie : on s'en tiendra dans la suite à des exemples.

La notion de conservation dans le temps (on dit aussi : invariance temporelle, ou par translation dans le temps) se réfère au fait qu'une certaine grandeur ne change pas quand le temps s'écoule. On peut aussi envisager l'invariance vis-à-vis du changement d'autres paramètres (invariance dans l'espace), ou même sous l'effet de certaines transformations (géométriques ou non, formelles ou non) sur le système considéré ou les grandeurs qui le décrivent. L'invariance éventuelle est d'une façon générale une propriété de *symétrie*, qui sera brièvement discutée ci-dessous.

### 6.1.1 Conservation dans le temps : exemple des constantes du mouvement mécanique

Dans cette section, on considère exclusivement la conservation vis-à-vis de l'écoulement du temps, prenant d'abord le cas de l'énergie en saisissant l'occasion de rappeler quelques notions fondamentales.

Soit un point matériel de masse  $m$  (qui joue ici le rôle de système physique), situé au point repéré par  $\vec{r}$ , soumis à un certain champ de forces  $\vec{F}(\vec{r})$ . Le principe fondamental de la dynamique (PFD) stipule que la variation de la vitesse  $\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$  est proportionnelle à la force, et est d'autant plus petite que l'inertie (la masse) est élevée<sup>3</sup> :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}) \iff m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}) . \quad (6.1)$$

De cette équation résulte immédiatement le *Théorème de l'énergie cinétique* : le travail de la force donne la variation d'énergie cinétique. En effet, multipliant membre à membre par  $\vec{v}$ , et intégrant entre  $t_A$  et  $t_B$ , il vient :

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v} \iff E_{\text{cin}}(t_B) - E_{\text{cin}}(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} F(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{A \rightarrow B} F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \equiv W_{A \rightarrow B} . \quad (6.2)$$

L'intégrale  $\int_{A \rightarrow B} \dots d\vec{r}$  désigne l'intégrale curviligne prise le long de la trajectoire suivie par le point matériel, le conduisant du point A au temps  $t_A$  au point B au temps  $t_B$ .

Très souvent, le champ de force  $\vec{F}(\vec{r})$  est tel que le travail est *indépendant du chemin suivi* pour relier les deux points : un tel champ de force est dit *conservatif*. En pareil cas, la quantité  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  doit être la *variation* infinitésimale d'une certaine fonction  $\Phi(\vec{r})$  entre deux points infiniment voisins  $M_i$  et  $M_{i+1}$ ,  $\Phi(\vec{r}_{i+1}) - \Phi(\vec{r}_i)$  ; le travail total est la limite de la somme :

$$(\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_0)) + (\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)) + \dots + (\Phi(\vec{r}_{i+1}) - \Phi(\vec{r}_i)) + \dots + (\Phi(\vec{r}_N) - \Phi(\vec{r}_{N-1})) \quad (6.3)$$

quand  $N \rightarrow \infty$  ( $\vec{r}_0 = \vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_N = \vec{r}_B$ ) ; presque tous les termes se compensent deux à deux, il ne reste que le premier et le dernier, soit  $\Phi(\vec{r}_B) - \Phi(\vec{r}_A)$ , et le travail ne dépend bien que du point de départ et du point d'arrivée :

$$W_{A \rightarrow B} = \Phi(\vec{r}_B) - \Phi(\vec{r}_A) ; \quad (6.4)$$

tous les points intermédiaires peuvent bien être quelconques, le travail y est complètement indifférent et s'exprime bien comme la simple différence des valeurs prises par  $\Phi$  à l'arrivée et au départ.

Dire que  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  est la variation infinitésimale d'une certaine fonction  $\Phi$  signifie que  $\vec{F}$  est la *dérivée* de  $\Phi$ , plus précisément son gradient :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \iff F_\alpha(\vec{r}) = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \quad (\alpha = x, y, z) . \quad (6.5)$$

Dans ces conditions, le théorème de l'énergie cinétique (6.2) prend la forme :

$$E_{\text{cin}}(t_B) - E_{\text{cin}}(t_A) = \Phi(\vec{r}_B) - \Phi(\vec{r}_A) \iff E_{\text{cin}}(t_B) - \Phi(\vec{r}_B) = E_{\text{cin}}(t_A) - \Phi(\vec{r}_A) ; \quad (6.6)$$

<sup>3</sup>La forme à droite de (6.1) montre bien que pour une force  $\vec{F}$  donnée, plus la masse est petite, plus l'accélération est grande et inversement (le produit des deux vaut la force, qui est donnée). C'est pourquoi, dans une molécule, les électrons vont vite et les noyaux lentement, l'expression étant à prendre au sens de la Mécanique quantique bien sûr.

visiblement, c'est  $-\Phi$  qui est la quantité physique agréable. Posant donc désormais  $\Phi = -V$ , soit :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) , \quad (6.7)$$

on a :

$$E_{\text{cin}}(t_B) + V(\vec{r}_B) = E_{\text{cin}}(t_A) + V(\vec{r}_A) \quad (6.8)$$

Définissant alors l'énergie mécanique totale  $E$  comme la somme  $E_{\text{cin}} + V$ , (6.8) dit que, calculée en deux points quelconques d'une trajectoire *réelle*<sup>4</sup>, l'énergie prend en fait la même valeur : autrement dit,  $E$  a une valeur constante en tout point de la trajectoire, cette valeur étant fixée une fois pour toutes par les conditions initiales. Notamment, désignant par  $\vec{v}_0$  et  $\vec{r}_0$  la vitesse et la position au départ ( $t = t_0$ ), on a :

$$E_{\text{cin}}(t_M) + V(\vec{r}_M) = \frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 + V(\vec{r}_0) \quad (6.9)$$

quel que soit le point M de trajectoire *réelle* atteint au temps  $t_M$ .  $E$  est une constante du mouvement, une grandeur qui garde la même valeur à tout instant, le long d'une trajectoire réellement suivie par le système. Si dans l'expression de l'énergie on reporte les fonctions  $\vec{r}(t)$  et  $\vec{v}(t)$  associées à la trajectoire, on obtient *a priori* une nouvelle fonction du temps seul,  $H(t)$ . Alors, la conservation de l'énergie s'exprime comme<sup>5</sup> :  $H(t) = H(t_0) \forall t$ , ce qui signifie que  $H$ , en fait ne dépend pas du temps (toutes les dépendances en temps apportées individuellement par  $\vec{r}(t)$  et  $\vec{v}(t)$  se compensent et, au total, le temps  $t$  disparaît de l'expression<sup>6</sup> de  $H$ ).

On appelle système *isolé* un système dont l'énergie (ici mécanique) est constante. Isolé ne signifie pas que ce système est sans interaction avec le reste du monde : ici, la particule est soumise à un champ de forces  $\vec{F}$ , qui ne vient pas de nulle part, mais est créé par des objets physiques. Par exemple, si la particule d'intérêt est chargée,  $q$ , elle est sensible à un champ électrique créé par une distribution de charges  $Q_i$  donnée. Ces charges ne s'introduisent dans le problème que par le champ électrique qu'elles engendrent et, de fait, c'est ainsi que s'introduit naturellement la notion de *champ* en Physique : on admet que les *sources* de ce champ sont inaltérables et non influençables, et c'est leur effet global qui est représenté par le champ auquel est soumis le système considéré. Il s'agit clairement d'une énorme simplification des problèmes, et résulte toujours forcément d'une approximation devant, en toute rigueur, être justifiée, puisque l'on admet *ipso facto* que l'objet d'étude n'agit pas en retour sur les sources du champ.

Quoiqu'il en soit, c'est bien l'astuce de l'introduction de l'énergie potentielle qui permet de définir sans ambiguïté l'énergie totale d'une particule dans un champ de forces donné. Pour faire comprendre ce point, imaginons deux charges  $q$  (masse  $m$ ) et  $Q$ ,  $Q$  étant fixée. L'énergie totale de ce système est  $\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$ , où  $r$  est la distance entre les deux particules. Maintenant, il n'est pas possible de dire quelle est l'énergie de chaque particule : on pourrait couper en deux parties égales le terme d'interaction, mais cela n'aurait visiblement pas de sens.

En revanche, si on "oublie" la charge  $Q$  et qu'on lui substitue le champ électrique qu'elle crée dans l'espace, alors cela a un sens de parler de l'énergie potentielle  $V(\vec{r})$  de l'autre charge,  $q$ , dans le champ de  $Q$  : c'est effectivement  $qU(\vec{r})$ , où  $U(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  est le potentiel électrostatique dû à  $Q$ .

D'autres grandeurs que l'énergie peuvent être des constantes du mouvement, selon la situation où est placé le système. Par exemple, en l'absence de force (particule *libre*), le PFD donne  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ , soit  $\vec{v} = \vec{v}_0$  : la vitesse est une constante du mouvement, ainsi que la quantité de mouvement  $m\vec{v}$  – une idée qui, historiquement, a eu bien du mal à s'imposer...<sup>7</sup>

<sup>4</sup>Il s'agit bien de la trajectoire  $\vec{r}(t)$  réellement suivie puisque (6.1) a été utilisée pour arriver à (6.2)

<sup>5</sup>Noter qu'écrire  $H(t) = C^{\text{ste}}$  ne constitue pas une équation utilisable tant que l'on n'a pas explicité ce qu'est la constante au second membre.

<sup>6</sup>Par exemple, pour un oscillateur harmonique ( $m, \omega$ ) écarté à  $t = 0$  de  $x_0$  de sa position d'équilibre, sans vitesse initiale, on trouve  $x(t) = x_0 \cos \omega t$  et  $v(t) = -\omega x_0 \sin \omega t$  ; l'énergie totale  $E$  est  $\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ . En reportant  $x(t)$  et  $v(t)$ , on trouve la fonction  $H(t)$  définie ci-dessus, soit  $H(t) = \frac{1}{2}m(-\omega x_0 \sin \omega t)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x_0 \cos \omega t)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$ , qui est bien l'énergie au départ,  $H(t = 0)$  : quand on injecte dans l'expression de l'énergie les fonctions obtenues par intégration des équations du mouvement, on obtient une "fonction" du temps, qui est en réalité constante dans le temps.

<sup>7</sup>Chercher ce qui est arrivé à Giordano Bruno pour avoir, notamment, osé affirmer que la pierre lâchée du haut du mât tombe au pied du mât.

S'il y a une force, mais qu'elle est *centrale*, c'est-à-dire dirigée toujours vers (ou à l'opposé) d'un point O (appelé centre de force), alors prenant ce point comme origine du repère ( $\vec{OM} = \vec{r}$ ), on a  $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\vec{r}$ . Examinons maintenant la quantité  $\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}$  (moment cinétique) ; on a :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = m \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v}. \quad (6.10)$$

Prenant en compte le PFD  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ , on obtient le *Théorème du moment cinétique*, exprimant que la variation de  $\vec{J}$  est donnée par le moment de la force appliquée :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \iff \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}; \quad (6.11)$$

$\vec{J}$  décrit la rotation de la bille, le moment est un couple qui fait tourner. Utilisons maintenant l'hypothèse de la force centrale :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times (f(\vec{r})\vec{r}) = \vec{0} \quad (6.12)$$

puisque pour tout vecteur  $\vec{A}$ ,  $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$ . Ainsi, pour un mouvement à force centrale, le moment cinétique qui est aussi une constante du mouvement. Si la force est conservative, on dispose donc de deux constantes du mouvement, l'énergie et le moment cinétique. Comme le *vecteur*  $\vec{J}$  est une constante, la trajectoire se déroule dans un plan (perpendiculaire à  $\vec{J}$ ), fixé dès le départ par les conditions initiales. En définitive, la bille n'a que deux degrés de liberté, ses deux coordonnées dans ce plan<sup>8</sup>. Pour une bille dans un champ central, il y a donc autant de constantes du mouvement que de degrés de liberté : un tel système est dit *intégrable*.

Notons qu'à une dimension d'espace, toute force est conservative puisque la force  $F(x)$  étant donnée, on peut toujours écrire que cette fonction est la dérivée d'une autre fonction<sup>9</sup>, en l'occurrence  $F(x) = -V'(x)$ .

### 6.1.2 Conservation et symétrie

La considération de grandeurs mécaniques permet de mettre en évidence le lien profond qui existe entre conservation d'une quantité et propriétés de symétrie d'un système donné. Les propriétés de symétrie jouent un rôle capital en Physique, qu'il s'agisse d'élaborer une théorie fondamentale, ou de traiter en pratique un problème donné.

La parenté entre symétrie et conservation peut s'exprimer en termes relativement abstraits, qui ont le mérite de montrer l'universalité de ce lien. On s'en tient ici à une version très élémentaire, énonçant les idées premières mais forcément d'application limitée. Revenons au cas d'une particule de masse  $m$  se déplaçant dans  $\mathbb{R}^3$  sous l'effet d'une force  $\vec{F}$  dérivant du potentiel  $V(\vec{r})$ . L'équation fondamentale est :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}), \quad (6.13)$$

que l'on peut aussi récrire comme :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}), \quad (6.14)$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse  $\dot{\vec{r}}$ . Cette équation dit que la quantité de mouvement  $m\vec{v}$  varie d'autant plus vite que la dérivée de  $V$  est grande : la composante  $mv_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) est égale à  $-\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ . Une conséquence immédiate est que si  $V$  ne dépend pas de certaines coordonnées, alors les composantes correspondantes de la quantité de mouvement ne varient pas du tout : ce sont des constantes du mouvement. Par exemple, si  $V = -mgz$  (gravitation dans l'approximation locale où  $|z| \ll R_T$ ), alors  $mv_x$  et  $mv_y$  sont constantes dans le temps : la vitesse horizontale d'une particule dans le champ terrestre est une constante du mouvement.

<sup>8</sup>Pour des raisons évidentes, la *bonne* façon de faire est de choisir les coordonnées polaires dans le plan,  $r$  et  $\theta$ .

<sup>9</sup>Plus précisément, la fonction  $F(x)$  étant donnée et supposée intégrable, on peut toujours considérer son intégrale et poser  $V(x) = \int dx F(x)$  ; même si la fonction  $F(x)$  n'est pas continue,  $V(x)$  l'est tant que les sauts de  $F$  sont finis.

L'absence de  $x$  et de  $y$  dans  $V$  a un sens très clair : puisque  $V$  ne dépend pas de ces coordonnées,  $V$  reprend la même valeur en deux points qui se correspondent l'un l'autre dans une translation horizontale. Autrement dit, la fonction  $V$  est *invariante* dans une telle translation ; cette invariance est bien une propriété de symétrie au sens précisément où, que l'on fasse ou pas l'opération, rien ne change.

Ainsi, par transitivité, on voit que c'est la symétrie de translation perpendiculairement à  $Oz$  qui assure la constance dans le temps des deux composantes  $v_x$  et  $v_y$ , ce qui montre dans un cas très simple le lien entre symétrie et conservation d'une grandeur. Il en va de même dans tout problème de dynamique : toute propriété de symétrie spatiale entraîne (et réciproquement) l'invariance dans le temps d'une grandeur dynamique du système. Pour un système à symétrie cylindrique autour d'un axe ( $Oz$  par exemple), c'est la composante du moment cinétique le long de cet axe qui est conservée. Si la symétrie est sphérique, il existe une symétrie de type cylindrique autour de trois axes orthogonaux, et alors ce sont les trois composantes du moment cinétique qui sont des constantes : le vecteur  $\vec{J}$  est une constante du mouvement. Dans le cas extrême où  $V$  est constant, c'est-à-dire ne dépend d'aucune coordonnée, alors les trois composantes de  $\vec{v}$  sont constantes : en l'absence de force, une particule a un mouvement uniforme.

Il existe d'autres formes de symétries, non liées à une opération géométrique (translation, rotation, ...), dont l'exploitation théorique s'est révélée très fructueuse. Il en va ainsi par exemple de l'*invariance de jauge*, qui traduit l'invariance des lois physiques dans le changement de certaines quantités intervenant dans les calculs (par exemple les potentiels pour le champ électromagnétique – l'expression la plus triviale de l'invariance de jauge est que toute constante additive dans l'énergie potentielle  $V(\vec{r})$  ne joue aucun rôle puisque la force,  $\vec{F}$ , s'obtient par dérivation de  $V$ ). Cette invariance nécessaire joue un rôle de premier plan dans les élaborations théoriques, puisque toute théorie non invariante de jauge est inacceptable.

## 6.2 Expression de la conservation d'une grandeur

### 6.2.1 Notion de densité

Jusqu'à présent, seules ont été considérées des grandeurs définies en soi, sans aucune référence à une position dans l'espace, par exemple l'énergie  $E$  d'une particule. Ceci étant, même dans ce cas simple, on peut dire que l'énergie en question n'est pas n'importe où, mais localisée spatialement là où se trouve précisément cette particule<sup>10</sup>. Si celle-ci est vue comme une petite bille de rayon  $a$  et volume  $v$ , dont le centre est à la position spécifiée par le vecteur  $\vec{r}(t)$ , on peut introduire une densité spatiale d'énergie  $\rho_E(\vec{r}', t)$  définie comme suit :

$$\rho_E(\vec{r}', t) = \frac{E}{v} f(\vec{r}' - \vec{r}(t)) , \quad (6.15)$$

où la fonction  $f(\vec{R})$  est une fonction qui vaut 1 si  $\|\vec{R}\| < a$ , 0 autrement<sup>11</sup>. L'expression (6.15) – homogène à une énergie divisée par un volume – dit bien que dans le petit volume  $v$  autour de  $\vec{r}(t)$  se trouve l'énergie  $E$  et qu'ailleurs il n'y a pas d'énergie du tout. De surcroît, en intégrant les deux membres dans l'espace, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_E(\vec{r}', t) d^3r' = \frac{E}{v} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}' - \vec{r}(t)) d^3r' = \frac{E}{v} v = E ; \quad (6.16)$$

lu à l'envers, ceci donne le moyen de calculer l'énergie connaissant la densité d'énergie :

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_E(\vec{r}', t) d^3r' . \quad (6.17)$$

Pour une seule particule, cette définition n'est pas très utile. En revanche, considérons maintenant un grand nombre de particules (sans interaction mutuelle), numérotées par le label  $n$  et localisées en  $\vec{r}_n$ , chacune d'entre elles ayant l'énergie  $E_n$ . L'énergie de cet ensemble de particules est la somme des énergies individuelles

<sup>10</sup>Si on veut faire tourner un moulin il faut bien que les ailes soient sur la trajectoire du vent, pas à l'abri !

<sup>11</sup>Cette fonction s'appelle la *fonction caractéristique* du domaine considéré.

(puisque'il n'y a pas d'interaction entre les particules),  $E_n$  étant concentrée dans le volume de "sa" particule. La densité totale d'énergie est maintenant :

$$\rho_E(\vec{r}', t) = \sum_n \frac{E_n}{v} f(\vec{r}' - \vec{r}_n(t)) . \quad (6.18)$$

L'intégration des deux membres donne maintenant :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_E(\vec{r}', t) d^3r' = \sum_n \frac{E_n}{v} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}' - \vec{r}_n(t)) d^3r' = \sum_n \frac{E_n}{v} v = \sum_n E_n = E , \quad (6.19)$$

et on retrouve la même expression formelle, (6.17), que dans le cas d'une seule particule.

L'argument précédent peut être repris à propos de n'importe quelle grandeur relative à une particule, qu'elle soit intrinsèque (masse, charge) ou non (énergie, vitesse). Si la particule  $n$  a la charge  $q_n$  la densité de charge totale,  $\rho_q$ , est :

$$\rho_q(\vec{r}', t) = \sum_n \frac{q_n}{v} f(\vec{r}' - \vec{r}_n(t)) . \quad (6.20)$$

La densité peut d'ailleurs être tout bêtement la densité de particules, au sens élémentaire du terme ; si on la note simplement  $\rho$ , elle a pour expression :

$$\rho(\vec{r}', t) = \sum_n \frac{1}{v} f(\vec{r}' - \vec{r}_n(t)) \quad (6.21)$$

avec :

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}', t) d^3r' \quad (6.22)$$

où  $N$  est le nombre total de particules. Cette densité est toujours positive, alors que les signes de  $\rho_E$  et  $\rho_q$  peuvent être évidemment quelconques.

De même, si  $\vec{v}_n$  est la vitesse d'une particule, on peut définir une densité de vitesse (qui est cette fois un vecteur) :

$$\vec{\rho}_v(\vec{r}', t) = \sum_n \frac{\vec{v}_n}{v} f(\vec{r}' - \vec{r}_n(t)) , \quad (6.23)$$

et ainsi de suite. Cependant, afin de simplifier les écritures, on ne considère ci-dessous que des densités *scalaires* du genre  $\rho$ ,  $\rho_E$  ou  $\rho_q$ , sans désormais faire référence à la nature physique précise de la densité considérée. S'il le faut, on écrira ainsi en général :

$$\rho_A(\vec{r}', t) = \sum_n \frac{A_n}{v} f(\vec{r}' - \vec{r}_n(t)) , \quad A = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_A(\vec{r}', t) d^3r' , \quad (6.24)$$

relations typiques de la densité scalaire  $\rho_A$  relative à la grandeur quelconque  $A$ .

Supposons maintenant que la grandeur  $A$  est conservée au cours du mouvement, ce qui est vrai pour l'énergie  $E$  d'un système isolé, pour le nombre total de particules pour un système *fermé* (bocal aux parois hermétiques, et non absorbantes), et toujours vrai quand il s'agit de la charge électrique. Dans ces conditions, la conservation dans le temps s'exprime trivialement à l'aide de la densité sous la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_A(\vec{r}', t) d^3r' = C^{\text{ste}} , \quad (6.25)$$

la  $C^{\text{ste}}$  ayant la valeur qu'elle avait à l'origine du mouvement (ou n'importe quand).

La relation (6.25) ne semble pas apprendre grand chose. En fait, sa substance cachée peut se saisir en raisonnant comme suit. Découpons  $\mathbb{R}^3$  en deux domaines ; l'intégrale du premier membre se décompose en la somme des deux intégrales correspondantes. Maintenant, imaginons que, au cours du temps, la première intégrale décroisse parce que dans le domaine en question la densité décroît. Alors, puisque'il y a conservation, il faut que la deuxième intégrale augmente de la même façon, soit que la densité dans l'autre domaine augmente.



La diminution de la densité d'un côté et son augmentation corrélative de l'autre met en lumière l'existence d'un *transfert* de la quantité  $A$  du domaine qui se dépeuple vers le domaine qui se peuple, autrement dit la variation *locale* dans le temps de la densité est inévitablement liée à l'existence d'un *courant* : toute disparition quelque part s'accompagne d'une "apparition" ailleurs et comme rien n'est ici magique, ceci exige l'établissement d'un courant assurant le passage d'un point à l'autre de l'espace.

### 6.2.2 Expression locale. Notion de bilan. Vecteur courant

Si la dernière remarque impose à l'esprit la notion de courant, le courant lui-même est jusqu'à présent totalement absent des équations : on va maintenant précisément le mettre en évidence en raisonnant *localement* et en exploitant la notion de *bilan*. Pour la simplicité, on raisonnera avec la densité de particules, simplement notée  $\rho$ . La quantité conservée est le nombre total de particules,  $N$ , relié à  $\rho$  par :

$$N = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}', t) d^3r' . \quad (6.26)$$

À nouveau, si on coupe  $\mathbb{R}^3$  en deux domaines  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne se recouvrant pas mais tels que  $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathbb{R}^3$ , la conservation s'écrit :

$$N = \int_{\mathcal{D}_1} \rho(\vec{r}', t) d^3r' + \int_{\mathcal{D}_2} \rho(\vec{r}', t) d^3r' \equiv N_1(t) + N_2(t) ; \quad (6.27)$$

si  $N_1(t)$  décroît,  $N_2$  doit croître corrélativement et un courant apparaît, dirigé de  $\mathcal{D}_1$  vers  $\mathcal{D}_2$ . C'est cette dichotomie que l'on poursuit à l'infini, en raisonnant localement avec un domaine aussi petit que l'on veut.

Le système de référence pour le raisonnement est un ensemble de particules ayant la vitesse  $\vec{v}$ , que l'on peut visualiser comme l'écoulement d'un fluide à travers une canalisation sans pertes (pas de trou, pas de fuite, tout ce qui rentre ressort) ; le raisonnement lui-même repose justement sur la notion de bilan de ce qui se passe entre deux points voisins de l'espace entre deux instants  $t$  et  $t + \delta t$ .

Pour commencer, raisonnons à une dimension et, afin d'introduire les idées importantes, considérons d'abord le cas où les vitesses  $\vec{v}$  des particules sont égales entre elles, et ne dépendent pas de l'endroit où se trouvent ces particules. Le premier ingrédient important est la notion de *tube de courant* : il s'agit d'un cylindre droit d'axe parallèle à  $\vec{v}$ , dont les bases sont perpendiculaires à  $\vec{v}$  et ont une surface  $\delta S$  aussi petite que l'on veut (l'image que l'on peut y associer est celle d'un capillaire, ou d'un filament, où le fluide s'écoule).

Le raisonnement suivant consiste à faire le bilan des entrées/sorties de particules dans un petit élément de ce tube, de longueur  $\delta l$ , également aussi petite que l'on veut. Un tel élément a pour volume  $\delta S \delta l$ . On peut toujours appeler  $Ox$  l'axe parallèle au vecteur vitesse  $\vec{v}$  ; dès lors, la base amont a une certaine abscisse, notée  $x$ , la base aval a l'abscisse  $x + \delta l$ . Le nombre de particules contenu dans l'élément de tube à l'instant  $t$  est  $\rho(x + \tilde{\delta}l, t) \delta S \delta l$ , où  $\tilde{\delta}l$  est intermédiaire entre 0 et  $\delta l$ . Clairement, à des IP d'ordre supérieur près, on peut remplacer  $\tilde{\delta}l$  par  $\delta l$  et retenir simplement  $\rho(x, t) \delta S \delta l$  pour ce nombre ; c'est cette "approximation" qui est faite dans la suite.

Le bilan consiste à écrire que la variation du nombre de particules dans le petit cylindre entre  $t$  et  $t + \delta t$  est la différence entre le nombre des particules qui y sont rentrées et le nombre de particules qui en sont sorties. Tout d'abord, par définition même de la densité :

$$\text{variation du nombre de particules entre } t \text{ et } t + \delta t = \rho(x, t + \delta t) \delta S \delta l - \rho(x, t) \delta S \delta l . \quad (6.28)$$

D'un autre côté, trouvons d'abord le nombre de particules entrées dans le cylindre entre  $t$  et  $t + \delta t$  ; puisqu'elles ont la vitesse  $v$ , ces dernières sont celles qui étaient à l'instant  $t$  dans le cylindre situé en amont dont les faces étaient aux abscisses  $x - \delta l$  et  $x$  à l'instant  $t$ , avec  $\delta l = v \delta t$ ; leur nombre est donc :

$$\text{nombre de particules entrées par la face amont entre } t \text{ et } t + \delta t = \rho(x - \delta l, t) \delta l \delta S . \quad (6.29)$$

De même, les particules sorties du cylindre entre  $t$  et  $t + \delta t$  sont celles qui étaient à l'instant  $t$  dans le cylindre de référence, dont les faces sont aux abscisses  $x$  et  $x + \delta l$  ; leur nombre est donc :

$$\text{nombre de particules sorties par la face aval entre } t \text{ et } t + \delta t = \rho(x, t) \delta l dS , \quad (6.30)$$

En effectuant le bilan des entrées/sorties, on obtient :

$$[\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)] \delta l dS = \rho(x - \delta l, t) \delta l \delta S - \rho(x, t) \delta l \delta S , \quad (6.31)$$

soit :

$$\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t) = \rho(x - \delta l, t) - \rho(x, t) \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta t + \dots = -\frac{\partial \rho}{\partial x} \delta l + \dots , \quad (6.32)$$

où les  $\dots$  dénotent des termes d'ordre supérieur des développements de Taylor (supposés exister !) et avec toujours  $\delta l = v \delta t$ . Prenons maintenant la limite  $\delta t \rightarrow 0$ ,  $\delta l \rightarrow 0$  ; les termes d'ordre supérieur tendent vers zéro et il vient à la limite :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \frac{\partial \rho}{\partial x} . \quad (6.33)$$

Le sens physique de cette équation est clair : la variation entre  $t$  et  $t + dt$  du nombre de particules dans le petit volume cylindrique est tout entière due à la seule variation de la densité  $\rho$  entre les deux faces d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Cette variation de densité est possible seulement pour un fluide *compressible*. Pour un fluide incompressible  $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ , et alors, dans ces conditions,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  : toutes les vitesses sont égales, le fluide est incompressible, alors le nombre de particules dans un volume donné ne peut certainement pas changer au cours du temps et il s'agit alors d'un écoulement "en bloc".

L'équation (6.33) est indéniablement l'exemple le plus simple d'un type d'équations omniprésentes en Physique : les équations aux dérivées partielles (acronyme : EDP). En un sens, ce sont des équations infiniment plus compliquées que les équations différentielles ; leur résolution exige le plus souvent la mise en œuvre de techniques avancées, comme les transformations de Laplace et de Fourier – des techniques qui s'imposent notamment quand les coefficients de l'EDP sont des constantes. Ici, la simplicité de l'équation permet de deviner la solution : (6.33) dit que la dérivée de la fonction  $\rho(x, t)$  par rapport à la variable  $t$  donne essentiellement (*i.e.* à un facteur constant près) le même résultat que quand on dérive par rapport à l'autre variable  $x$ . En pensant à la règle de dérivation d'une fonction composée, on voit ainsi que la solution générale de (6.33) est n'importe quelle fonction  $f$  de la variable  $X = x - vt$  :

$$\rho(x, t) = f(X = x - vt) . \quad (6.34)$$

Cette réponse n'est évidemment pas satisfaisante physiquement (un problème bien posé a une et une seule solution). En fait, tout comme pour une équation différentielle, il faut se donner une condition initiale<sup>12</sup> pour que le problème soit bien défini. Ici, il faut et suffit de dire ce qu'est la densité  $\rho$  à l'instant  $t = 0$  ; se donnant ainsi  $\rho(x, 0)$ , la solution (6.34) doit alors satisfaire  $f(X = x - vt)|_{t=0} = \rho(x, 0)$ , soit  $f(X = x) = \rho(x, 0)$ , ce qui fixe la fonction inconnue  $f$  par  $f(x) = \rho(x, 0)$ . En définitive, la solution est :

$$\rho(x, t) = \rho(x - vt, 0) . \quad (6.35)$$

Ceci représente un profil de densité qui est le *clone* de la densité initiale et qui se déplace le long de  $Ox$  à la vitesse constante  $v$  : tout bourrelet de densité se promène sans déformation.

Généralisons maintenant le résultat (6.33), toujours à une dimension, mais en autorisant une variation de la vitesse entre les deux faces (rien n'interdit aux particules d'être accélérées ou ralenties à leur traversée du cylindre – il suffit d'imaginer qu'un champ de forces est présent) : dès lors, le module de la vitesse dépend de l'endroit où se trouvent les particules, et on peut de surcroît autoriser également une variation dans le temps. Pour le reste, la construction du bilan procède exactement comme auparavant, en considérant toujours l'élément de tube de longueur  $\delta l$  défini maintenant précisément comme  $\delta l = v(x, t) \delta t$ , et dont les faces sont toujours en  $x$  et  $x + \delta l$  ; notamment, l'équation (6.28) est inchangée formellement :

$$\text{variation du nombre de particules entre } t \text{ et } t + \delta t = [\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)] \delta l \delta S . \quad (6.36)$$

<sup>12</sup>Pour une EDP, il faut aussi, le cas échéant, se donner des *conditions aux limites*.

Le nombre des particules entrées dans le petit cylindre est :

$$\text{nombre de particules entrées par la face amont entre } t \text{ et } t + \delta t = \rho(x - \delta l_1, t) \delta l_1 \delta S \quad , \quad (6.37)$$

où  $\delta l_1$  est maintenant la longueur  $v(x - \delta l_1, t)\delta t$ . Le nombre des particules sorties est lui aussi formellement inchangé :

$$\text{nombre de particules sorties par la face aval entre } t \text{ et } t + \delta t = \rho(x, t) \delta l \delta S \quad , \quad (6.38)$$

de sorte que le bilan s'écrit maintenant :

$$[\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)] \delta l \delta S = [\rho(x - \delta l_1, t) \delta l_1 - \rho(x, t) \delta l] \delta S \quad , \quad (6.39)$$

ou encore :

$$[\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)] = \rho(x - \delta l_1, t) \frac{\delta l_1}{\delta l} - \rho(x, t) \quad . \quad (6.40)$$

On va maintenant expliciter le premier terme du second membre, en effectuant des développements limités et en se souvenant que  $\delta l_1$  et  $\delta l$  sont, par définition, tous deux d'ordre  $\mathcal{O}(\delta t)$  ; on a d'abord :

$$\delta l_1 = v(x - \delta l_1, t) \delta t = \left[ v(x, t) - \delta l_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \mathcal{O}(\delta l_1^2) \right] \delta t \iff \delta l_1 = \left[ \frac{v(x, t)}{1 + \frac{\partial v}{\partial x} \delta t} + \mathcal{O}(\delta t^2) \right] \delta t \quad , \quad (6.41)$$

d'où :

$$\frac{\delta l_1}{\delta l} = \frac{1}{1 + \frac{\partial v}{\partial x} \delta t} + \mathcal{O}(\delta t^2) = 1 - \frac{\partial v}{\partial x} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad . \quad (6.42)$$

Maintenant, en venant à (6.40) où on introduit  $\rho(x - \delta l_1, t) = \rho(x, t) - \delta l_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mathcal{O}(\delta l_1^2)$ , il vient :

$$[\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)] = \left[ \rho(x, t) - \delta l \left( 1 - \frac{\partial v}{\partial x} \delta t \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mathcal{O}(\delta t^2) \right] \left[ 1 - \frac{\partial v}{\partial x} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \right] - \rho(x, t) \quad . \quad (6.43)$$

Dans le premier crochet, comme  $\delta l = v(x, t)\delta t$ , on a aussi à des termes  $\mathcal{O}(\delta t^2)$  près :

$$[\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)] = \left[ \rho(x, t) - v \delta t \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] \left[ 1 - \frac{\partial v}{\partial x} \delta t \right] - \rho(x, t) + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad . \quad (6.44)$$

Ne considérant explicitement que les termes en  $\mathcal{O}(\delta t)$  dans le développement du produit au second membre<sup>13</sup>, il vient :

$$[\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)] = -v \delta t \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial x} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad . \quad (6.45)$$

Il suffit alors de diviser par  $\delta t$  et de prendre la limite  $\delta t \rightarrow 0$  pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\frac{\partial \rho}{\partial x} v - \rho \frac{\partial v}{\partial x} \equiv -\frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t) v(x, t)] \quad , \quad (6.46)$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} j(x, t) \quad , \quad (6.47)$$

avec toujours  $j(x, t) = \rho(x, t)v(x, t)$ . Physiquement, deux termes contribuent maintenant à la variation du nombre de particules : comme avant, on retrouve ce qui vient de la variation de densité (fluide compressible) ; le terme supplémentaire  $\rho \frac{\partial v}{\partial x}$  traduit le fait que si les particules entrent vite et ressortent lentement (ou l'inverse), le taux de variation du nombre s'en trouve augmenté (ou, à l'inverse, diminué), toutes choses égales par ailleurs.

À la réflexion, l'équation (6.47) est quasi-évidente, en revenant au sens physique du courant : nombre de particules entrant par unité de surface par unité de temps. La dérivée de  $j$  donne le taux de variation de ce qui est entré en  $x$  et sorti en  $x + dx$ , avec le bon signe :

$$[\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t)] \delta S dx = [(\rho v)(x, t) - (\rho v)(x + dx, t)] \delta t \delta S = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} dx \delta t \delta S \quad . \quad (6.48)$$

<sup>13</sup>Tous les termes d'ordre supérieur disparaissent de toute façon dans la limite ultérieure  $\delta t \rightarrow 0$ .

L'argument précédent montre à nouveau l'importance du courant  $j = \rho v$ . Ici, c'est le nombre de particules traversant l'unité de section droite par unité de temps, puisque :

$$\text{nombre de particules traversant la surface } \delta S \text{ d'abscisse } x \text{ entre } t \text{ et } t + \delta t = \rho(x, t) v(x, t) \delta t \delta S \quad ; \quad (6.49)$$

$j$  a pour dimension  $T^{-1}L^{-2}$ . De même, si  $\rho_E$  est cette fois la densité d'énergie, l'énergie qui traverse la surface  $\delta S$  pendant  $\delta t$  est :

$$\text{énergie traversant la surface } \delta S \text{ d'abscisse } x \text{ entre } t \text{ et } t + \delta t = \rho_E(x, t) v(x, t) \delta t \delta S \quad ; \quad (6.50)$$

alors, le courant d'énergie  $J_E = \rho_E v$ , homogène à  $EL^{-3}LT^{-1} = Wm^{-2}$ , est bien l'énergie traversant l'unité de surface par unité de temps, dans les limites  $\delta S \rightarrow 0$ ,  $\delta t \rightarrow 0$ . Enfin, si  $\rho$  est la densité de charge électrique dans un conducteur, (6.47) est l'équation connue de l'Électrocinétique,  $j$  étant cette fois le courant électrique, dont le flux est égal à l'intensité  $I$  dans le circuit.

Il n'est pas difficile de généraliser (6.46) à trois dimensions d'espace, effectuant le même décompte suivant chaque direction de l'espace. Le tube de courant n'est plus rectiligne (la direction du vecteur  $\vec{v}$  peut varier), mais l'élément de tube de longueur  $\delta l$  peut toujours être localement assimilé à un petit cylindre, à des IP d'ordre supérieur près (le capillaire est courbé, le filament est tordu). De façon presque évidente, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [\rho(\vec{r}, t) v_x(\vec{r}, t)] - \frac{\partial}{\partial y} [\rho(\vec{r}, t) v_y(\vec{r}, t)] - \frac{\partial}{\partial z} [\rho(\vec{r}, t) v_z(\vec{r}, t)] \quad , \quad (6.51)$$

où les  $v_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) sont les composantes de la vitesse. Un vecteur  $\vec{A}(\vec{r})$  quelconque étant donné, la combinaison remarquable  $\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} A_\alpha$  est<sup>14</sup> par définition la *divergence* de ce vecteur :

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \quad , \quad (6.52)$$

qui peut d'ailleurs s'écrire formellement comme le produit scalaire du vecteur  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  avec  $\vec{A}$  :

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad . \quad (6.53)$$

Si on se souvient de la façon dont la divergence s'est introduite (somme sur chacune des trois directions de  $\mathbb{R}^3$  de (flux entrant – flux sortant) à travers deux faces parallèles infiniment proches), on voit que la divergence est égale au flux du vecteur à travers un petit volume  $\delta V$ , divisé par ce volume<sup>15</sup>, quand ce volume tend vers zéro :

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\text{volume} \rightarrow 0} \frac{\text{flux à travers le volume}}{\text{volume}} \quad . \quad (6.54)$$

Par ailleurs, quand le vecteur dont la divergence est prise est multiplié par un scalaire  $f(\vec{r})$  fonction de l'espace, on a par définition :

$$\text{div}(f(\vec{r})\vec{A}(\vec{r})) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} (f A_\alpha) = \sum_\alpha \left[ \frac{\partial f}{\partial \alpha} A_\alpha + f \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right] \quad ; \quad (6.55)$$

la dernière somme s'exprime à nouveau avec  $\vec{\nabla}$  :

$$\text{div}(f\vec{A}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad . \quad (6.56)$$

En définitive, en introduisant maintenant<sup>16</sup> le *vecteur* courant  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$ , (6.51) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -\text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) \quad , \quad \vec{j}(\vec{r}, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad . \quad (6.57)$$

<sup>14</sup>en coordonnées cartésiennes.

<sup>15</sup>C'est donc le flux par unité de volume.

<sup>16</sup>Pour un circuit électrique,  $\rho$  est la densité de charge,  $\vec{j}$  est homogène à  $CL^{-3}LT^{-1} = Am^{-2}$  : le flux de  $\vec{j}$  se mesure bien en A.

L'usage veut que cette équation porte le nom d'*équation de continuité*, mais il vaut mieux retenir qu'elle exprime avant tout la conservation du nombre de particules, de sorte que l'expression *équation de conservation* serait plus appropriée<sup>17</sup>. En utilisant (6.56), l'équation de conservation s'écrit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -[\vec{\nabla} \rho(\vec{r}, t)] \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) + \rho(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) . \quad (6.59)$$

On a raisonné avec la densité de particules pour fixer les idées, mais rien dans l'argumentation n'y fait explicitement référence. Autrement dit, pour toute quantité extensive conservée  $A$ , il existe une telle équation de conservation :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_A(\vec{r}', t) d^3 r' = \text{Cste} \quad \forall t \iff \frac{\partial}{\partial t} \rho_A(\vec{r}, t) = -\text{div} \vec{j}_A(\vec{r}, t) , \quad \vec{j}_A(\vec{r}, t) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \rho_A(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) , \quad (6.60)$$

$\rho_A$  étant la bonne densité.

### 6.2.3 Équation constitutive. Équations de la diffusion et de la chaleur

Une équation telle que (6.60) exprime une loi de conservation et, de ce fait, est exacte. Toutefois, à elle seule, elle ne permet pas de résoudre le problème que l'on se pose puisqu'elle contient deux quantités *a priori* inconnues, la densité et la vitesse. Il faut donc se donner les moyens de trouver l'une des deux par ailleurs, ou d'écrire une autre relation entre densité et vitesse ; une telle relation s'appelle usuellement *équation constitutive*. Pour fixer les idées, on continue à raisonner avec la densité de particules  $\rho(x, t)$ , mais toute autre densité (d'énergie, de charge, ...) relève des mêmes arguments.

Physiquement, le courant résulte d'un déséquilibre de densité d'un point à l'autre : si la densité est la même partout, il n'y a pas lieu d'attendre un courant non-nul. La relation la plus simple que l'on puisse imaginer est la proportionnalité entre courant et dérivée (dans  $\mathbb{R}^3$ , gradient) de la densité elle-même ; physiquement, le courant doit aller des régions de haute densité vers les régions de basse densité<sup>18</sup>. En définitive, la relation constitutive la plus simple semble être :

$$j(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) , \quad (6.61)$$

où  $D$  est une constante positive, appelée constante de diffusion. Cette relation de proportionnalité entre courant et gradient de densité porte le nom de *Loi de Fick* ; elle est plausible, au moins pour les petits gradients, mais sa vraie justification relève d'un traitement théorique approfondi (Théorie de la réponse linéaire) et/ou d'une mise à l'épreuve expérimentale.

Admettant (6.61), le report dans (6.47) donne immédiatement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} , \quad (6.62)$$

qui est l'équation de la diffusion classique, et fournit un autre exemple d'EDP. Une fois connu un état initial  $\rho(x, t = t_0)$  (et des conditions aux limites), on sait en trouver explicitement la solution. Si la densité n'est aucunement confinée<sup>19</sup> et peut s'écouler entre  $\pm\infty$ , cette solution s'écrit :

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t; x', t_0) \rho(x', t_0) dx' , \quad W(x, t; x', t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4D(t-t_0)}} . \quad (6.63)$$

<sup>17</sup>Toujours avec l'image d'un fluide qui s'écoule, le transport (de matière) s'exprime par l'équation suivante, dite équation d'Euler – laquelle ne fait qu'exprimer le principe fondamental de la dynamique :

$$\rho(\vec{r}, t) \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p , \quad (6.58)$$

où  $p$  est la pression. Le terme entre crochets est la dérivée  $\frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{r}(t), t)$ , aussi appelée *dérivée particulière* : elle prend en compte le fait que la vitesse dépend du temps de deux façons, et notamment par  $\vec{r}(t)$ .

<sup>18</sup>“La Nature a horreur du vide” . . .

<sup>19</sup>On voit qu'ici une condition aux limites est requise en plus de la condition initiale.

En particulier, si au départ la densité est ultra-concentrée en  $x_0$ ,  $\rho(x, t_0) = N\delta(x - x_0)$  ( $N$  est le nombre total de particules), on trouve que la densité au point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  est simplement :

$$\rho(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}. \quad (6.64)$$

Ceci représente une gaussienne qui s'aplatit en s'élargissant au cours du temps, sa largeur typique variant comme  $\sqrt{2D(t - t_0)}$ ; ceci est conforme à l'intuition (et à l'observation) : une goutte d'encre déposée à la surface de l'eau ne fait que s'étaler (se diluer) au cours du temps. On note que l'étalement est *très lent*, augmentant seulement comme la racine carrée du temps, comparé à un mouvement uniforme où l'espace parcouru est proportionnel au temps : physiquement, ceci vient du fait que l'étalement résulte d'une sorte d'*agitation* (c'est l'agitation thermique !), un phénomène désordonné où il n'y a pas de force d'ensemble, mais une multitude de (petites) forces agissant en tous sens à un niveau microscopique et sans concertation mutuelle. On retrouvera ceci dans un contexte apparemment différent (mais au fond, c'est la même problématique) à propos de la marche au hasard (voir section 6.4.2 : l'ivrogne qui va tantôt à droite, tantôt à gauche, se déplace moins vite qu'une personne ayant un taux d'alcool nul).

La gaussienne (6.64) est évidemment normalisée : l'état initial est normalisé (son intégrale vaut  $N$ ) et (6.64) est justement la solution d'une équation exprimant la conservation du nombre total de particules. Ce point se vérifie sur la forme générale (6.63), en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4D(t-t_0)}} \right) \rho(x', t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \rho(x', t_0). \quad (6.65)$$

Un autre point remarquable est le fait que le mouvement décrit par (6.62) est *irréversible* : la diffusion *uniformise* la densité, toute inhomogénéité initiale se diluant au cours du temps. Techniquement ceci tient à la dissymétrie de l'ordre des dérivations : ordre 1 en temps, ordre 2 en espace<sup>20</sup>.

La généralisation de (6.62) à  $\mathbb{R}^3$  est immédiate et donne (si la diffusion est isotrope) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = D \Delta \rho(\vec{r}, t), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.66)$$

### Remarque

Il y a une différence frappante entre les deux solutions de (6.33) et (6.62) : la première donne un profil qui se déplace en bloc sans se déformer, alors que la seconde donne une dilution dans l'espace. Le point de bifurcation entre les deux types de solutions est l'équation constitutive (6.61) exprimant la loi de Fick : dans le cas où la vitesse est constante dans tout l'espace (une hypothèse ayant conduit à (6.33)), la loi de Fick donne :

$$v\rho(x, t) = -D \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) \iff \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) = -\frac{v}{D} \rho(x, t), \quad (6.67)$$

Cette équation dit d'emblée que la dérivée spatiale de la densité est toujours négative :  $\rho$  est donc, à tout temps, une fonction monotone décroissante de  $x$ . Étant bornée inférieurement par 0,  $\rho$  tend vers une constante quand<sup>21</sup>  $x \rightarrow -\infty$ , ou diverge ; dans les deux cas, l'intégrale de  $\rho$  est infinie : une telle situation ne peut donc se présenter que pour un nombre infini de particules au total.

De fait, la solution générale de (6.67) est  $\rho(x, t) = C e^{-\frac{v}{D}x}$ , où il reste à trouver la "constante"  $C$ , qui est au plus une fonction de  $t$  (on a intégré en  $x$ ) ; en fait la dernière expression montre que  $C$  n'est autre que la valeur de  $\rho$  en  $x = 0$  à l'instant  $t$  :  $C = \rho(0, t)$ . Reportant cette forme dans l'équation de la diffusion (6.62), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(0, t) e^{-\frac{v}{D}x} = D \left( -\frac{v}{D} \right)^2 \rho(0, t) e^{-\frac{v}{D}x} \iff \rho(0, t) = K e^{\frac{v^2}{D}t}, \quad (6.68)$$

<sup>20</sup>Au contraire, une équation de propagation du genre  $c^{-2} \partial_{tt} f - \partial_{xx} f = 0$  a une solution générale de la forme  $\frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]$ , qui est invariante dans le renversement du temps.

<sup>21</sup>On suppose que le mouvement se produit dans tout  $\mathbb{R}$  ; dans le cas contraire – par exemple si la densité est non-nulle seulement dans une partie de  $\mathbb{R}$  –, il conviendrait d'ajouter une condition aux limites traduisant physiquement cette contrainte.

où  $K$  est une nouvelle constante d'intégration, au plus fonction de  $x$  (on vient d'intégrer en  $t$ ) ; de fait, on a  $\rho(0, 0) = K$  et finalement :

$$\rho(x, t) = e^{-\frac{v}{D}x} e^{\frac{v^2}{D}t} \rho(0, 0) = e^{-\frac{v}{D}(x-vt)} \rho(0, 0) , \quad (6.69)$$

qui reste de la forme  $\rho(x, t) = \rho(x - vt, 0)$ , avec  $\rho(X, 0) = e^{-\frac{v}{D}X} \rho(0, 0)$ , et qui satisfait bien  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ . (6.69) représente un profil exponentiel de densité se déplaçant parallèlement à lui-même à la vitesse  $v$ . Comme prévu, ce profil n'est pas normalisable, correspondant à un nombre de particules  $N = \int_{\mathbb{R}} \rho(x, t) dx$  qui est infini.

•

Dans les calculs précédents,  $\rho$  désigne une densité de particules<sup>22</sup>. La même démarche peut être reprise en considérant cette fois la densité d'énergie  $\rho_E$ , le produit  $\rho_E(\vec{r}, t) \delta^3 r$  représentant l'énergie élémentaire contenue dans le petit volume d'extension  $\delta^3 r$  autour du point repéré par  $\vec{r}$ . Si ce petit volume n'est soumis à aucune force extérieure, le travail mécanique est nul et toute variation d'énergie ne peut que se réduire au terme de chaleur :  $dE = \vec{\mathfrak{d}}Q$ , ce qui suppose que le volume en question est mésoscopique (la quantité de chaleur est une grandeur essentiellement statistique) : suffisamment petit pour être très en-deçà de la résolution expérimentale, mais très grand à l'échelle atomique pour pouvoir contenir un grand nombre d'atomes. Une telle nécessité est d'ailleurs requise, et pour les mêmes raisons, afin de pouvoir parler de la température<sup>23</sup>  $T$  du petit volume : la température, elle aussi, est une grandeur essentiellement statistique.

S'il est toujours possible de parler de courant d'énergie, c'est-à-dire ici de courant de chaleur, il n'est pas possible *a priori* de le décomposer dans un produit du genre densité  $\times$  vitesse : dans un corps à l'équilibre thermique il n'y a pas de vitesse d'ensemble, mais seulement des vitesses "désordonnées", essentiellement caractérisées par leur valeur quadratique moyenne, qu'une théorie cinétique (statistique) permet de relier simplement à la température  $T$ .

Quoi qu'il en soit, et sans pouvoir aller jusqu'à une telle décomposition, il reste légitime (et suffisant) de s'en tenir à la définition suivante : le courant de chaleur est la quantité de chaleur traversant l'unité de surface par unité de temps. À nouveau, il s'agit clairement d'une grandeur vectorielle, que l'on supposera dans un premier temps dirigée parallèlement à  $Ox$ .

Considérons un petit volume d'épaisseur  $\delta l$  et de surface  $\delta S$ , exposé perpendiculairement au courant de chaleur. Entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \delta t$ , ce volume reçoit, par définition de  $j_Q$ , la quantité de chaleur  $\vec{\mathfrak{d}}Q = [j_Q(x, t) - j_Q(x + \delta l, t)] \delta S \delta t$ . Cette énergie doit être égale à la variation d'énergie  $dE$  relative à une transformation où la température  $T$  varie de  $T$  à  $T + \delta T$ , soit  $\delta m c_V \delta T$  (transformation élémentaire à volume constant), où  $\delta m$  est la masse dans le petit volume considéré. En désignant par  $\mu$  la masse volumique, on a donc  $dE = (\mu \delta l \delta S) c_V \delta T$ . Le bilan d'énergie entre  $t$  et  $t + \delta t$  s'écrit alors :

$$(\mu \delta l \delta S) c_V \delta T = [j_Q(x, t) - j_Q(x + \delta l, t)] \delta S \delta t = - \left( \frac{\partial}{\partial x} j_Q \delta l + \mathcal{O}(\delta l^2) \right) \delta S \delta t . \quad (6.70)$$

En écrivant maintenant  $\delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$ , il vient à la limite  $\delta t \rightarrow 0$ ,  $\delta l \rightarrow 0$  :

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} j_Q . \quad (6.71)$$

À nouveau, cette équation ne suffit pas, et il faut se donner une relation constitutive entre le courant de chaleur et la variation de température. La plus simple consiste à écrire que courant et gradient sont proportionnels :

$$j_Q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} , \quad (6.72)$$

<sup>22</sup>Les mêmes équations servent aussi pour la (densité de) probabilité  $P(x, t)$  de trouver une particule près du point d'abscisse  $x$ .  
<sup>23</sup>avec de surcroît une hypothèse d'équilibre local, permettant de définir une fonction donnant la température en un point donné à un instant donné ; c'est cette fonction qui est notée  $T(x, t)$ .

où  $\kappa$  (positif !), défini par cette relation, est appelé *coefficient de conduction thermique* (ou conductibilité thermique) ; le signe  $-$  au second membre traduit ce que suggère l'expérience courante ("la chaleur va du chaud au froid"). Pendant de la loi de Fick, cette relation s'appelle *Loi de Fourier* et, reportée dans (6.71), donne :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \lambda = \frac{\kappa}{\rho c_V}. \quad (6.73)$$

Cette équation, dite *équation de la chaleur*, est exactement de même nature que l'équation de la diffusion : elle représente en quelque sorte la *diffusion* de la température quand un milieu contient une inhomogénéité de température résultant par exemple d'un choc thermique. Les solutions de (6.62) peuvent être recopiées à l'identique *via* le simple dictionnaire de paramètres  $\rho \rightarrow T, D \rightarrow \lambda$ .

Par exemple, soit une barre rectiligne infinie de section  $S$ , initialement à l'équilibre sur toute sa longueur et soumise à l'instant  $t_0$  à un choc thermique sur la longueur  $\delta l$  près de  $x = x_0$  ; si la chaleur fournie à la barre est  $Q$ , le choc élève localement la température de  $\Delta T$  par rapport à la température  $T_{\text{eq}}$  avant le choc. À cet instant, le profil de l'écart de température est tel que :

$$(\mu S \delta l)_{c_V} \Delta T(x, t = 0) = Q \delta_{\delta l}(x - x_0), \quad (6.74)$$

où  $\delta_{\delta l}(x - x_0)$  est une fonction très pointue, centrée en  $x = x_0$  et dont l'intégrale vaut 1 ; en acceptant de la modéliser par une "fonction" de Dirac, la condition initiale prend la forme un peu symbolique<sup>24</sup> :

$$(\mu S \delta l)_{c_V} \Delta T(x, t = 0) = Q \delta l \delta(x - x_0) \iff \Delta T(x, t = 0) = \frac{Q}{\mu S c_V} \delta(x - x_0). \quad (6.75)$$

Par la suite, l'écart de température  $\Delta T(x, t) \equiv T_{\text{eq}} + T(x, t)$  satisfait (6.73) avec la condition initiale (6.75) ; selon (6.64), l'écart de température le long de la barre a une variation gaussienne par rapport à l'abscisse ; en définitive :

$$T(x, t) = T_{\text{eq}} + \frac{Q}{\mu S c_V} \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\lambda(t-t_0)}}. \quad (6.76)$$

D'une façon générale, (6.73) est d'une importance capitale pour décrire les transferts thermiques, qui sont donc d'autant plus rapides ( $\partial_t T$  grande) que la conductivité thermique est élevée et que la température varie vite dans l'espace ( $\partial_x T$  grande). Un exemple classique est celui de deux milieux homogènes séparés par une interface plane assurant un bon contact thermique entre les deux milieux permettant à ces deux milieux d'être localement en équilibre thermique l'un avec l'autre à tout instant, c'est-à-dire d'avoir à l'interface la *même* température. L'un des deux milieux (en la circonstance dit *milieu extérieur*), situé du côté  $x < 0$ , a la température homogène<sup>25</sup>  $T_{\text{ext}}(t)$  et pilote la température de l'autre (dit *milieu intérieur*). La température  $T(x, t)$  de ce dernier satisfait (6.73), avec la condition aux limites  $T(x = 0, t) = T_{\text{ext}}(t)$ , puisque l'interface est supposée assurer à tout instant l'égalité locale des deux températures  $T_{\text{ext}}(t)$  et  $T(x = 0, t)$ . Si  $T_{\text{ext}}(t)$  augmente, la chaleur va diffuser vers l'intérieur du milieu intérieur, et inversement. Ainsi, quand  $T_{\text{ext}}(t)$  a une variation *périodique*, le flux de chaleur s'inverse régulièrement. On devine facilement, dans ces conditions, que les variations de températures vont se manifester jusqu'à une certaine profondeur dans le milieu intérieur, et seront pratiquement imperceptibles au-delà de cette longueur de pénétration. Le calcul détaillé montre que cette profondeur varie comme la racine carrée de la période des variations de température, mais cette dépendance peut se trouver sur la base d'un simple argument dimensionnel. En effet, si  $\nu$  est la fréquence des variations de température,  $\nu^{-1}$  définit une échelle de temps naturelle du phénomène (c'est la période de la variation de température  $T_{\text{ext}}$ ). Par ailleurs, la constante  $\lambda$  dans (6.73) est homogène à  $L^2 T^{-1}$  (il suffit de regarder l'équation). On peut donc poser  $\lambda = \xi^2 \nu$ , où  $\xi$  est une longueur caractéristique du problème. En posant maintenant :

$$T(x, t) = \Theta\left(X = \frac{x}{\xi}, \tau = \nu t\right), \quad (6.77)$$

<sup>24</sup>Comme, par définition de  $\delta_{\delta l}(x - x_0)$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \delta_{\delta l}(x - x_0) dx = 1$ , la "fonction" de Dirac est ici homogène à l'inverse d'une longueur. L'apparition de  $\delta l$  au second membre vient du fait que l'on a  $\int_{\mathbb{R}} \delta_{\delta l}(x - x_0) dx = 1$ , de sorte que l'identification (symbolique) est bien  $\delta_{\delta l}(x - x_0) = \delta l \delta(x - x_0)$ .

<sup>25</sup>Ceci veut dire que le milieu extérieur a la même température partout.



ce qui permet de récrire (6.73) sous la forme :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} . \quad (6.78)$$

La solution de cette équation est forcément une fonction variant significativement sur des échelles d'ordre 1 pour ses deux variables.  $\xi$  apparaît donc comme l'échelle typique de variation spatiale, et ne peut être que la longueur de pénétration cherchée (ou plutôt, celle-ci se définit ainsi d'elle-même). On en déduit  $\xi^2 \nu \sim 1$ , d'où :

$$\text{profondeur de pénétration} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{fréquence}}} . \quad (6.79)$$

En mettant des nombres dans le problème (c'est-à-dire en choisissant convenablement  $\lambda$ ), on voit que pour des variations annuelles, la profondeur est d'environ un mètre : une bonne cave à vins se trouve typiquement à une dizaine de mètres de profondeur. Avec les matériaux de construction usuels, on voit de la même façon que, vis-à-vis des variations diurnes de température, une dizaine de cm suffit. ( $\frac{T_{\text{annuelle}}}{T_{\text{diurne}}} = 365$  et  $\sqrt{365} \simeq 19$ ).

### 6.3 Exemple de bilan : chaîne radioactive

On sait que le noyau<sup>26</sup> de l'atome peut se trouver dans un état instable et, au bout d'un certain temps, basculer soudainement vers un état stable, voire un état encore instable pouvant à son tour basculer ultérieurement. Chaque transition s'accompagne de l'évacuation d'énergie dans le milieu extérieur. Ce temps est foncièrement aléatoire : pour un noyau donné, on est incapable de dire s'il va changer d'état dans la femtoseconde suivante ou 100 ans après. La meilleure preuve de ce fait est que si l'on a une source contenant un nombre énorme de noyaux ( $\sim 10^{23}$ ), on n'obtient pas un *flash* soudain à un instant donné : l'émission de la source est continue et décroît graduellement au cours du temps<sup>27</sup>. Ce fait signifie que les noyaux basculent les uns après les autres, pas tous en même temps ; étant tous réputés identiques, il est raisonnable d'admettre que la désexcitation se fait *au hasard*.

Expérimentalement, on constate que si la source contient initialement (à  $t = 0$ )  $N_0$  noyaux actifs, le nombre de noyaux encore actifs à l'instant  $t$ ,  $N(t)$ , suit une loi exponentielle :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.80)$$

(plus on attend, moins il y a de noyaux excités). Cette loi ne contient qu'un seul paramètre,  $\lambda$ , homogène à l'inverse d'un temps : au bout du temps  $\lambda^{-1}$ , la population de noyaux actifs a décré relativement de  $\frac{1}{e}$ . L'usage est de définir plutôt la *période*<sup>28</sup> *radio-active*,  $T$ , définie comme le temps au bout duquel la population de noyaux actifs a été divisée par 2, ce qui donne  $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$ . Les périodes des noyaux actifs peuvent varier dans d'énormes proportions : de quelques picosecondes à plusieurs milliards d'années. Clairement,  $\lambda$  est un *taux de désintégration* ; par ailleurs, il est naturel d'appeler *activité* de la source le nombre de désintégrations par seconde. Comme selon (6.80) on a aussi :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t) , \quad (6.81)$$

l'activité  $A$  est donc  $\lambda N$ , simple produit du taux de désintégration par le nombre de survivants à l'instant considéré. L'activité<sup>29</sup> d'une source décroît au cours du temps.

La physique de la radio-activité est fort complexe, mais on peut l'appréhender de façon élémentaire en admettant d'une part que le noyau est composé de  $A$  nucléons ( $Z$  protons et  $A - Z$  neutrons) et qu'il existe trois

<sup>26</sup>La présentation sacrifie à la tradition : tout ce qui va être dit à propos des "réactions" nucléaires en terme de bilan peut être répété à propos de l'atome lui-même : par désexcitation de l'atome peut provoquer l'excitation puis la désexcitation d'autres atomes (*cascades intra- ou inter-atomiques*).

<sup>27</sup>On ignore ici délibérément les fluctuations statistiques. Le traitement probabiliste sera donné en guise d'application de l'équation-maîtresse (sous-section 6.4.2).

<sup>28</sup>La terminologie est bien mal choisie : il n'y a rien de périodique dans tout cela !

<sup>29</sup>moyenne !

grandes sortes de radioactivité<sup>30</sup>, dont les appellations remontent aux premières observations (la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle), à une époque où on ignorait tout de la physique du noyau de l'atome (dont l'existence, d'ailleurs, n'était même pas attestée) :

- Radioactivité  $\beta^-$ , qui résulte de la dissociation d'un neutron en un électron et un proton (la charge totale se conserve) :



L'électron est un intrus au sein du noyau et est catapulté à l'extérieur : le noyau issu de cette réaction a un proton de plus et un neutron de moins, le nombre  $A$  de ses nucléons est donc inchangé :



On a ainsi transmuté un élément du tableau périodique en l'élément situé juste à droite.

- Radioactivité  $\alpha$ , où le noyau émet une particule  $\alpha$  (qui est en fait un noyau d'Hélium), composé de 2 protons et de deux neutrons. La réaction correspondante est donc :



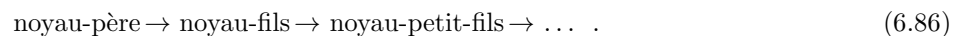
Le noyau-fils a glissé de deux colonnes vers la gauche dans le tableau périodique

- Radioactivité  $\gamma$ , où le noyau ne change pas mais transite d'un état excité vers son l'état fondamental en émettant un photon (grain de rayonnement électromagnétique) :



Les énergies des produits de ces réactions se situent dans la gamme du MeV, et c'est notamment ce qui en fait la dangerosité, laquelle est très variable en fonction des particules produites : on peut réduire graduellement l'énergie d'une  $\alpha$  ou d'un électron grâce à d'épais blindages. En revanche, un photon  $\gamma$  – parce qu'il est insécable et conserve toute sa vie *toute* son énergie initiale – provoque des dégâts considérables dans la matière, qu'elle soit inerte ou vivante (le destin d'un photon est de disparaître d'un coup, toute son énergie étant absorbée localement par le milieu ambiant, d'où les ravages considérables dans la matière ordinaire – notamment la matière vivante – où l'échelle typique d'énergie est l'eV, un million de fois plus petite que celle du photon...).

Le plus souvent, une réaction nucléaire ne se produit pas seule mais n'est qu'un élément d'une suite de réactions : un premier noyau (noyau-père) donne naissance à un autre noyau (noyau-fils) lui-même instable, qui engendre à son tour le petit-fils de son père et ainsi de suite. On parle alors de chaîne radio-active<sup>31</sup> ; schématiquement :



Comme exemple, citons la chaîne "naturelle" partant de l'uranium  ${}^{238}_{92}\text{U}$  et qui se termine aux trois éléments stables plomb  ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ , thallium  ${}^{206}_{81}\text{Tl}$  et mercure  ${}^{206}_{80}\text{Hg}$  en passant par plus d'une dizaine d'éléments instables. Chaque réaction est caractérisée par sa constante  $\lambda$  ; schématiquement, on peut noter :



$Z$  désignant l'élément stable final (il peut y en avoir plusieurs).

La question est de décrire l'évolution des différentes populations de nucléides au cours du temps. Le traitement élémentaire assimile chaque population à sa valeur moyenne (voir section 6.4.2), et la traite d'ailleurs comme une variable continue (le nombre de noyaux est évidemment un entier !), ce qui est justifié compte tenu de l'énormité des nombres pertinents (quand  $N \sim 10^{23}$ , une variation de  $N$  d'une unité est "infinitésimale"). Les équations d'évolution peuvent s'obtenir en effectuant un bilan, lequel consiste à faire l'inventaire de ce qui

<sup>30</sup>On connaît aussi la radioactivité  $\beta^+$ , où le noyau émet un anti-électron  $e^+$ .

<sup>31</sup>À ne pas confondre avec la *réaction en chaîne* caractérisée par le phénomène de *boule de neige* : un noyau fragile bombardé par un neutron pouvant en émettre deux, qui vont à leur tour exciter deux autres noyaux, lesquels vont émettre au total quatre neutrons, etc.

fait croître ou décroître une population donnée entre deux instants  $t$  et  $t + dt$ . Ainsi, pour la chaîne à trois nucléides :



on écrit d'abord :

$$dN_A = -\lambda_A N_A dt , \quad (6.89)$$

puisque A ne peut que disparaître. Pour B, il y a deux termes, l'un  $+\lambda_A N_A dt$  puisque chaque A qui disparaît donne un B, l'autre  $-\lambda_B N_B dt$  représentant la désintégration de B :

$$dN_B = \lambda_A N_A dt - \lambda_B N_B dt . \quad (6.90)$$

Enfin, C croît d'une seule façon, par la désintégration de B, et ne disparaît pas (il est supposé stable en tant que maillon terminal de la chaîne radioactive) :

$$dN_C = \lambda_B N_B dt . \quad (6.91)$$

On obtient ainsi le système différentiel de trois équations couplées :

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A , \quad \frac{dN_B}{dt} = +\lambda_A N_A - \lambda_B N_B , \quad \frac{dN_C}{dt} = +\lambda_B N_B . \quad (6.92)$$

On note au passage que la somme des seconds membres est nulle, ce qui assure que la somme  $N_A + N_B + N_C$  est une constante comme il se doit. Ces équations montrent que  $N_A$  décroît toujours et que, si seule l'espèce A est présente au départ (ni B, ni C), alors  $\frac{dN_B}{dt}$  est positive au départ, puis devient négative. Ainsi, B croît jusqu'à un instant  $t_{\max}$  pour lequel  $+\lambda_A N_A(t_{\max}) - \lambda_B N_B(t_{\max}) = 0$ , puis décroît. Enfin, la population en C ne fait que croître, évidemment.

La résolution du système (6.92) est facile ; la première équation donne  $N_A = N_A(0)e^{-\lambda_A t}$ , ce qui produit une équation différentielle inhomogène pour  $N_B$  :

$$\frac{dN_B}{dt} + \lambda_B N_B = +\lambda_A N_A(0)e^{-\lambda_A t} , \quad (6.93)$$

dont la solution générale est  $N_B(t) = Ke^{-\lambda_B t} + \lambda_A N_{A0} \int_0^t e^{-\lambda_B(t-t')} e^{-\lambda_A t'} dt'$ ; la condition initiale  $N_B(0) = 0$  prise en compte pour cette expression donne :

$$N_B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) N_A(0) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (1 - e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t}) N_A(t) . \quad (6.94)$$

La valeur maximum de  $N_B$  est atteinte en  $t_{\max} = \frac{1}{\lambda_A - \lambda_B} \ln \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$  et vaut :

$$N_B(t_{\max}) = \left( \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \right)^{\frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A}} N_A(0) . \quad (6.95)$$

En fonction du rapport  $r = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$ , ce maximum se comporte suit :

$$\frac{N_B(t_{\max})}{N_A(0)} \simeq \begin{cases} r & \text{si } r \ll 1 \\ 1 - \frac{1}{r} \ln r & \text{si } r \gg 1 \end{cases} \quad (6.96)$$

Un cas intéressant (et important en pratique) est celui où  $\lambda_A \ll \lambda_B$  (A se désintègre très lentement, B très vite) – c'est le cas par exemple de la famille de  ${}^{238}_{92}\text{U}$  :



puisque :

$$T_{{}^{238}_{92}\text{U}} \simeq 4.5 \text{ milliards d'années} \gg T_{{}^{234}_{90}\text{Th}} = 24 \text{ jours} . \quad (6.98)$$

Avec des périodes  $T_B \ll T_A$  aussi différentes, on peut clairement identifier trois phases : la phase initiale où  $t \sim T_B \ll T_A$ , la phase intermédiaire où  $T_B \ll t \ll T_A$  et la phase finale  $t \gtrsim T_A$ .

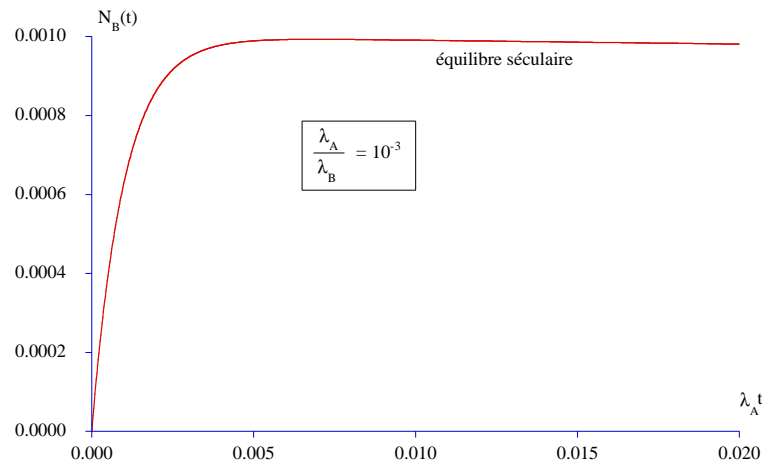


Figure 6.1: Variation de la population  $N_B(t)$  dans le cas  $\lambda_B \gg \lambda_A$ . La période d'équilibre séculaire est nettement visible.

Pour la phase initiale (brève),  $\lambda_B t \lesssim 1$  (donc  $\lambda_A t \ll 1$ ), (6.94) se simplifie en :

$$N_B(t) \simeq \frac{\lambda_A}{\lambda_B} (1 - e^{-\lambda_B t}) N_A(0) , \quad (6.99)$$

qui montre que  $N_B$  sature rapidement à une valeur  $\simeq \frac{\lambda_A}{\lambda_B} N_A(0)$  au bout d'un temps  $\sim T_B$ . Pendant la phase intermédiaire  $\lambda_A t \lesssim 1 \ll \lambda_B t$ , de sorte que  $N_B(t)$  est pratiquement constant et reste voisin de  $\frac{\lambda_A}{\lambda_B} N_A(0)$  ; cette phase dure pendant un temps  $\lesssim T_A$ , qui est gigantesque à l'échelle  $T_B$  – c'est pourquoi on désigne cette phase par *équilibre séculaire* (il dure des siècles). Enfin, dans la phase finale  $1 \lesssim \lambda_A t \ll \lambda_B t$ ,  $e^{-\lambda_B t}$  est négligeable dans l'expression (6.94) et  $N_B(t) \simeq \frac{\lambda_A}{\lambda_B} e^{-\lambda_A t} N_A(0)$  : la population en B finit par redescendre très lentement à zéro (voir fig. 6.1).

En ce qui concerne  $N_C$ , la troisième équation (6.92) donne  $N_C(t) = \lambda_B \int_0^t N_B(t') dt'$ , soit :

$$N_C(t) = \frac{1}{\lambda_B - \lambda_A} [\lambda_B (1 - e^{-\lambda_A t}) - \lambda_A (1 - e^{-\lambda_B t})] N_A(0) . \quad (6.100)$$

## 6.4 Évolution probabiliste d'un système : équation-maîtresse

Souvent, l'évolution d'un système ne peut être décrite qu'en termes probabilistes, soit en raison de la méconnaissance de multiples causes regroupées collectivement sous le nom de *hasard* (la pièce de monnaie lancée en l'air, le dé qui roule), soit parce que les lois physiques, à l'échelle considérée, sont foncièrement aléatoires (la physique à l'échelle de l'atome et en-deçà, par exemple). En pareil cas, les équations qui régissent l'évolution du système n'impliquent pas directement les grandeurs physiques "fondamentales" (par exemple : positions, vitesses, ...), mais donnent la variation dans le temps (dynamique) des probabilités pour le système d'être dans tel ou tel état. L'équation-maîtresse, qui est un autre exemple d'équation de bilan, fixe précisément cette dynamique.

### 6.4.1 Dérivation de l'équation-maîtresse

On sait que la somme des probabilités est toujours égale à 1, ce qui constitue encore un exemple de loi de conservation : si une probabilité diminue, d'autres doivent simultanément augmenter (d'où à nouveau la notion

naturelle de *courant* de probabilité). Dans le cas de la pièce de monnaie parfaite, chaque probabilité est égale à  $\frac{1}{2}$ , et ne change pas au cours du temps (si la pièce ne vieillit pas, ou vieillit symétriquement). En revanche, pour une source radioactive, il est bien évident que la probabilité d'avoir  $n$  noyaux excités<sup>32</sup> varie au cours du temps. Plus précisément, s'il y avait  $N_0$  noyaux au départ ( $t = 0$ ), et comme entre 0 et  $t$  un certain nombre d'entre eux ont pu se désintégrer, la description complète exige la connaissance de toutes les probabilités  $P_n$  ( $0 \leq n \leq N_0$ ) d'avoir à l'instant  $t$   $n$  noyaux encore actifs ; clairement, ces probabilités dépendent du temps : au départ, toutes sont nulles sauf  $P_{N_0}$  qui vaut 1, aux temps très grands devant la durée de vie, elles sont toutes très petites sauf celles correspondant aux petites valeurs de l'entier  $n$ .

Dans cet exemple, on peut parler d'*état* de la source, état à l'instant  $t$ , en qualifiant complètement cet état par le nombre de noyaux survivants. Plus généralement, pour un système physique quelconque, il est en général possible de dresser l'inventaire des états possibles et, s'ils sont au plus dénombrables, de les indiquer par un entier  $n$  que l'on peut toujours conventionnellement prendre dans  $\mathbb{N}$  ou dans  $\mathbb{Z}$ , selon la convenance. Dans la suite,  $P_n(t)$  désigne ainsi la probabilité pour le système d'être dans l'état repéré par  $n$ . Compte tenu de la nature probabiliste du problème, la connaissance de l'ensemble des  $P_n(t)$  constitue l'information ultime sur le système considéré. L'enjeu est donc d'établir une équation permettant de les trouver.

À nouveau, c'est la notion de bilan qui est à pied d'œuvre. On va écrire la variation d'une probabilité  $P_n(t)$  entre deux instants en considérant l'ensemble des processus qui permettent au système d'arriver dans l'état  $n$  (population de l'état  $n$ ) et les processus qui vident cet état au profit des autres. Schématiquement, on écrit donc :

$$P_n(t + \delta t) - P_n(t) = (\text{ce qui permet d'arriver en } n) \text{ moins } (\text{ce qui dépeuple } n) . \quad (6.101)$$

L'arrivée du système en  $n$  suppose qu'il est parti de quelque part, c'est-à-dire d'un certain état,  $m$ , et que le passage (on dit la *transition*) de  $m$  vers  $n$  est possible. Au total, on pose que le terme élémentaire peuplant l'état  $n$  est de la forme  $W_{nm}P_m$ , étant entendu que si la probabilité d'être en  $m$  est nulle, alors la transition n'est pas possible (on ne peut pas mourir si l'on n'est pas d'abord vivant). En prenant maintenant en compte tous les états de départ possibles pour les transitions arrivant en  $n$ , on a ainsi :

$$(\text{ce qui permet d'arriver en } n) = \sum_m W_{nm}P_m . \quad (6.102)$$

Pour le terme de dépopulation, on raisonne de la même façon, donnant :

$$(\text{ce qui dépeuple } n) = \sum_m W_{mn}P_n . \quad (6.103)$$

Les  $W_{mn}$  sont *a priori* des quantités compliquées (ce sont des nombres purs, visiblement positifs ou nuls<sup>33</sup>), et qui dépendent notamment de l'intervalle de temps  $\delta t$ . Une hypothèse plausible (et très souvent réalisée) consiste à admettre que dans la limite où  $\delta t$  devient très petit (par rapport à une autre échelle de temps !), alors  $W_{mn}$  est à peu près proportionnel à  $\delta t$ . Autrement dit, on admet que :

$$W_{mn} = w_{mn}\delta t + R(\delta t) , \quad \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{R(\delta t)}{\delta t} = 0 . \quad (6.104)$$

Les quantités  $w_{mn}$  sont homogènes à l'inverse d'un temps et sont tout naturellement appelés *taux de transition* : c'est le nombre de transitions  $n \rightarrow m$  par unité de temps. En rassemblant les morceaux, (6.101) devient :

$$P_n(t + \delta t) - P_n(t) = \delta t \sum_m (w_{nm} + \dots)P_m - \delta t \sum_m (w_{mn} + \dots)P_n , \quad (6.105)$$

où les  $\dots$  représentent des termes qui vont tendre vers zéro dans la limite  $\delta t \rightarrow 0$  ; maintenant, divisant membre à membre par  $\delta t$  et prenant cette limite, on obtient :

$$\frac{dP_n}{dt} = \sum_m (w_{nm}P_m - w_{mn}P_n) \quad \forall n . \quad (6.106)$$

<sup>32</sup>Le traitement ci-dessus ignorait délibérément l'aspect probabiliste des choses. Comme on le verra plus loin, la quantité désignée génériquement par  $N(t)$  dans la section 6.3 est en fait une valeur *moyenne*, au sens d'espérance mathématique.

<sup>33</sup>Si  $W_{mn} = 0$ , ceci signifie que la transition  $n \rightarrow m$  n'est pas possible : on parle alors de *transition interdite*.

C'est cette équation qui porte le nom d'*équation-maîtresse* – noter en fait qu'il s'agit d'un système d'équations, puisqu'il y a une équation pour chaque valeur de  $n$  ; elle est d'une importance capitale pour décrire la dynamique des systèmes hors d'équilibre.

Tout comme avant, on peut définir des *courants* entrants et sortants. En raisonnant avec des quantités positives, on définit ainsi :

$$J_{\rightarrow n} = \sum_m w_{nm} P_m, \quad J_{n \rightarrow} = \sum_m w_{mn} P_n. \quad (6.107)$$

L'équation-maîtresse exprime alors :

$$\text{taux de variation de la probabilité } P_n = J_{\rightarrow n} - J_{n \rightarrow}. \quad (6.108)$$

On vérifie bien que la somme des probabilités est conservée. En faisant la somme membre à membre de toutes les équations :

$$\sum_n \frac{dP_n}{dt} = \sum_n \left[ \sum_m (w_{nm} P_m - w_{mn} P_n) \right]. \quad (6.109)$$

En échangeant le nom des variables (muettes !) de sommation, la première somme  $\sum_n \sum_m w_{nm} P_m$  se met sous la forme  $\sum_m \sum_n w_{mn} P_n$ , ou encore  $\sum_n \sum_m w_{mn} P_n$  dans l'hypothèse où on peut échanger les ordres de sommation : la première (double) somme se compense bien exactement avec la seconde ; d'où :

$$\sum_n \frac{dP_n}{dt} = 0, \quad (6.110)$$

comme il se doit.

## 6.4.2 Exemples

On donne successivement deux exemples classiques d'application ; d'une part le traitement probabiliste du déclin radioactif, d'autre part la *marche de l'ivrogne*, qui est une version ludique élémentaire d'un problème fondamental de la Physique, le mouvement brownien.

### Description probabiliste du déclin radioactif

Le seul ingrédient est la probabilité élémentaire  $\lambda \delta t$  qu'un noyau quelconque se désexcite entre  $t$  et  $t + \delta t$  (par hypothèse, cette probabilité est *indépendante* de l'instant considéré). Il s'agit maintenant de trouver la probabilité  $P_n(t)$  de trouver  $n$  noyaux actifs à l'instant  $t$ , sachant qu'il y en avait  $N_0$  à l'instant initial ( $t = 0$ ). Les règles de base sont :

- événements indépendants  $\longleftrightarrow$  multiplication des probabilités
- événements exclusifs  $\longleftrightarrow$  addition des probabilités

Il suffit de faire l'inventaire des processus élémentaires pouvant survenir entre  $t$  et  $t + \delta t$  et donnant la probabilité  $P_n(t + \delta t)$  :

1. aucun noyau ne s'est désexcité. La probabilité est  $(1 - \lambda \delta t)^n$  ; la contribution à la variation de  $P_n$  est donc le produit  $(1 - \lambda \delta t)^n$  avec la probabilité  $P_n(t)$  d'avoir  $n$  noyaux à  $t$ , soit  $(1 - \lambda \delta t)^n P_n(t)$
2. un seul noyau s'est désexcité, probabilité =  $\lambda \delta t$ , ce qui conduit à  $n$  noyaux à l'instant  $t + \delta t$ , s'il y en avait  $n + 1$  à  $t$  ; la probabilité de cet acte élémentaire est donc  $(\lambda \delta t) P_{n+1}(t)$

3.  $k \geq 2$  noyaux se sont désexcités, probabilité  $= (\lambda \delta t)^k$ . Ces processus multiples donnent tous des contributions d'ordre  $\mathcal{O}(\delta t^k)$

Tous ces événements élémentaires sont exclusifs : la réalisation de l'un exclut celle des deux autres. Il en résulte que les probabilités correspondantes vont *s'additionner* les unes aux autres dans le bilan des probabilités. Le bilan de la variation de la probabilité  $P_n$  s'écrit :

$$P_n(t + \delta t) = (1 - \lambda \delta t)^n P_n(t) + (n + 1) \lambda \delta t P_{n+1}(t) + \mathcal{O}(\delta t^k \geq 2) \quad (n = 0, 1, \dots, N_0) . \quad (6.111)$$

Au même ordre en  $\delta t$ , le système (6.111) est :

$$P_n(t + \delta t) = (1 - n \lambda \delta t) P_n(t) + (n + 1) \lambda \delta t P_{n+1}(t) + \mathcal{O}(\delta t^k \geq 2) \quad (n = 0, 1, \dots, N_0) . \quad (6.112)$$

Après division par  $\delta t$  et passage à la limite  $\delta t \rightarrow 0$ , on obtient le système<sup>34</sup> différentiel suivant, de dimension  $N_0 + 1$  :

$$\frac{dP_n}{dt} = (n + 1) \lambda P_{n+1}(t) - n \lambda P_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N_0) \quad (6.113)$$

(on vérifie immédiatement que  $\sum_{n=0}^{N_0} \frac{dP_n}{dt} = 0$ ). Ce système doit être complété par la donnée d'une condition initiale, qui est donc  $P_n(t = 0) = \delta_{n N_0}$  : ceci exprime l'état de la source au départ (au départ il y a sûrement<sup>35</sup>  $N_0$  noyaux actifs).

Une façon commode de résoudre le système (6.113) est la suivante. On définit la fonction (c'est un simple polynôme de degré  $N_0$ ) :

$$f(t; s) = \sum_{n=0}^{N_0} s^n P_n(t) , \quad (6.114)$$

que l'on peut appeler<sup>36</sup> *fonction génératrice* des probabilités<sup>37</sup> puisque, au facteur  $n!$  près, les dérivées successives de  $f$  en  $s = 0$  sont précisément ces probabilités ( $P_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n}{\partial s^n} f(t; s) \right]_{s=0}$ ). À partir de (6.113), on voit de suite que  $f$  satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda(1 - s) \frac{\partial f}{\partial s} , \quad (6.115)$$

avec la condition aux limites  $f(t = 0; s) = s^{N_0}$  puisque  $P_n(t = 0) = \delta_{n N_0}$ . L'inspection<sup>38</sup> de cette équation montre que sa solution est de la forme  $F[(1 - s)a(t)]$ , où  $F$  est une fonction pour l'instant quelconque, et à condition que  $a(t)$  satisfasse l'équation  $\dot{a} = -\lambda a \iff a(t) = e^{-\lambda t}$ , d'où résulte :

$$f(t; s) = F[(1 - s)e^{-\lambda t}] . \quad (6.116)$$

La condition aux limites impose  $F(1 - s) = s^{N_0} \iff F(S) = (1 - S)^{N_0}$  et finalement :

$$f(t; s) = [1 - (1 - s)e^{-\lambda t}]^{N_0} = [(1 - e^{-\lambda t}) + se^{-\lambda t}]^{N_0} . \quad (6.117)$$

Le développement de cette expression en puissances de  $s$  (suivant la formule du binôme), et l'identification avec le développement (6.114), donne  $P_n(t) = C_{N_0}^n (1 - e^{-\lambda t})^n e^{-(N_0 - n)\lambda t}$ , qui est la distribution dite *binômiale*  $C_{N_0}^n (1 - p)^n p^{N_0 - n}$  avec  $p = e^{-\lambda t}$ . On vérifie sans peine que l'espérance mathématique du nombre de noyaux survivants,  $\langle N \rangle(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{N_0} n P_n(t)$ , est égale tout simplement à  $e^{-\lambda t}$  : la loi du déclin exponentiel, formulée à un niveau élémentaire, donne bien l'*espérance mathématique* du nombre de noyaux encore actifs. Ceci montre que le traitement élémentaire confond sans rien dire la valeur moyenne et valeur instantanée de la variable aléatoire ; il n'a donc de sens que si les fluctuations (relatives) sont petites, c'est-à-dire au début de la désintégration de la source<sup>39</sup>, et à condition, pour tracer expérimentalement la courbe de déclin d'une source donnée, de compter les coups sur un intervalle  $\delta t$  grand par rapport au temps moyen séparant deux désintégrations ; c'est la condition *sine qua non* d'un bon rapport signal/bruit, assurant à la courbe relevée d'être bien lisse.

<sup>34</sup>Il est facile de vérifier que la somme des premiers membres est bien égale à zéro.

<sup>35</sup>au sens : il y a  $N_0$  noyaux instables avec probabilité égale à 1.

<sup>36</sup>En posant  $s = e^{iu}$ , on voit que  $f$  n'est autre que la fonction caractéristique introduite usuellement en Théorie des probabilités ; ici, c'est la transformée de Fourier discrète des  $P_n$ .

<sup>37</sup>Ici, le nombre de probabilités  $P_n$  est fini (il est égal à  $N_0 + 1$ ), de sorte que  $f$  est un polynôme.

<sup>38</sup>Une procédure moins intuitive et plus systématique consiste à effectuer une transformation de Laplace de l'équation (6.115) ; en posant  $F(z; s) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t; s) dt$ , on trouve que  $F(z; s)$  satisfait une équation différentielle ordinaire. L'intégration de celle-ci, suivie de la transformation de Laplace inverse, redonne l'expression (6.117).

<sup>39</sup>Pour  $t \gg \lambda$ , les fluctuations ... divergent exponentiellement ! Pour ces instants, la valeur moyenne n'a plus grand sens en pratique - d'où les éternels débats à propos des *faibles doses* ... moyennes).

## La marche de l'ivrogne

Donnons un exemple classique d'illustration de l'équation-maîtresse à la *marche de l'ivrogne* : une marche au hasard unidimensionnelle où, tous les  $\delta t$ , l'ivrogne fait un pas de longueur  $a$  soit dans un sens, soit dans l'autre, avec des probabilités respectives  $p$  (un pas vers la droite) et  $1 - p$  (un pas vers la gauche). Ici, le système est l'ivrogne, et ses états sont ses différentes positions aux points  $na$ . On cherche les probabilités pour qu'au temps  $t_N = N\delta t$  l'ivrogne soit en un certain point.

Le problème peut se résoudre exactement par dénombrement, en supposant qu'à chaque nouveau pas l'ivrogne a complètement oublié les pas précédents (les différents mouvements élémentaires sont alors associés à des v.a. indépendantes). La probabilité que l'ivrogne soit en  $ma + (N - m)(-a) = (2m - N)a$  après  $N$  petits pas est  $C_N^m p^m (1 - p)^{N - m}$ , d'où l'on déduit immédiatement toutes les valeurs moyennes souhaitées, notamment la position moyenne au bout de  $N$  pas (elle est évidemment proportionnelle à la différence  $p - q$ ).

On peut aussi résoudre le problème en effectuant le bilan de ce qui se passe entre deux instant  $t$  et  $t + \delta t$ , c'est-à-dire reprendre dans ce cas particulier le raisonnement général qui a conduit à l'équation-maîtresse. Dans la suite, on désigne par  $P_n(t)$  la probabilité que l'ivrogne soit en  $na$  au temps  $t$  ;  $P_n(t_N)$  est non-nulle seulement si  $-N \leq n \leq +N$ . Pour simplifier, on suppose  $p = q$  (l'ivrogne est vraiment complètement bourré, et a autant de chances d'aller dans un sens que dans l'autre).

Soit la probabilité  $P_n(t + \delta t)$ , et comparons-la à  $P_n(t)$ , en dressant l'inventaire de ce qui peut se passer entre  $t$  et  $t + \delta t$  :

1. l'ivrogne n'a pas bougé
2. l'ivrogne a fait un pas à droite, venant du point  $(n - 1)a$
3. l'ivrogne a fait un pas à gauche, venant du point  $(n + 1)a$

À nouveau, ces trois événements élémentaires sont exclusifs (la réalisation de l'un exclut celle des deux autres), et les probabilités correspondantes vont *s'additionner* les unes aux autres dans le bilan des probabilités.

Soit  $w\delta t$  la probabilité pour que, étant en un point quelconque, l'ivrogne fasse un pas (à gauche ou à droite) pendant l'intervalle de temps  $\delta t$  (ces deux probabilités sont prises égales : l'ivrogne ne sait vraiment pas où il en est). La probabilité qu'il ne bouge pas (aucun pas, ni à gauche, ni à droite) est donc  $1 - w\delta t - w\delta t = 1 - 2w\delta t$ . La probabilité de l'événement 1 ci-dessus est la probabilité qu'étant en  $na$  à l'instant  $t$ , il y soit encore à l'instant d'après ; elle vaut donc  $P_n(t)(1 - w\delta t)$ . La probabilité qu'il soit en  $na$  à  $t + \delta t$  sachant qu'il était en  $(n - 1)a$  est de même  $P_{n-1}(t)w\delta t$ , c'est l'événement 2. Enfin, la probabilité de l'événement 3 est  $P_{n+1}(t)w\delta t$ . Au total, le bilan de ce qui se passe entre les deux instants s'écrit :

$$P_n(t + \delta t) = (1 - 2w\delta t)P_n(t) + w\delta t P_{n-1}(t) + w\delta t P_{n+1}(t) , \quad (6.118)$$

ou encore :

$$P_n(t + \delta t) - P_n(t) = -2w[P_n(t) + wP_{n-1}(t) + wP_{n+1}(t)] \delta t . \quad (6.119)$$

Examinons maintenant le problème à *grande échelle*, en imaginant l'ivrogne tellement agité qu'il "tente le coup" un grand nombre de fois par unité de temps. Ceci revient à dire que  $\delta t$  est très petit par rapport à la résolution en temps d'observation du phénomène (!), ce qui se traduit techniquement en prenant la limite  $\delta t \rightarrow 0$ . Après division par  $\delta t$  et après la limite, on obtient l'équation-maîtresse :

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -2wP_n(t) + wP_{n-1}(t) + wP_{n+1}(t) \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (6.120)$$

Il s'agit bien d'un système d'équations (de dimension infinie), que l'on peut résoudre en deux lignes par une technique de *fonction génératrice*. Introduisons la série de Fourier :

$$\Phi(\phi, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n(t) e^{in\phi} . \quad (6.121)$$



Connaître  $\Phi$  permet bien de connaître *toutes* les probabilités ; en effet, par inversion de Fourier, la relation suivante est vraie :

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} \Phi(\phi, t) d\phi . \quad (6.122)$$

Pour trouver  $\Phi$ , ou plutôt d'abord l'équation satisfaite par  $\Phi$ , on multiplie membre à membre l'équation de  $P_n$  du système (6.120) par  $e^{in\phi}$  et on additionne toutes les équations membre à membre ; ainsi, on trouve tout de suite :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\phi, t) = -2w(1 - \cos \phi) \Phi(\phi, t) . \quad (6.123)$$

Cette équation s'intègre immédiatement en :

$$\Phi(\phi, t) = e^{-2wt(1-\cos \phi)} \Phi(\phi, t=0) . \quad (6.124)$$

En notant  $n=0$  l'endroit de départ,  $\Phi(\phi, t=0) = 1$ , et la probabilité  $P_n(t)$  est :

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} e^{-2wt(1-\cos \phi)} d\phi ; \quad (6.125)$$

cette intégrale s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel modifiées  $I_n(t)$  :

$$P_n(t) = e^{-2wt} I_n(2wt) , \quad I_n(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} e^{X \cos \phi} d\phi . \quad (6.126)$$

C'est donc la probabilité *conditionnelle* pour que l'ivrogne soit en  $na$  à l'instant  $t$  sachant qu'il était (certainement) à l'origine au départ. La distribution de probabilité est maximum en  $n=0$  et, bien sûr, symétrique ( $P_{-n} = P_n$ ). La distribution s'aplatit au cours du temps, chaque  $P_n$  tendant vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$  (mais la somme est bien sûr toujours égale à 1 !).

On peut aussi effectuer une analyse en espace continu (à grande échelle), ce qui peut se faire formellement soit en prenant la limite  $a \rightarrow 0$  sur les probabilités (6.126) ( $n \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ ),  $na = C^{\text{ste}} = x$ , soit en revenant à l'équation maîtresse (6.120), en remarquant que cette équation s'écrit aussi :

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = a^2 w \frac{1}{a} \left[ \frac{1}{a} [P_{n+1}(t) - P_n(t)] - \frac{1}{a} [P_n(t) - P_{n-1}(t)] \right] \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (6.127)$$

La quantité  $\frac{1}{a} [P_{n+1} - P_n]$  est une dérivée discrète, et  $\frac{1}{a^2} [[P_{n+1} - P_n] - [P_n - P_{n-1}]]$  est la dérivée de cette dérivée. Dans la limite d'espace continu,  $P_n(t) \rightarrow (aP(x, t))$ ,  $P_{n+1} - P_n \rightarrow \partial_x(aP)$  et  $[P_{n+1} - P_n] - [P_n - P_{n-1}] \rightarrow a\partial_{xx}^2(aP)$ . Dès lors, (6.120) prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) , \quad (6.128)$$

avec  $D = a^2 w$  : c'est l'équation de la diffusion ! Dans ce formalisme, la distribution de probabilités est la gaussienne (6.64) avec  $x_0 = 0$ .

Ce problème de marche au hasard qui débouche sur l'équation de la diffusion permet de donner un contenu physique à la diffusion au sens entendu dans la sous-section 6.2.3 : les (grosses) particules d'encre diffusent sous l'effet d'une marche au hasard, tapées en tout sens et un grand nombre de fois par seconde par les très nombreuses (petites) molécules du fluide. Ceci constitue l'essence de la démarche d'Einstein qui fut le premier à donner une interprétation microscopique du mouvement Brownien dans l'un de ses trois articles de 1905, *annus mirabilis*...